

Mechanika Kwantowa R 2017/2018, Seria 4

Zadanie 1 Znajdź stany własne i energie w nieskończonej trójwymiarowej studni potencjału gdzie $V(\vec{r}) = 0$, dla $0 < x < a$, $0 < y < b$, $0 < z < c$, a w pozostałym obszarze $V = \infty$.

Zadanie 2 Cząstka o masie m porusza się w płaszczyźnie xy w polu siły o potencjale:

$$V(x, y) = \frac{k_1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{k_2}{2}(x - y)^2,$$

gdzie k_1, k_2 są pewnymi stałymi dodatnimi. Znaleźć widmo energii cząstki i wypisać postać funkcji własnych odpowiadających poszczególnym energiom. Dla jakich wartości parametrów k_1 i k_2 w widmie pojawi się degeneracja.

Zadanie 3 Rozważ cząstkę w sferycznie symetrycznej skończonej jamie potencjału

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases}.$$

Wyprowadź warunek na istnienie co najmniej jednego stanu związanego. *Wskazówka:* stan o najniższej energii zawsze będzie związany z wartością całkowitego momentu pędu $l = 0$.

Zadanie 4 Cząstka o masie m poruszająca się z zerowym całkowitym momentem pędu jest uwięziona pomiędzy dwoma nieprzenikliwymi sferami o promieniach a i b , czyli:

$$V(r) = \begin{cases} +\infty & \text{dla } r < a \\ 0 & \text{dla } a < r < b \\ +\infty & \text{dla } r > b \end{cases}.$$

- Znajdź poziomy energetyczne i unormowane funkcje falowe.
- Dla stanu o najniższej energii, znajdź średnie położenie cząstki od centrum potencjału oraz odległość najbardziej prawdopodobną

Zadanie 5 Znajdź stany związane o momencie pędu $l = 0$ w potencjale „bańki mydlanej”

$$V(r) = -\lambda\delta(r - R),$$

gdzie $\lambda > 0$. Czy stany związane zawsze istnieją?

Zadanie 6 Rozważ funkcję falową:

$$\psi(r, \theta, \varphi) = A \sin \theta \cos \varphi e^{-\alpha r}.$$

- Znajdź stałą normalizacyjną A
- Zapisz stan cząstki poprzez rozkład na harmoniki sferyczne $Y_{l,m}(\theta, \varphi)$
- Dokonując na cząstce jednoczesnego pomiaru \hat{L}^2 i L_z , jakie wyniki pomiaru i z jakimi prawdopodobieństwami można uzyskać

Zadanie 7 Rozważ dwie cząstki o spinie 1. Skonstruuj bezpośrednio rachunkiem (nie używając wyrażeń na współczynniki Clebscha-Gordana) stany mające dobrze określoną całkowitą wartość spinu oraz rzut całkowitego spinu na oś z .

Zadanie 8 W chwili $t = 0$ atom wodoru znajduje się w stanie:

$$\psi(\vec{r}, t = 0) = \frac{4}{(2a)^{3/2}} \left[e^{-\frac{r}{a}} Y_{0,0} + A \frac{r}{a} e^{-\frac{r}{2a}} \left(-iY_{1,1} + Y_{1,-1} + \sqrt{7}Y_{1,0} \right) \right]$$

gdzie a jest promieniem Bohra.

- Oblicz stałą normalizacyjną A
- Jakie jest prawdopodobieństwo, że w wyniku pomiaru \hat{L}^2 otrzymamy wartość $\hbar^2 l(l+1)$, gdzie $l = 0, 1, 2$
- Jaka jest gęstość prawdopodobieństwa $\rho(r)$, że elektron znajdziemy w odległości r od jądra.
- Dla jakiej wartości r , $\rho(r)$ ma maksimum?
- Zapisz postać funkcji falowej w chwili t .
- Zapisz unormowany stan cząstki w chwili t na której wykonano pomiar L_z dający wynik \hbar .

Zadanie 9 Cząstka znajduje się w stanie kwantowym opisanym następującą funkcją falową:

$$\psi(\vec{r}) = \mathcal{N} e^{-r/a} \left(\frac{z}{r} + i \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{x^2 - y^2}{r^2} \right)$$

Znajdź rozkład prawdopodobieństwa pomiaru $P(l, m)$, gdzie l, m są liczbami kwantowymi całkowitego momentu pędu oraz jego rzutu na oś z .

Zadanie 10 Rozważ cząstkę w stanie opisanym funkcją falową:

$$\psi(\vec{r}) = A e^{-r/a} e^{2i\varphi}$$

- Wyznacz stałą normalizacyjną A
- Znajdź prawdopodobieństwa $P(l, m)$ zmierzenia wartości liczb kwantowych l, m .

Wskazówka: Aby uzyskać ogólny wzór, skorzystaj z funkcji tworzącej wielomianów Legendra: $\frac{1}{\sqrt{1-2sw+s^2}} = \sum_l P_l(w) s^l$.