Mechanika Kwantowa 3/2

Seria 4

do oddania na 04.05.2011

Zadanie 1 Mając stan dwóch podukładów ρ_{AB}, kryterium splątania PPT mówi, że jeśli macierz $\rho_{AB}^{T_B}$ (częściowa transpozycja względem układu B), nie jest dodatnio określona to stan jest splątany. Na ćwiczeniach rozważaliśmy stan dwóch qubitów:

$$\rho = p|\Psi^-\rangle\langle\Psi^-| + \frac{(1-p)}{4}\mathbb{1} \tag{1}$$

gdzie $|\Psi^-\rangle = (|01\rangle - |10\rangle)/\sqrt{2}$ i pokazaliśmy, że dla $p > 1/3$ kryterium PPT mówi, że stan jest splątany. Na podstawie kryterium PPT nie ma natomiast pewności, że dla $p \leq 1/3$ stan jest separowalny. [1]

Żeby to pokazać można po prostu dla $p \leq 1/3$ spróbować jawnie napisać rozkład stanu ρ_{AB} na stany produktowe i wtedy mamy już kompletne rozwiązanie. Postaraj się znaleźć taki rozkład.

Wskazówka. Najpierw udowodnij, że trzy stany postaci

$$\rho_i = \frac{1}{4}\left(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} - \sigma_i \otimes \sigma_i\right), \tag{2}$$

gdzie σ_i są trzema macierzami Pauliego, są separowalne pisząc ich jawny rozkład na mieszankę stanów produktowych. Potem zmierz się z przypadkiem $p = 1/3$ a następnie z $p < 1/3$.

Zadanie 2 (obowiązkowe) Łamanie nierówności Bella można traktować jako kryterium splątania. Wiemy, że kryterium PPT w pełni pozwala nam opisać zakres wartości parametru p dla którego stan postaci:

$$\rho = p|\Psi^-\rangle\langle\Psi^-| + \frac{(1-p)}{4}\mathbb{1} \tag{3}$$

jest splątany a dla jakich p jest separowalny.

Na zajęciach pokazane było, że stan $|\Psi^-\rangle$ maksymalnie łamie nierówność Bella dając wynik $|C| = 2\sqrt{2}$. Zbadaj dla jakich p stan ρ będzie łamał nierówność Bella. Czy nierówności Bella są równie dobrym kryterium splątania co PPT?

Zadanie 3 Rozważmy ewolucję układu otwartego w postaci Krausa:

$$\Lambda(\rho) = \sum_i K_i \rho K_i^\dagger \tag{4}$$

Udowodnij, że operatory Krausa nie są zdefiniowane jednoznacznie i że tę samą ewolucję możemy zapisać używając innych operatorów Krausa $K_i' = \sum_j U_{ij} K_j$, gdzie U - macierz unitarna.

---

[1] Dla dwóch qubitów okazuje się, że kryterium PPT daje taką pewność, ale my tego nie udowodniliśmy, więc udajemy, że o tym nie wiemy.

Zadanie 4 Rozważ model emisji spontanicznej atomu dwupoziomowego, w którym ewolucja opisana jest za pomocą dwóch operatorów Krausa [2]:

$$K_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{e^{-\gamma t}} \end{pmatrix}, \quad K_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1-e^{-\gamma t}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Rozwiń powyższe operatory w najniższym rzędzie w t i sprawdź czy operatory są takiej postaci jaka jest wymagana do zapisanie równania Kossakowskiego-Lindblada. Jeśli warunek jest spełniony zapisz to równanie.

Zadanie 5 (obowiązkowe) Rozważmy model eksperymentu Sterna-Gerlacha w którym atom o spinie $1/2$ i momencie magnetycznym μ porusza się w kierunku x przelatując przez obszar pola magnetycznego skierowanego w kierunku z, zmieniającego się liniowo w tym kierunku [3]: $\vec{B}(z) \approx (B_0 + kz)\hat{e}_z$. Przyjmijmy, że atom oddziałuje z polem magnetycznym oddziaływaniem danym Hamiltonianem

$$H = -\mu\vec{\sigma}\vec{B} = -\mu\sigma_z(B_0 + kz), \tag{6}$$

przy czym oddziaływanie trwa czas δt, w którym to czasie przyjmujemy, ze atom czuje wciąż takie samo pole magnetyczne B.

Niech stan początkowy atomu będzie postaci: $|\Psi(0)\rangle = |s\rangle \otimes |\varphi\rangle_z$, gdzie $|s\rangle = a| + \frac{1}{2}\rangle + b| - \frac{1}{2}\rangle$ jest ogólnym stanem spinowym atomu, natomiast $|\varphi\rangle_z$ opisuje przestrzenne stopnie swobody atomu w kierunku osi z (dla uproszczenia pomijamy kwantowy opis kierunków x,y. Kierunek y jest nieistotny, a w kierunku x mówimy po prostu, że cząstka przelatuje przez urządzenie pomiarowe.). Przyjmijmy, że $|\varphi\rangle_z$ jest stanem Gaussowskim postaci (używamy reprezentacji pędowej):

$$|\varphi\rangle_z = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} \int \mathrm{d}p\, e^{-p^2/(4\sigma^2)} |p\rangle \tag{7}$$

a) Znajdź stan końcowy $|\Psi(\delta t)\rangle$, czyli stan atomu po przejściu przez urządzenie (pomiń ewolucję swobodną w przestrzennych stopniach swobody, uwzględnij jedynie Hamiltonian oddziaływania. Dla uproszczenia możesz również przyjąć $B_0 = 0$).

b) Oblicz zredukowaną spinową macierz gęstości — tzn. stan atomu po wyśladowaniu po przestrzennych stopniach swobody

c) Jakie parametry odpowiedzialne są stopień dekoherencji stanu spinowego — postaraj się dać intuicyjne wytłumaczenie.

[2] Zwróć uwagę, że postać operatorów Krausa jest analogiczna do tego co uzyskaliśmy na ćwiczeniach dla modelu atomu dwupoziomowego sprzężonego z jednym modem pola e-m. Jedyna różnica to inna zależność czasowa elementów macierzowych operatorów Krausa, która wynika z tego, że do wyprowadzenia emisji spontanicznej uwzględnia się całe continuum modów

[3] To jest przybliżenie, bo takie pole nie spełniałoby równania Maxwella $\mathrm{div}\vec{B} = 0$, czyli musi coś się dziać też w innych kierunkach...