Mechanika Kwantowa R 2016/2017, Seria 4

Zadanie 1 Zacznijmy od podejścia algebraicznego. Operator pędu możemy wyrazić poprzez operatory kreacji i anihilacji:

$$\hat{p} = \sqrt{m\omega\hbar}\frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{i\sqrt{2}}.$$

Pamiętając, że $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$, $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$, mamy od razu $\langle n|\hat{p}|n\rangle = 0$. Liczymy wariancję p:

$$\Delta^2 p = \langle n|\hat{p}^2|n\rangle = -\frac{\hbar m\omega}{2}\langle n|(a - a^\dagger)^2|n\rangle = \hbar m\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

Niech $\psi_n(x) = A_n H_n(\alpha x)e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}}$, będzie n-tym stanem własnym. Licząc $\langle p^2\rangle$ bezpośrednio, w reprezentacji położeniowej musielibyśmy obliczyć:

$$\langle p^2\rangle = A_n^2\alpha\hbar^2\int \mathrm{d}\xi H_n(\xi)e^{-\frac{\xi^2}{2}}\partial_\xi^2[H_n(\xi)e^{-\frac{\xi^2}{2}}].$$

Biorąc funkcję tworzącą wielomianów Hermite'a $S(\xi, s) = e^{-s^2+2s\xi} = \sum_n \frac{s^n}{n!}H_n(\xi)$, rozważmy:

$$\int \mathrm{d}\xi\, S(\xi, s)e^{-\frac{\xi^2}{2}}\partial^2\xi[S(\xi, t)e^{-\frac{\xi^2}{2}}] = e^{2st}\int \mathrm{d}\xi e^{-\xi^2}[(t - s - \xi)^2 - 1] = e^{2st}\sqrt{\pi}[(t - s)^2 - \tfrac{1}{2}].$$

W powyższym wyniku rozpoznajemy, że współczynnik stojący przy $\frac{s^n t^n}{n!^2}$ wynosi $2^n n!\sqrt{\pi}(n + \frac{1}{2})$, a tym samym dostajemy, że

$$\langle p^2\rangle = A_n^2\alpha\hbar^2\sqrt{\pi}2^n n!(n + 1\tfrac{1}{2}) = m\hbar\omega(n + \tfrac{1}{2}).$$

Zadanie 2 Równanie Schroedingera dla oscylatora harmonicznego z potencjałem $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ w reprezentacji pędowej ma postać:

$$\frac{p^2}{2m}\tilde{\psi} - \frac{m\omega^2\hbar^2}{2}\frac{\mathrm{d}^2\tilde{\psi}}{\mathrm{d}p^2} = E\tilde{\psi}$$

Widzimy, że równanie jest całkowicie analogiczne analogiczne to równania w reprezentacji położeniowej. Zamieniając zmienne $\xi = \beta p$, $\beta = 1/\sqrt{m\omega\hbar}$, otrzymujemy to samo równanie co startując z reprezentacji położeniowej

$$\frac{\mathrm{d}^2\tilde{\psi}}{\mathrm{d}\xi^2} + \tilde{\psi}(\lambda - \xi^2) = 0, \quad \lambda = \frac{2E}{\hbar\omega}.$$

Stąd od razu możemy napisać:

$$\tilde{\psi}_n(p) = \sqrt{\frac{\beta}{\sqrt{\pi}2^n n!}}H_n(\beta p)e^{-\frac{1}{2}\beta^2 p^2}.$$

Przy okazji znaleźliśmy więc bazę stanów które nie zmieniają swej postaci pod wpływem działania transformaty Fouriera.

Zadanie 3 Hamiltonian cząstki na która działa stała siła to $\hat{H} = -F\hat{x}$. Ponieważ kopnięcie jest bardzo krótkie możemy zaniedbać ewolucję cząstki podczas działania siły i przybliżyć kopnięcie poprzez następującą operacje unitarną: $U = e^{iF\delta t/\hbar} = e^{i\gamma\hat{x}/\hbar}$. Oznacza to, że stan podstawowy oscylatora zostanie przesunięty w pędach o wartość $\gamma/\hbar$. W wyniku otrzymamy stan koherentny $|z\rangle$ o $z = i\sqrt{\frac{\gamma^2}{2m\omega\hbar^3}}$. Następnie stan ewoluuje jak $|ze^{-i\omega t}\rangle$.

Zadanie 4 Stan po czasie t ma postać:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i(n-1/2)\omega t}|n-1\rangle - e^{-i(n+1/2)\omega t}|n\rangle) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|n-1\rangle - e^{-i\omega t}|n\rangle).$$

Stan ortogonalny uzyskamy po czasie $t = \pi/\omega$. Wartości oczekiwane:

$$\langle x\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle\psi(t)|(a+a^\dagger)|\psi(t)\rangle = -\sqrt{\frac{2\hbar n}{m\omega}}\cos\omega t$$
$$\langle p\rangle = \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\frac{1}{i}\langle\psi(t)|(a-a^\dagger)|\psi(t)\rangle = \sqrt{2m\hbar\omega n}\sin\omega t.$$

Zadanie 5 Operator kreacji w reprezentacji położeniowej ma postać:

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} - i\frac{p}{\sqrt{m\omega\hbar}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha x - \frac{1}{\alpha}\partial_x\right),$$

gdzie $\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$. Działając dwukrotnie operatorem kreacji na stan podstawowy dostaniemy $\sqrt{2}\psi_2(x)$ czyli:

$$\psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^\dagger)^2\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(2\alpha^2x^2-1)e^{-\alpha^2x^2/2}.$$

Postać w reprezentacji pędowej jest analogiczna z dokładnością do zamiany α na $\beta = 1/\sqrt{m\omega\hbar}$.

Zadanie 6 Dzięki warunkowi zupełności stanów koherentnych $\frac{1}{\pi}\int \mathrm{d}^2z|z\rangle\langle z| = \mathbb{1}$ możemy napisać:

$$|n\rangle = \frac{1}{\pi}\int \mathrm{d}^2z\,|z\rangle\langle z||n\rangle = \frac{1}{\pi}\int \mathrm{d}^2z\,e^{-\frac{|z|^2}{2}}\frac{z^{*n}}{\sqrt{n!}}|z\rangle.$$

Zadanie 7 Korzystamy z tw. Bakera-Cambella-Haussdorfa i zapisujemy

$$D(\alpha) = e^{z\hat{a}^\dagger - z^*\hat{a}} = e^{z\hat{a}^\dagger}e^{-z^*\hat{a}}e^{\frac{1}{2}zz^*[a^\dagger,a]} = e^{-\frac{|z|^2}{2}}e^{z\hat{a}^\dagger}e^{-z^*\hat{a}}$$

Działając na $|0\rangle$ pierwszy eksponens sprowadza sie do działania identycznościowego, rozwijając w szereg drugi eksponens dostajemy:

$$D(\alpha)|0\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}}\sum_n \frac{1}{n!}(a^\dagger)^n|0\rangle = |z\rangle.$$

Zadanie 8 Warunek normalizacji:

$$\langle\psi(0)|\psi(0)\rangle = |A|^2(2 + \langle z|-z\rangle + \langle -z|z\rangle) = 2|A|^2(1+e^{-|z|^2-z^*z}) = 1$$

Stan po czasie t:

$$|\psi(t)\rangle = A(|ze^{-i\omega t}\rangle + |-ze^{-i\omega t}\rangle).$$

Stan powróci do stanu początkowego dla $t = \pi/\omega$.

Zadanie 9 Metodą separacji zmiennych dochodzimy do wniosku, że rozwiązaniem ogólnym będzie:

$$\psi_{n_x,n_y}(x,y) = \psi_{n_x}(x)\psi_{n_y}(y), \quad n_x, n_y = 0, 1, \ldots$$

gdzie $\psi_{n_x}(x)$ jest rozwiązaniem dla jednowymiarowego oscylatora z czestością własną ω_x i analogicznie dla $\psi_{n_y}(y)$. Energia stanu to $E_{n_x,n_y} = \hbar\omega_x(n_x + \frac{1}{2}) + \hbar\omega_y(n_y + \frac{1}{2})$. W przypadku $\omega_x = \omega_y = \omega$, dostępne energie możemy zapisać jako: $E_n = \hbar\omega(1+n)$, gdzie $n = n_x + n_y$. Każdy poziom ma $n+1$-krotną degenrację (liczba sposobów zapisania n jako sumy dwóch liczb naturalnych).

Zadanie 10 Metodą separacji zmiennych otrzymujemy ogólne rozwiązanie postaci:

$$\psi_{n_x,n_y,n_z}(x,y,z) = \psi_{n_x}(x)\psi_{n_y}(y)\psi_{n_z}(z), \quad n_x, n_y, n_z = 1, 2, \ldots$$

gdzie $\psi_{n_x}(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\pi n_x x/a)$ są stanami własnymi odpowiadającymi jednowymiarowej nieskończonej studni potencjału o szerokości a (analogicznie dla pozostałych kierunków). Energia stanu:

$$E_{n_x,n_y,n_z} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left(\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{c^2}\right).$$