

Mechanika Kwantowa R 2076/2018, Seria 6

Zadanie 1 Stosując metodę wariacyjną oszacuj energię stanu podstawowego atomu wodoru używając jako funkcji próbnych funkcji Gaussa. Porównaj liczbową wartość otrzymanej energii z wynikiem ścisłym.

Zadanie 2 Cząstka o masie m znajduje się w potencjalnie dwuwymiarowej studni:

$$V(x, y) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a \\ +\infty & \text{pozostałe } x \text{ i } y \end{cases}$$

zaburzonej przez

$$V'(x, y) = \begin{cases} V_0 \cos(\pi x/a) \cos(\pi y/a) & 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a \\ 0 & \text{pozostałe } x \text{ i } y \end{cases}$$

W pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń wyznacz poprawki do energii w stanie podstawowym i pierwszym w zbudzonym.

Zadanie 3 Oddziaływanie pomiędzy trzema oscylatorami harmonicznymi o częstościach ω_a , ω_b i ω_c dane jest hamiltonianem

$$\hat{H}_{\text{int}} = g \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger \hat{c} + h.c.,$$

gdzie $g \in \mathbf{C}$, \hat{a} , \hat{b} , \hat{c} są operatorami anihilacji dla odpowiednich oscylatorów, a " $h.c.$ " oznacza sprzężenie hermitowskie już wypisanych wyrazów. Wyznacz z dokładnością do wyrazów kwadratowych w g poprawki do poziomów energetycznych hamiltonianu bez oddziaływania. Możesz założyć, że częstości oscylatorów dobrane są w taki sposób, że nie występuje degeneracja w hamiltonianie bez oddziaływania.

Zadanie 4 Cząstka o masie m porusza się w jednym wymiarze w polu siły o potencjale $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \alpha x^4$.

- Znajdź poprawkę do energii stanu podstawowego w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń traktując człon αx^4 jako małe zaburzenie.
- Postaraj się poprawić ten wynik (zbliżyć się do prawdziwej wartości) stosując metodę wariacyjną wykorzystując funkcję próbną postaci: $\psi_\lambda(x) = \mathcal{N}_\lambda e^{-\lambda x^2}$, gdzie λ jest parametrem wariacyjnym

Zadanie 5 Rozważ kwantowy układ dwupoziomowy S , o wektorach bazowych $|0\rangle_S, |1\rangle_S$, oraz otoczenie E będące również układem dwupoziomowym przygotowanym w chwili początkowej w stanie $|0\rangle_E$. Efekt oddziaływania układu z otoczeniem reprezentuje ewolucja unitarna, której działanie na wektory bazowe $|i\rangle_S \otimes |0\rangle_E$ ma postać:

$$U|0\rangle_S \otimes |0\rangle_E = |0\rangle_S \otimes |0\rangle_E, \quad U|1\rangle_S \otimes |0\rangle_E = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_S \otimes |1\rangle_E + |1\rangle_S \otimes |0\rangle_E).$$

Założmy, że w chwili początkowej stan układu i otoczenia jest postaci:

$$|\Psi\rangle_{SE} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_S + e^{i\varphi}|1\rangle_S) \otimes |0\rangle_E,$$

gdzie φ jest dowolną fazą

- a) Znajdź końcowy stan $|\Psi'\rangle_{SE}$ powstający w wyniku zadziałania operacją U na stan $|\Psi\rangle_{SE}$.
- b) Znajdź zredukowaną macierz gęstości układu S po oddziaływaniu z otoczeniem
- c) Postaraj się wymyślić jakąś miarę „dekoherencji” stanu S i odpowiedz na pytanie czy stopień dekoherencji stanu układu S zależy od wartości parametru φ .

Zadanie 6 Dla stanu dwóch qubitów postaci

$$\rho = p|\Psi^-\rangle\langle\Psi^-| + \frac{(1-p)}{4}\mathbb{1} \quad (1)$$

gdzie $|\Psi^-\rangle = (|01\rangle - |10\rangle)/\sqrt{2}$, a $\mathbb{1}$ jest macierzą jednostkową zbadaj dla jakich parametrów p będą łamane nierówności Bella, jeśli jako pomiary wybierzesz te które były optymalne w przypadku stanu $|\Psi^-\rangle$ —zastanów się czy faktycznie są optymalne również dla tego stanu.

Zadanie 7 Rozważ dwa spiny $1/2$ przygotowane początkowo w stanie $|+\frac{1}{2}\rangle_z \otimes |+\frac{1}{2}\rangle_z$. Wyobraźmy sobie, że ktoś nam przesyła te spiny, ale nasz układ odniesienia jest zupełnie nie uzgodniony w układem nadawcy—tzn. nasze osie układu współrzędnych są przypadkowo obrócone względem osi nadawcy. Jak matematycznie powinniśmy opisać w tej sytuacji efektywnie stan który otrzymujemy od nadawcy? Uwaga: jeśli myślimy o tym opisie w sensie powtarzania eksperymentu, to przyjmujemy, że przy każdym wysłaniu cząstek, mamy sytuację, w której za każdym razem nasz układ odniesienia doznaje przypadkowego obrotu względem układu nadawcy. Czy istnieje jakakolwiek możliwość przesyłania informacji zakodowanej w stanach spinowych układu w takiej sytuacji?