Mechanika Kwantowa R 2016/2017, Seria 5

Zadanie 1 Cząstka o masie m porusza się w płaszczyźnie xy w polu siły o potencjale:

$$V(x,y) = \frac{k_1}{2}(x^2+y^2) + \frac{k_2}{2}(x-y)^2,$$

gdzie k_1, k_2 są pewnymi stałymi dodatnimi. Znaleźć widmo energii cząstki i wypisać postać funkcji własnych odpowiadających poszczególnym energiom. Dla jakich wartości parametrów k_1 i k_2 w widmie pojawi się degeneracja.

Zadanie 2 Rozważ cząstkę w sferycznie symetrycznej skończonej jamie potencjału

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases}.$$

Wyprowadź warunek na istnienie co najmniej jednego stanu związanego. *Wskazówka:* stan o najniższej energii zawsze będzie związany z wartością całkowitego momentu pędu $l = 0$.

Zadanie 3 Cząstka o masie m poruszająca się z zerowym całkowitym momentem pędu jest uwięziona pomiędzy dwoma nieprzenikliwymi sferami o promieniach a i b, czyli:

$$V(r) = \begin{cases} +\infty & \text{dla } r < a \\ 0 & \text{dla } a < r < b \\ +\infty & \text{dla } r > b \end{cases}.$$

a) Znajdź poziomy energetyczne i unormowane funkcje falowe.

b) Dla stanu o najniższej energii, znajdź średnie położenie cząstki od centrum potencjału oraz odległość najbardziej prawdopodobną

Zadanie 4 Znajdź stany związane o momencie pędu $l = 0$ w potencjale „bańki mydlanej"

$$V(r) = -\lambda\delta(r-R),$$

gdzie $\lambda > 0$. Czy stany związane zawsze istnieją?

Zadanie 5 Rozważ funkcję falową:

$$\psi(r,\theta,\varphi) = A\sin\theta\cos\varphi e^{-\alpha r}.$$

a) Znajdź stałą normalizacyjną A

b) Zapisz stan cząstki poprzez rozkład na harmoniki sferyczne $Y_{l,m}(\theta,\varphi)$

c) Dokonując na cząstce jednoczesnego pomiaru $\hat{L}^2$ i L_z, jakie wyniki pomiaru i z jakimi prawdopodobieństwami można uzyskać

Zadanie 6 Rozważ stan cząstki o momencie pędu $l = 1$, który w standardowej bazie $|l, m\rangle$ ma postać

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 2\sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Jakie wartości i z jakimi prawdopodobieństwami można uzyskać mierząc y-kową składową momentu L_y.

Zadanie 7 Rozważ cząstkę o masie m w izotropowym potencjale oscylatora harmonicznego $V = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$. Rozważ podprzestrzeń stanów o energii $E = \frac{7}{2}\hbar\omega$ (drugi poziom wzbudzony). W ramach tej podprzestrzeni znajdź stany własne L_z oraz L^2.

Zadanie 8 Rozważ dwie cząstki o spinie 1. Skonstruuj bezpośrednim rachunkiem (nie używając wyrażeń na współczynniki Clebscha-Gordana) stany mające dobrze określoną całkowitą wartość spinu oraz rzut całkowitego spinu na oś z.

Zadanie 9 Rozważ stan własny operatorów $\hat{L}^2$ i $\hat{L}_z$, $|l, m\rangle$. Oblicz wartość oczekiwaną i dyspersję operatora rzutu momentu pędu na kierunek $\vec{n} = (\sin\theta_0 \cos\varphi_0, \sin\theta_0 \sin\varphi_0, \cos\theta_0)$ w stanie $|l, m\rangle$.

Zadanie 10 W chwili $t = 0$ atom wodoru znajduje się w stanie:

$$\psi(\vec{r}, t = 0) = \frac{4}{(2a)^{3/2}} \left[e^{-\frac{r}{a}} Y_{0,0} + A\frac{r}{a} e^{-\frac{r}{2a}} \left(-iY_{1,1} + Y_{1,-1} + \sqrt{7} Y_{1,0} \right) \right]$$

gdzie a jest promieniem Bohra.

a) Oblicz stałą normalizacyjna A

b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że w wyniku pomiaru $\hat{L}^2$ otrzymamy wartość $\hbar^2 l(l+1)$, gdzie $l = 0, 1, 2$

c) Jaka jest gęstość prawdopodobieństwa $\rho(r)$, że elektron znajdziemy w odległości r od jądra.

d) Dla jakiej wartości r, $\rho(r)$ ma maksimum?

e) Zapisz postać funkcji falowej w chwili t.

f) Zapisz unormowany stan cząstki w chwili t na której wykonano pomiar L_z dający wynik $\hbar$.

Zadanie 11 Cząstka znajduje się w stanie kwantowym opisanym następująca funkcją falową:

$$\psi(\vec{r}) = \mathcal{N} e^{-r/a} \left(\frac{z}{r} + i\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{x^2 - y^2}{r^2} \right)$$

Znajdź rozkład prawdopodobieństwa pomiaru $P(l, m)$, gdzie l, m są liczbami kwantowymi całkowitego momentu pędu oraz jego rzutu na oś z.

Zadanie 12 Rozważ cząstkę w stanie opisanym funkcją falową:

$$\psi(\vec{r}) = Ae^{-r/a}e^{2i\varphi}$$

a) Wyznacz stałą normalizacyjną A

b) Znajdź prawdopodobieństwa $P(l,m)$ zmierzenia wartości liczb kwantowych l, m.

Wskazówka: Aby uzyskać ogólny wzór, skorzystaj z funkcji tworzącej wielomianów Legendra: $\frac{1}{\sqrt{1-2sw+s^2}} = \sum_l P_l(w)s^l$.