Mechanika Kwantowa R 2016/2017, Seria 3

Zadanie 1 Znajdź stany własne i poziomy energetyczne w nieskończonej studni potencjału o szerokości a w środku której dodatkowo znajduje się potencjał typu delty Diraca:

$$V(x) = \begin{cases} \lambda\delta(x) & \text{dla} - a/2 \leq x \leq a/2 \\ \infty & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}, \tag{1}$$

Przedyskutuj wynik w zależności o znaku parametru λ. Które stany własne i energie studni się zmieniają w porównaniu z przypadkiem studni nieskończonej bez delty?

Zadanie 2 Wyznacz zbiór parametrów a i V_0, dla których istnieją stany związane cząstki o masie m w jednym wymiarze w polu sil o potencjale $V(x) = \begin{cases} \infty & \text{dla } x < 0 \\ -V_0 & \text{dla } 0 < x < a \\ 0 & \text{dla } x > a \end{cases}$.

Zadanie 3 Wyznacz współczynnik transmisji i odbicia fali płaskiej przy rozpraszaniu na schodku potencjału:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ V_0 & \text{dla } x > 0 \end{cases} \tag{2}$$

Uwaga: pamiętaj, że współczynniki transmisji/odbicia są związane ze stosunkami prądów prawdopodobieństwa związanych z odpowiednimi falami.

Zadanie 4 Wiadomo, że rozpad α związany jest z efektem tunelowania kwantowego. Rozważmy następujący, bardzo uproszczony (w szczególności jednowymiarowy), model rozpadu jądra Uranu $^{238}\mathrm{U} \to 234^{\mathrm{Th}} + \alpha$. Zakładamy, że potencjał jaki "widzi" cząstka α w trakcie rozpadu w funkcji odległości od centrum jądra ma następująca postać:

$$V(r) = \begin{cases} -30\,\mathrm{MeV} & 0 < r < 10\,\mathrm{fm} \\ 300\,\mathrm{MeV}\cdot\mathrm{fm}/r & r > 10\,\mathrm{fm} \end{cases}$$

czyli mamy prostokątną studnie potencjału, a następnie Coulombowsko zanikający potencjał. Obserwuje się, że emitowane cząstki α mają energię kinetyczną równą 5MeV. Postaraj się na tej podstawie oszacować czas życia jądra Uranu. Porównaj z wartością faktycznie obserwowaną.

Wskazówka: To zadanie jest bardzo trudne. Należy silnie posłużyć się fizyczną intuicją i myśleniem w stylu Feymana, aby robić pewne rzeczy poprawnie jakościowo i nie przejmować się, że nie potrafimy rozwiązać tego problemu ściśle. Rozwiązujemy ten problem tak jakby był to problem jednowymiarowy, gdzie ograniczamy się do $r > 0$, a w punkcie $r = 0$ wkładamy tak jakby nieskończona barierę potencjału, myślimy o prawdopodobieństwie transmisji cząstki o takiej energii przez rozważaną barierę, a żeby mieć na koniec czas życia to musimy jakoś włożyć jeszcze wielkość, która powie jak wiele razy na sekunde cząstka "próbuje" uderzać w barierę... Pamiętaj że chodzi nam o rząd wielkości, a nie o ścisłe rozwiązanie.

Zadanie 5 Rozważ cząstkę przygotowaną w stanie gaussowskim $\psi(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} e^{-\frac{(x+x_0)^2}{4\sigma^2} + \frac{ip_0 x}{\hbar}}$, gdzie $p_0 \gg \hbar/\sigma$, $x_0 \gg \sigma$ (cząstka znajduje się wyraźnie z lewej strony potencjału i ma pęd skierowany wyraźnie w prawo) padającą na barierę potencjału $V(x) = \lambda\delta(x)$. Zapisz wyrażenie na prawdopodobieństwo przejścia cząstki przez tę barierę. Zostaw w postaci wyrażenia całkowego (z pojedyncza całką), które możnaby obliczyć numerycznie. Jeśli koniecznie trzebaby podać jakieś konkretne wyrażenie w miarę dobrze przybliżająca prawdziwą wartość współczynnika transmisji, jakie byś podał(a)?

Zadanie 6 Rozważ potencjał periodyczny postaci:

$$V(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \lambda\delta(x - na),$$

gdzie $\lambda < 0$ (na ćwiczeniach rozważaliśmy przypadek $\lambda > 0$). Przyjmując periodyczne warunki brzegowe wyznacz warunek na pasma energetyczne w tym potencjale. Czy zawsze istnieją stany związane. Czy tak jak w przypadku $\lambda > 0$ mamy wiele pasm?