

Kwantowa Teoria Pomiaru i Estymacji

Seria 1

do oddania na 14.10.2016

Zadanie 1 (2 pkt) Niech macierz gęstości ρ_{AB} opisująca stan dwóch qubitów, zapisana w bazie $|0\rangle \otimes |0\rangle$, $|0\rangle \otimes |1\rangle$, $|1\rangle \otimes |0\rangle$, $|1\rangle \otimes |1\rangle$ wygląda następująco:

$$\rho_{AB} = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{5}{12} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Znajdź zredukowane macierze gęstości ρ_A , ρ_B . Podczas obliczeń zastanów się nad ogólnym praktycznym i szybkim przepisem na liczenie zredukowanych macierzy gęstości.

Zadanie 2 (4 pkt) Ogólny stan dwuwymiarowego układu kwantowego (qubit) możemy zapisać jako

$$|\psi_{\theta,\varphi}\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + \exp(i\varphi)\sin(\theta/2)|1\rangle \quad (2)$$

gdzie $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ a $|0\rangle$, $|1\rangle$ są wektorami ortogonalnymi. Tym samym stan qubit można wyobrazić sobie jako punkt na sferze, tzw. sferze Blocha.

Rozważ następujący zestaw operatorów sparametryzowanych θ, φ :

$$\Pi_{\theta,\varphi} = c|\psi_{\theta,\varphi}\rangle\langle\psi_{\theta,\varphi}|, \quad (3)$$

gdzie c pewna stała normalizacyjna niezależna od θ, φ .

- Czy zestaw operatorów $\Pi_{\theta,\varphi}$ można traktować jako operatory przedstawiające pewien pomiar uogólniony? Jeśli tak to ile wynosi wartość stałej c . Uwaga: przyjmujemy domyślną miarę w całkowaniu po sferze $d\theta d\varphi \sin\theta$.
- Stosując powyższy pomiar uogólniony podaj gęstość rozkładu prawdopodobieństwa wyniku pomiaru (θ, φ) jeśli pomiarowi został poddany stan $|0\rangle$. Ten rozkład na sferze Blocha możemy traktować jako reprezentację "informacji" na ile dobrze jesteśmy w stanie zidentyfikować nieznaną stan qubit dysponując jego jedną kopią.

Zadanie 3 (4 pkt) Rozważ operację unitarną U reprezentującą oddziaływanie qubit (S) z "urządzeniem pomiarowym" (M) w postaci:

$$U|m\rangle_S \otimes |0\rangle_M = \frac{1}{2}|m\rangle_S \otimes |0\rangle_M (\sqrt{2-p} + (-1)^m \sqrt{p}) + \frac{1}{2}|m\rangle_S \otimes |1\rangle_M (\sqrt{2-p} - (-1)^m \sqrt{p}) \quad (4)$$

gdzie $m = 0, 1$ reprezentuje bazę qubit, a parametr $0 \leq p \leq 1$ odpowiada za „siłę oddziaływania”.

- a) Zapisz za pomocą operatorów Krausa (czyli operatorów K_i wprowadzonych na wykładzie) efektywną ewolucję ogólnego stanu qubitów S pod wpływem takiego oddziaływania w sytuacji gdy nie obserwujemy konkretnego wyniku pomiaru tylko uśredniamy po wszystkich możliwych wynikach – czyli liczymy $\rho_S^{\text{out}} = \sum_i K_i \rho_S K_i^\dagger$. Zinterpretuj ewolucję stanu w języku transformacji kuli Blocha, gdzie ogólny stan mieszany qubitów możemy sparametryzować za pomocą trójwymiarowego wektora \vec{n} : $\rho = 1/2(\mathbb{1} + \vec{\sigma} \cdot \vec{n})$, gdzie $|\vec{n}| \leq 1$, a $\vec{\sigma}$ jest wektorem złożonym z macierzy Pauliego.
- b) Podaj operatory pomiarowe Π_0, Π_1 działające na układzie S odpowiadające zmierzeniu “urządzenia pomiarowego” w stanach $|0\rangle_M, |1\rangle_M$.
- c) Rozważ ogólny stan qubitów $|\psi\rangle$ sparametryzowany za pomocą kątów θ, φ na sferze Blocha. Podaj prawdopodobieństwa wyników pomiarów odpowiadających operatorom pomiarowym Π_0, Π_1 oraz podaj końcowe stany qubitów w zależności od wyniku pomiaru.