

# Kwantowa Teoria Pomiaru i Estymacji

## Seria 8

do oddania na 22.12.2016

**Zadanie 1** Udowodniliśmy na wykładzie, że optymalna Bayesowska strategia estymacji parametru  $\varphi$  dysponując  $N$  egzemplarzami stanu  $|\psi_\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + \exp(i\varphi)|1\rangle)$  i zakładając brak wiedzy a priori prowadzi do minimalnego średniego kosztu:

$$\bar{C}_{\text{opt}}^{(N)} = 2 - \frac{1}{2^{N-1}} \sum_{n=1}^N \sqrt{\binom{N}{n} \binom{N}{n-1}}, \quad (1)$$

gdzie przyjęta funkcja kosztu miała postać  $C(\varphi, \tilde{\varphi}) = 4 \sin^2[(\varphi - \tilde{\varphi})/2]$ .

Ponieważ optymalna strategia wymaga użycia w ogólności pomiarów kolektywnych na wielu cząstkach, chcielibyśmy ją porównać z tym co moglibyśmy osiągnąć wykonując proste pomiary na pojedynczych cząstkach i stosując prostą strategię estymacji bazującą na estymatorze największej wiarygodności. W tym celu rozważ następującą strategię estymacji:

- a) Wykonujemy pomiar na pojedynczej cząstce opisany 4-ma operatorami pomiarowymi:  $\Pi_0 = \frac{1}{2}|+\rangle\langle+|$ ,  $\Pi_1 = \frac{1}{2}|-\rangle\langle-|$ ,  $\Pi_2 = \frac{1}{2}|+i\rangle\langle+i|$ ,  $\Pi_3 = \frac{1}{2}|-i\rangle\langle-i|$ , gdzie  $|\pm\rangle = (|0\rangle \pm |1\rangle)/\sqrt{2}$ ,  $|\pm i\rangle = (|0\rangle \pm i|1\rangle)/\sqrt{2}$ . Można myśleć o tym pomiarze uogólnionym jako wykonaniu z prawdopodobieństwem  $1/2$  pomiaru w bazie  $|+\rangle$ ,  $|-\rangle$ , a z prawdopodobieństwem  $1/2$  pomiar w bazie  $|+i\rangle$ ,  $|-i\rangle$ . Pomiar jest wykonywany kolejno na  $N$  cząstkach. W ten sposób uzyskamy pewien ciąg wyników pomiarów  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_N)$ , gdzie  $x_i \in \{0, 1, 2, 3\}$ .
- b) Na podstawie wyników  $\vec{x}$  estymujemy fazę  $\tilde{\varphi}$  metodą największej wiarygodności.
- c) Chcemy porównać skuteczność tej strategii do strategii optymalnej. W tym celu wybieramy sobie pewną prawdziwą wartość fazy  $\varphi$ , wykonujemy powyższe dwa podpunkty np. 1000 razy, i dla każdej realizacji liczymy funkcję kosztu  $C(\varphi, \tilde{\varphi})$ . Ponieważ zależy nam na porównaniu z estymacją Bayesowską w której rozkład a priori jest płaski  $p(\varphi) = 1/2\pi$ , powtarzamy te procedurę dla różnych wartości  $\varphi$  (np. 30 różnych wartości chyba powinno wystarczyć) równomiernie rozłożonych na odcińku  $[0, 2\pi]$ . Liczymy średni uzyskany koszt  $C^{(N)}$ .
- d) Powtarzamy powyższą procedurę dla różnych  $N$  i obserwujemy kiedy nastąpi zbieganie to optymalnej wartości kosztu. Wiemy, że powinno nastąpić bo asymptotycznie koszt optymalnej strategii zachowuje się jak  $1/N$  a to wiemy, z analizy opartej o inf. Fishera, asymptotycznie da się wysycić prostymi pomiarami. Ciekawe będzie stwierdzenie dla jakiego  $N$  przewaga strategii optymalnej jest największa w stosunku do strategii prostej (tzn.  $C^{(N)}/C_{\text{opt}}^{(N)}$ ) będzie największe