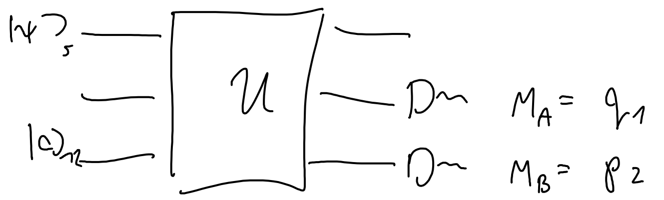
Pomiar laczny p i q

21 października 2012
10:28

Przykład Jednoczesny pomiar położenia i pędu

Trzy cząstki $\hat{q}_s, \hat{p}_s,\ \hat{q}_1, \hat{p}_1,\ \hat{q}_2, \hat{p}_2$

$$\mathcal{U} = e^{-\frac{i}{\hbar}\left(\hat{q}_s \hat{p}_1 - \hat{p}_s \hat{q}_2\right)} \qquad A = q_s \quad B = p_s$$



Potrzebujemy tylko $M_A^{out} = \mathcal{U}^\dagger q_1 \mathcal{U} = q_s + \overbrace{q_1 - \frac{1}{2} q_2}^{q^M}$

$$M_B^{out} = \mathcal{U}^\dagger p_2 \mathcal{U} = p_s + \overbrace{p_2 - \frac{1}{2} p_1}^{p^M}$$

$$e^{\frac{i}{\hbar}(q_s p_1 - p_s q_2)} q_1 e^{-\frac{i}{\hbar}(q_s p_1 - p_s q_2)} = q_1 + q_s - \frac{1}{2} q_2 \qquad \text{ok}$$

$N_A = q_M$, $N_B = p_M$ widać że $[N_A, B^{in}] = [N_B, A^{in}] = 0$

Czyli $\delta q \cdot \delta p \geq \frac{\hbar}{2}$

Rozrzut wyników pomiaru położeń i pędów: mierzymy jako

$$\sigma_q^{joint} \sigma_p^{joint} = \sigma_{M_A} \sigma_{M_B} = \sqrt{\sigma_{q1}^2 + \sigma_{qs}^2}\sqrt{\sigma_{p1}^2 + \sigma_{ps}^2}$$
$$\geq 2\sqrt{\sigma_{q1}\sigma_{p1}} \cdot \sqrt{\sigma_{qs}\sigma_{ps}} \geq \hbar$$

$$\boxed{\sigma_q^{joint} \sigma_p^{joint} \geq \hbar}$$

Żeby osiągnąć dolną granicę musimy wziąć stan o minimalnych szumach q_M i p_M.

Jaki jest pomiar uogólniony odp. temu schematowi?

$\Pi_{q,p}$ t. że $p(q,p) = \langle\psi|\Pi_{q,p}|\psi\rangle$

Przyjmujemy że $|0\rangle_n$ - stan gaussowski dla modu q_M, p_M

$$|0\rangle = \int dq\, e^{-\frac{q^2}{4\sigma_q^2}} \frac{1}{(2\pi\sigma_q^2)^{\frac14}} |q\rangle =$$

$$\int dp\, e^{-\frac{p^2}{4\sigma_p^2}} \frac{1}{(2\pi\sigma_p^2)^{\frac14}} |p\rangle \qquad \sigma_q \cdot \sigma_p = \frac{\hbar}{2}$$

np $\sigma_q = \frac{1}{\alpha\sqrt{2}}$ $\quad \alpha^2 = \frac{m\omega}{\hbar}$ $\quad \sigma_q = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$, $\sigma_p = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}$

stan podstawowy osc. harmonicznego

Średnie przyjmujemy $\langle \hat q\rangle = \langle \hat p\rangle = 0$ i wszystkie zaczną zmierzać

Dla uproszczenia przeskalujmy $\quad \tilde q = \underbrace{q\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}}_{\text{bezwymiarowe}} \quad \tilde p = \underbrace{\sqrt{\frac{1}{\hbar m\omega}}\, p}_{\text{bezwymiarowe}}$

$[\tilde q, \tilde p] = i \qquad \sigma_{\tilde q} = \sigma_{\tilde p} = \frac{1}{\sqrt2}$ $\quad$ } dalej opuszczamy tyldy

Przypominamy stany koherentne: $\quad \left\{ e^{A+B} = e^A \cdot e^B \cdot e^{-\frac12 [A,B]} \right.$

$$|0\rangle = \frac{1}{\pi^{\frac14}} \int dq'\, e^{-\frac{q'^2}{2}} |q'\rangle$$

$$|(q,p)\rangle = e^{i(p\hat q - q\hat p)}|0\rangle = \frac{1}{\pi^{\frac14}}\int e^{ipq'} e^{-iq\hat p} e^{\frac{i}{2}qp} e^{-\frac{q'^2}{2}} |q'\rangle$$

$$= \frac{1}{\pi^{\frac14}} \int e^{ipq'} e^{-\frac{q'^2}{2}} |q'+q\rangle = \frac{e^{-\frac{i}{2}qp}}{\pi^{\frac14}} \int e^{ipq'} e^{-\frac{(q'-q)^2}{2}}$$

$$|(q,p)\rangle = \frac{e^{-\frac{iqp}{2}}}{\pi^{\frac14}} \int dq'\, e^{-\frac{(q'-q)^2}{2}} e^{ipq'} |q'\rangle$$

przesunęliśmy stan podstawowy tak że $\langle \hat q\rangle = q \qquad \langle \hat p\rangle = p$

stan własny: $\quad \hat a = \frac{1}{\sqrt2}(\hat q + i\hat p)$

$$\hat a\, |(q,p)\rangle = \frac{1}{\sqrt2}(q + ip)\, |(q,p)\rangle$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt2}(q+ip)$$

$$e^{i(p\hat q - q\hat p)} = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} \qquad [a, a^\dagger] = 1$$

$$\langle \alpha' | \alpha\rangle = \langle 0| e^{\alpha'^* a - \alpha' a^\dagger} e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} |0\rangle =$$

$$= e^{-\frac12|\alpha'|^2 - \frac12|\alpha|^2} \langle 0| e^{\alpha'^* a} e^{\alpha a^\dagger}|0\rangle = e^{-\frac12(|\alpha|^2 + |\alpha'|^2) + \alpha'^*\alpha}$$

$$= e^{-\frac14(q^2+p^2+q'^2+p'^2) + \frac12(qq' + pp' - iqp' + iq'p)}$$

$$\Pi_{q,p} = {}_{12}\langle a|c\; U^{\dagger}\; \mathbb{1}_s \otimes |q\rangle\langle q|_1 \otimes |p\rangle\langle p|_2\; U\; |a\rangle_{12} =$$

$$\begin{cases} |q\rangle\langle q| = \frac{1}{2\pi}\int dk\; e^{i(q-\hat q)k} \\ |p\rangle\langle p| = \frac{1}{2\pi}\int dl\; e^{i(p-\hat p)l} \end{cases} \qquad \langle q'|q\rangle\langle q|q''\rangle = \delta_{q'q''} \quad \text{ok}$$

$$\Pi_{q,p} = {}_{12}\langle a|\, U^{\dagger} \int\frac{dk}{2\pi}\, e^{i(q-\hat q_1)k}\; U U^{\dagger} \int e^{i(p-\hat p_2)l}\,\frac{dl}{2\pi}\; U\,|a\rangle_{12}$$

$$= \int\frac{dk\,dl}{(2\pi)^2}\; {}_{12}\langle a|\; e^{i(q-\hat q_s \underbrace{-\hat q_1+\frac12\hat q_2}_{\hat q_M})k}\; e^{i(p-\hat p_s \underbrace{-\hat p_2+\frac12\hat p_1}_{-\hat p_M})l}\; |a\rangle_{12}$$

$$= \int\frac{dk\,dl}{(2\pi)^2}\; e^{i(q-\hat q_s)k}\; e^{i(p-\hat p_s)l}\; \langle (a,k)|(l,a)\rangle \;,$$

$$= \int\frac{dk\,dl}{(2\pi)^2}\; e^{i(q-\hat q_s)k}\; e^{i(p-\hat p_s)l}\; e^{-\frac14(k^2+l^2)-\frac12 ikl} =$$

$$= \int\frac{dk\,dl}{(2\pi)^2}\,dq_s\; e^{i(q-q_s)k-\frac14(k^2+l^2)-\frac12 ikl+ipl}\; |q_s\rangle\langle q_s+l|$$

$$= \int dk\; e^{-\frac14 k^2+i(q-q_s-\frac12 l)k} \qquad \text{—||—} \qquad =$$

$$= \sqrt{4\pi}\int\frac{dl\,dq_s}{(2\pi)^2}\; e^{-(q-q_s-\frac12 l)^2-\frac14 l^2+ipl}\; |q_s\rangle\langle q_s+l|$$

$$q_s \to q_s \qquad l \to l-q_s$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}}\int e^{-(q-\frac12 q_s-\frac12 l)^2-\frac14(l-q_s)^2+ip(l-q_s)}\; |q_s\rangle\langle l|\; dq_s\,dl$$

$$= e^{-q^2-\frac14(l+q_s)^2+q(q_s+l)-\frac14(l-q_s)^2+ip(l-q_s)}\; |q_s\rangle\langle l|$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}}\; \underbrace{\int \langle l|\, e^{-\frac12 q^2-\frac12 l^2+ql+ipl}\, dl}_{\pi^{\frac14}\langle(q,p)|}\; \underbrace{\int \dots |q_s}_{\pi^{\frac14}|(q,p)\rangle}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\; |(q,p)\rangle\langle(q,p)|$$

$$\Pi_{q,p} = \frac{1}{2\pi} |(q,p)\rangle\langle(q,p)|$$

Czyli $p(q,p) = \frac{1}{2\pi} \langle(q,p)| \rho |(q,p)\rangle = Q(q,p)$

funkcja Husimi. Mamy jej interpretację

Tj. rozkład prawdop. w optymalnym joint-measurement

.