Mechanika Kwantowa R 2017/2018, Seria 2 - odpowiedzi

Zadanie 1 W obrazie Heisenberga mamy następujące równania:

$$\dot{\hat{x}} = \hat{p}/m \tag{1}$$

$$\dot{\hat{p}} = mg \tag{2}$$

Stąd mamy rozwiązanie: $\dot{\hat{p}}(t) = \dot{\hat{p}}(0) + mgt$, $\hat{x}(t) = \hat{x}(0) + \hat{p}(0)t/m + gt^2/2$ Widzimy, że $\langle x\rangle(t) = \langle x\rangle(0) + \langle p(0)\rangle t/m + gt^2/2 = p_0 t/m + gt^2/2$, $\langle p\rangle(t) = \langle p\rangle(0) + mgt = p_0 + mgt$, a wariancje będą takie same jak w przypadku ewolucji swobodnej.

Zadanie 2 Równania Heisenberga dają nam związki na operatorach takie same jak klasycznie co prowadzi do rozwiązań:

$$\hat{x}(t) = \hat{x}(0)\cos\omega t + \frac{\hat{p}(0)}{m\omega}\sin\omega t \tag{3}$$

$$\hat{p}(t) = \hat{p}(0)\cos\omega t - \hat{x}(0)m\omega\sin\omega t \tag{4}$$

Liczą wariancję w czasie t na stanie gausowskim dostajemy:

$$\Delta^2 x(t) = \sigma^2(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t\frac{\hbar^2}{4m^2\omega^2\sigma^4}).$$

Jeśli dobierzemy $\sigma^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}$ widzimy że $\Delta^2 x(t) = \sigma^2$ i paczka gausowska się nie rozpływa. Tak naprawdę to nieświadomie znaleźliśmy w ten sposób stan własny (podstawowy) oscylatora harmonicznego.

Zadanie 4 Stała normalizacyjna $A = \sqrt{30/a^5}$. Wartości oczekiwane: $\langle x\rangle = a/2$, $\langle p\rangle = 0$, $\Delta^2 x = a^2/28$ $\Delta^2 p = 10\hbar^2/a^2$, $\langle E\rangle = 10\hbar^2/(2ma^2)$. W studni mamy dostępne energie $E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}n^2$ odpowiadające stanom własnym $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(n\pi x/a)$. Rozkładamy stan $\psi(x,0)$ w bazie $\psi_n(x)$: $\psi(x,0) = \sum_n c_n\psi_n(x)$. $c_n = \int_0^a \mathrm{d}x\psi_n^*(x)\psi(x) = \frac{2\sqrt{60}}{\pi^3 n^3}(1-(-1)^n)$. Czyli niezerowe dla n nieparzystych $c_n = \frac{4\sqrt{60}}{\pi^3 n^3}$ (całkujemy przez cześci $\int t\sin t$, $\int t^2\sin t$). Prawdopodobieństwo pomiaru wartości energii E_n: $p_n = |c_n|^2 = 960/(\pi^6 n^6)$ (przy okazaji udowodniliśmy, że $\sum_{1,3,\dots}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{960}$). Stan po czasie t: $\psi(x,t) = \sum_n c_n\psi_n e^{-iE_nt/\hbar}$.

Zadanie 5 W chwili początkowej cząstka znajduje się w stanie $\psi(x,0) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\pi x/a)$. Po rozszerzeniu studni to juz nie jest stan podstawowy i musimy rozłożyć naszą funkcję

$$\psi(x,0) = \begin{cases}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\pi x/a) & x\in[0,a]\\ 0 & \in[a,2a]\end{cases}$$

w bazie stanów własnych poszerzonej studni: $\phi_n(x) = \sqrt{\frac{1}{a}}\sin(\pi nx/2a)$ Szukamy rozkładu $\psi(x,0) = c_n\phi_n(x)$. Znajdujemy $c_n = \int\mathrm{d}x\phi_n^*(x)\psi(x,0) = \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\frac{\sin(n\pi/2)}{4-n^2}$, przy czym $c_2 = 1/\sqrt{2}$. Funkcja falowa po czasie t, $\psi(x,t) = \sum_n c_n\phi_n e^{-iE_nt/\hbar}$, przy czym E_n to energie w nowej studni: $E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{8ma^2}n^2$. Prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w stanie podstawowym nowej studni: $p(E_1) = |c_1|^2 = 32/(9\pi^2) \approx 0.36$. Średnią energię można liczyć $\langle E\rangle = \sum_n |c_n|^2 E_n$ ale po co ... Lepiej bezpośrednio licząc wartość oczekiwaną na Hamiltonianie. Ponieważ energia zalezy tylko od cześci kintetycznej Hamiltonianu, więc po rozszerzeniu studni średnia energia stanu się nie zmieni i wynosi: $\langle E\rangle = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$.

zadanie 6 W przypadku braku potencjału delty mamy rozwiązania symetryczne i antymsymetryczne odpowiednio: $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\cos(xn\pi/a)$ (dla n nieparzystych) i $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(xn\pi/a)$ (dla n parzystych), odpowiadające im energie to: $E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$. Obecność delty powoduje skok pochodnej w punkcie $x = 0$ o $\frac{2m\lambda}{\hbar^2}\psi(0)$. Dla funkcji antysymetrycznych, które w tym punkcie są równe zero obecność potencjału delty nic nie zmieni, więc będą to wciąż poprawne rozwiązania i te energie (n parzyste) się nie zmienią.

Rozważmy więc tylko rozwiązania symetryczne. W tym przypadku funkcja po lewej i prawej strony bariery ma postać:

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{i\alpha x} + Be^{-i\alpha x}, & x < 0 \\ Ae^{-i\alpha x} + Be^{i\alpha x}, & x > 0 \end{cases}$$

gdzie $\alpha = \sqrt{2mE/\hbar^2}$. Warunek zszycia pochodnych uwzględniając skok związany z funkcją delta implikuje

$$-i\alpha A + i\alpha B - i\alpha A + iB\alpha = \frac{2m\lambda}{\hbar^2}(A + B)$$

Warunek znikania funkcji w punktach $x = \pm a/2$ daje warunek:

$$Ae^{-i\alpha a/2} + Be^{i\alpha a/2} = 0$$

Łącząc powyższe dwa równania otrzymujemy:

$$\alpha \cot\left(\frac{\alpha a}{2}\right) = -\frac{m\lambda}{\hbar^2}$$

Co jest jednocześnie warunkiem na dopuszczalne energie. W przypadku braku potencjału $\lambda = 0$ mielibyśmy rozwiązania $\alpha a/2 = n\pi/2$ (dla n nieparzystych) i odtwarzamy znany wynik. Ponieważ funkcja $\alpha \cot \alpha a/2$ jest malejąca z α to dla $\lambda > 0$ dopuszczalne rozwiązania α będą przesunięte do większych wartości w porównaniu z przypadkiem braku potencjału—wyższe energie. W przypadku $\lambda < 0$ energie będą odpowiednio obniżone.

Zadanie 7 Stany związane będą odpowiadać energiom $-V_0 < E \leq 0$. Warunek znikania funkcji w $x = 0$ i zanikania w $x = \infty$ implikuje

$$\psi(x) = \begin{cases} A\sin\alpha x, & x < a \\ Be^{-\beta x}, & x > a \end{cases}$$

gdzie $\alpha = \sqrt{2m(E + V_0)/\hbar^2}$, $\beta = \sqrt{-2mE/\hbar^2}$ Warunki zszycia:

$$A\sin\alpha a = Be^{-\beta a}, \quad \alpha A\cos\alpha a = -\beta Be^{-\beta a}$$

Dostajemy warunek

$$-\alpha\cot\alpha a = \beta = \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2} - \alpha^2}$$

Analizując graficznie rozwiązanie powyższego równania (przecięcie funkcji $\alpha\cot\alpha a$ z fragmentem okręgu o promieniu $\sqrt{2mV_0/\hbar^2}$) wnioskujemy, że nie będzie żadnego stanu własnego wtedy i tylko wtedy gdy $a\sqrt{2mV_0/\hbar^2} < \pi/2$.