Kwantowa Teoria Pomiaru i Estymacji

Seria 8

do oddania na 21.12.2012

Zadanie 1 (10 pkt) Udowodniliśmy na wykładzie, że optymalna Bayesowska strategia estymacji parametru φ dysponując N egzemplarzami stanu $|\psi_\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + \exp(\mathrm{i}\varphi)|1\rangle)$ i zakładając brak wiedzy a priori prowadzi do minimalnego średniego kosztu:

$$\bar{C}_{\mathrm{opt}}^{(N)} = 2 - \frac{1}{2^{N-1}} \sum_{n=1}^{N} \sqrt{\binom{N}{n}\binom{N}{n-1}}, \tag{1}$$

gdzie przyjęta funkcja kosztu miała postać $C(\varphi, \tilde{\varphi}) = 4\sin^2[(\varphi - \tilde{\varphi})/2]$.

Ponieważ optymalna strategia wymaga użycia w ogólności pomiarów kolektywnych na wielu cząstkach, chcielibyśmy ją porównać z tym co moglibyśmy osiągnąć wykonując proste pomiary na pojedynczych cząstkach i stosując prostą strategię estymacji bazującą na estymatorze największej wiarygodności. W tym celu rozważ następującą strategię estymacji:

a) Wykonujemy pomiar na pojedynczej cząstce opisany 4-ma operatorami pomiarowymi: $\Pi_0 = \frac{1}{2}|+\rangle\langle+|$, $\Pi_1 = \frac{1}{2}|-\rangle\langle-|$, $\Pi_2 = \frac{1}{2}|+\mathrm{i}\rangle\langle+\mathrm{i}|$, $\Pi_3 = \frac{1}{2}|-\mathrm{i}\rangle\langle-\mathrm{i}|$, gdzie $|\pm\rangle = (|0\rangle \pm |1\rangle)/\sqrt{2}$, $|\pm\mathrm{i}\rangle = (|0\rangle \pm \mathrm{i}|1\rangle)/\sqrt{2}$,. Można myśleć o tym pomiarze uogólnionym jako wykonaniu z prawdopodobieństwem $1/2$ pomiaru w bazie $|+\rangle$, $|-\rangle$, a z prawdopodobieństwem $1/2$ pomiar w bazie $|+\mathrm{i}\rangle$, $|-\mathrm{i}\rangle$. Pomiar jest wykonywany kolejno na N cząstkach. W ten sposób uzyskamy pewien ciąg wyników pomiarów $\vec{x} = (x_1, \dots, x_N)$, gdzie $x_i \in \{0, 1, 2, 3\}$.

b) Na podstawie wyników $\vec{x}$ estymujemy fazę $\tilde{\varphi}$ metodą największej wiarygodności.

c) Chcemy porównać skuteczność tej strategii do strategii optymalnej. W tym celu wybieramy sobie pewną prawdziwą wartość fazy φ, wykonujemy powyższe dwa podpunkty np. 1000 razy, i dla każdej realizacji liczymy funkcję kosztu $C(\varphi, \tilde{\varphi})$. Ponieważ zależy nam na porównaniu z estymacją Bayesowską w której rozkład a priori jest płaski $p(\varphi) = 1/2\pi$, powtarzamy te procedurę dla różnych wartości φ (np. 30 różnych wartości chyba powinno wystarczyć) równomiernie rozłożonych na odcinku $[0, 2\pi]$. Liczymy średni uzyskany koszt $C^{(N)}$.

d) Powtarzamy powyższą procedurę dla różnych N i obserwujemy kiedy nastąpi zbieganie to optymalnej wartości kosztu. Wiemy, że powinno nastąpić bo asymptotycznie koszt optymalnej strategii zachowuje się jak 1/N a to wiemy, z analizy opartej o inf. Fishera, asymptotycznie da się wysycić prostymi pomiarami. Ciekawe będzie stwierdzenie dla jakiego N przewaga strategii optymalnej jest największa w stosunku do strategii prostej (tzn. $C^{(N)}/C_{\mathrm{opt}}^{(N)}$) będzie największe