Kwantowa Teoria Pomiaru i Estymacji

Seria 10

do oddania na 20.01.2017

Zadanie 1 (5 pkt) Na wykładzie wyprowadzając optymalną strategię Bayesowską estymacji fazy dla N równoległych kanałów otrzymaliśmy wynik, że minimalny koszt Bayesowski wyraża się wzorem:

$$\overline{\Delta^2\varphi} = 2\left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{N+2}\right)\right]$$

. Przy wyprowadzeniu założyliśmy, że optymalny pomiar kowariantny zadany jest przez $\Pi_0 = |e\rangle\langle e|$, gdzie w notacji obsadzeniowej $|e\rangle = \sum_{n=0}^{N} |n, N-n\rangle$. Udowodnij, że rzeczywiście mieliśmy prawo na tego typu założenie, tzn udowodnij, że

$$\min_{\Pi_0,|\Psi\rangle} \langle\Psi| \int \mathrm{d}\varphi\, U_\varphi^\dagger \Pi_0 U_\varphi \sin^2(\varphi/2)|\Psi\rangle \geq \min_{|\Psi\rangle} \langle\Psi| \int \mathrm{d}\varphi\, U_\varphi^\dagger |e\rangle\langle e| U_\varphi \sin^2(\varphi/2)|\Psi\rangle.$$

Wskazówka. Skorzystaj z faktu, że $\Pi_0 \geq 0$, a to w połączeniu z tym, że wiemy że na diagonali musi mieć 1 prowadzi do wniosku, że wartości bezwzględne wyrazów pozadiagonalnych nie mogą być większe niż 1. Zwróć też uwagę, że bez utraty optymalności możemy ograniczyć się do dodatnich współczynników c_n, rozważając ogólny stan $|\Psi\rangle = \sum_n c_n |n, N-n\rangle$.

Zadanie 2 (5 pkt) Wyprowadzając optymalną strategię Bayesowską estymacji fazy dla N równoległych kanałów, otrzymaliśmy, że optymalny stan ma postać:

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=0}^{N} c_n |n, N-n\rangle, \quad \text{gdzie } c_n = \sqrt{\frac{2}{N+2}} \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{N+2}\right). \tag{1}$$

Wiemy, że robiąc estymację Bayesowską i używając stanu N00N, $|\Phi_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|N,0\rangle + |0,N\rangle)$, nie uzyskalibyśmy nic ciekawego z uwagi na to, że stan N00N nie jest w stanie rozróżniać faz różniących się o wielokrotności $2\pi/N$. Rozważmy jednak następujący stan, który jest iloczynem tensorowym stanów N00N o liczbach fotonów będących kolejnymi potęgami 2:

$$|\Psi_{\mathrm{Kitaev}}\rangle = \bigotimes_{k=0}^{K=\log_2(N+1)-1} |\Phi_{2^k}\rangle, \tag{2}$$

przy czym zakładamy, że $K = log_2(N+1)$ jest liczbą naturalną. Zwróć uwagę, że w sumie wykorzystujemy N cząstek. Stan ten pojawia się w tzw. algorytmie estymacji fazy Kitaeva, który jest ważnym elementem kwantowego algorytmu Shora rozkładu liczby na czynniki pierwsze. Dla tego stanu nie pojawia się już problem niejednoznaczności estymowanej fazy i wraz ze zwiększaniem N będziemy mogli estymować fazę coraz dokładniej. Sprawdź jak będzie zachowywał się minimalny koszt Bayesowski dla tego stanu. Porównaj, ze strategią nie wykorzystującą w ogóle splątania cząstek. *Wskazówka.* Wygodnie jest używać notacji, $|i_0\rangle \otimes \cdots \otimes |i_K\rangle$, gdzie $i_k \in \{0,1\}$ i stan $|i_k = 0\rangle$ oznacza stan $|0, 2^k\rangle$ a stan $|i_k = 1\rangle$ oznacza stan $|2^k, 0\rangle$ w ramach przestrzeni w której żyje k-ty stan N00N. Zwróć uwagę, że wtedy $U_\varphi^{\otimes N}|i_0\rangle \otimes \cdots \otimes |i_K\rangle = e^{\mathrm{i}\varphi 2^0 i_0}|i_0\rangle \otimes \cdots \otimes e^{\mathrm{i}\varphi 2^K i_K}|i_K\rangle$. Załóż, że optymalny pomiar kowariantny jest postaci $\Pi_0 = |f\rangle\langle f|$, gdzie $|f\rangle = \sum_{i_0,\ldots,i_K=0}^{1} |i_0\rangle \otimes \cdots \otimes |i_K\rangle$ (jeśli potrafisz udowodnij to).