Kwantowa Teoria Pomiaru i Estymacji

Seria 4

do oddania na 23.11.2012

Zadanie 1 (4 pkt) - dopasowanie prostej Rozważ model probabilistyczny, w którym obserwowane jest N niezależnych zmiennych losowych x_n, $(n = 0, \dots, N-1)$, gdzie $x_n \sim \mathcal{N}(an + b, \sigma^2)$ (zależność liniowa + szum gaussowski).

a) Zapisz macierz Fishera odpowiadającą zagadnieniu estymacji dwu-parametrowej w której staramy się wyestymować parametry prostej a i b.

b) Zapisz dolne ograniczenie wynikające z nierówności Cramera-Rao na najmniejszą możliwą niepewność estymacji $\Delta\tilde{a}$ i $\Delta\tilde{b}$. Który z parametrów jest "łatwiejszy" do wyestymowania?

c) Podaj estymatory wysycające tę nierówność. Sprawdź czy to te same estymatory, które wynikają z zastosowanie heurystycznej metody najmniejszych kwadratów

Zadanie 2 (6 pkt) - estymator największej wiarygodności Rozważ N niezależnych realizacji $(i = 0, \dots, N-1)$ dwuwartościowej zmiennej losowej $x_i \in \{0, 1\}$, gdzie $p(x_i = 0) = p$, $p(x_i = 1) = 1 - p$. Rozważ zagadnienie estymacji parametru p. Zwróć uwagę, że interesować nas będzie tylko liczba zer i jedynek uzyskanych w N realizacjach a nie kolejność w jakiej występowały.

a) Co mówi nierówność Cramera-Rao na temat najlepszej możliwej precyzji estymacji p

b) Czy nierówność Cramera-Rao da się wysycić dla skończonego N? Jaki jest optymalny estymator?

c) Czy w związku z tym rozważany rozkład prawdopodobieństwa należy do wykładniczej rodziny rozkładów prawdopodobieństwa (patrz zadanie 4 seria 3)

d) Wyobraź sobie, że w istocie $p = \sin^2(\theta/2)$, gdzie $\theta \in [0, \pi]$ i interesuje nas estymacja parametru θ, a nie po prostu p. Wyprowadź ograniczenie Cramera-Rao na $\Delta\tilde{\theta}$

e) Okazuje się (sprawdź), że tym razem nie istnieje estymator φ wysycający ograniczenie Cramera-Rao dla skończonego N? Możemy jednak spróbować zastosować numerycznie metodę estymatora największej wiarygodności w celu estymowania θ. Zrób co następuje:

- Napisz program generujący N realizacji zmiennej losowej x_i, t.że $p(x_i = 0) = \sin^2(\theta/2)$, $p(x_i = 1) = \cos^2(\theta/2)$, dla pewnego ustalonego θ (np. $\pi/3$, $\pi/2$, $2/3\pi$) i N (np. $N = 10$). Takie N realizacji nazwiemy *pojedynczym eksperymentem*
- Wygeneruj dane dla k ($k \approx 1000$, albo więcej) eksperymentów
- Dla każdego z eksperymentów znajdź estymator największej wiarygodności $\tilde{\theta}_{\mathrm{ML}}$
- Wykonaj histogram uzyskanych wartości estymatorów i oblicz rozrzut (odchylenie standardowe) - będzie to dobre przybliżenie niepewności estymacji $\Delta\tilde{\theta}$. Porównaj z ograniczeniem Cramera-Rao

- Powtórz powyższe kroki dla różnych N, np w przedziale od 1 do 10000 (oczywiście nie dla wszystkich N tylko co któreś...). Narysuj wykres: precyzja estymatora w funkcji N nałożone na ograniczenie Cramera-Rao i oceń na oko kiedy estymator największej wiarygodności zacznie asymptotycznie wysycać nierówność Cramera-Rao (np. przyjmując kryterium, że będzie wysycać gdy niepewność estymatora będzie się różnić nie bardziej niż 1% od ograniczenia Cramera-Rao). Najlepiej rysować $\Delta\tilde{\theta}\sqrt{N}$, zamiast $\Delta\tilde{\theta}$, i porównywać z ograniczeniem Cramera-Rao dla pojedynczej realizacji żeby wszystko nie spadało na wykresie do zera.