

Kwantowa Teoria Pomiaru i Estymacji

Seria 5

do oddania na 30.11.2012

Zadanie 1 (5 pkt) Rozważ model probabilistyczny, w którym obserwowane jest N niezależnych zmiennych losowych x_n , ($n = 1, \dots, N$), t.j. $x_i \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$. Stosując podejście Bayesowskie i przyjmując, że rozkład a priori θ jest dany jako $\theta \sim \mathcal{N}(\mu_\theta, \sigma_\theta^2)$, znajdź rozkład aposteriori $p(\theta|x_1, \dots, x_N)$ przyjmując, że zaobserwowano dane (x_1, \dots, x_N) . Znajdź optymalny estymator Bayesowski i jego wariancję.

Zadanie 2 (5 pkt) Rozważmy estymację Bayesowską z inną funkcją kosztu niż średnie odchylenie kwadratowe. W sytuacji gdy estymujemy fazę (lub inny parametr kątowy), czyli $\theta \in [0, 2\pi]$ bardziej praktyczna jest funkcja kosztu postaci $C(\theta, \tilde{\theta}) = 4 \sin^2\left(\frac{\theta - \tilde{\theta}}{2}\right)$, która dla małych różnic θ i $\tilde{\theta}$ jest równoważna wariancji ale respektuje fakt, że różnica w fazie 2π nie jest istotna. Niech średni koszt będzie dany przez:

$$\bar{C} = \int d\theta dx \, 4 \sin^2\left(\frac{\theta - \tilde{\theta}(x)}{2}\right) p(x|\theta)p(\theta) \quad (1)$$

- a) Znajdź ogólną postać optymalnego estymatora Bayesowskiego dla tej funkcji kosztu
- b) Przyjmując, taki model statystyczny jak w zadaniu 1, znajdź optymalny estymator dla tej funkcji kosztu.