Kwantowa Teoria Pomiaru i Estymacji

Seria 9

do oddania na 10.01.2013

Zadanie 1 (5 pkt) Rozwiąż problem optymalnej Bayesowskiej estymacji fazy φ, przyjmując, że dysponujesz N kopiami stanu qubitu leżących na równoleżniku o szerokości geograficznej θ: $|\psi_\varphi\rangle = \sin(\theta/2)|0\rangle + \cos(\theta/2)\exp(\mathrm{i}\varphi)|1\rangle$, traktując θ jako znany parametr, i zakładając brak wiedzy a priori o parametrze φ: $p(\varphi) = 1/(2\pi)$. Przyjmij funkcję kosztu $C(\varphi, \tilde{\varphi}) = 4\sin^2[(\varphi - \tilde{\varphi})/2]$. Porównaj zachowanie asymptotyczne uzyskanego wzoru na minimalny koszt z kwantowym ograniczeniem Cramera-Rao dla tego problemu.

Zadanie 2 (5 pkt) Na wykładzie wyprowadziliśmy koszt dla optymalnej strategii estymacji zupełnie nieznanego stanu czystego qubitu $|\psi\rangle_{(\theta,\varphi)} = \cos(\theta/2)|0\rangle + \sin(\theta/2)\exp(\mathrm{i}\varphi)|1\rangle$, dysponując jego N kopiami. Zupełnie nieznany w tym przypadku oznacza, że prawdopodobieństwo a priori było równomiernie rozłożone na całej sferze Blocha. Przyjmując koszt $C(\psi, \tilde{\psi}) = 4\left(1 - |\langle\psi|\tilde{\psi}\rangle|^2\right)$ wykazaliśmy, że minimalny osiągalny średni koszt wyraża się wzorem:

$$C = 4\left(1 - \frac{N+1}{N+2}\right) \tag{1}$$

Zbadajmy jak zachowuje się powyższy wzór w asymptotycznej granicy $N \to \infty$ i porównajmy jego zachowanie z ograniczeniem na możliwą do uzyskania precyzję wynikającą z wieloparametrowego ograniczenia Cramera-Rao. W tym celu postępuj następująco:

a) Pokaż, że w sytuacji gdy stany $|\psi\rangle$, $|\tilde{\psi}\rangle$ są bliskie sobie funkcja kosztu w najniższym rzędzie sprowadza się do znajomego wyrażenia: $C(\psi, \tilde{\psi}) \approx \Delta^2\theta + \sin^2(\theta)\Delta^2\varphi$, gdzie $\Delta^2\theta = (\theta - \tilde{\theta})^2$, $\Delta^2\varphi = (\varphi - \tilde{\varphi})^2$.

b) Oblicz kwantową macierz Fishera, dla estymacji dwuparametrowej θ, φ na stanie $|\psi\rangle_{(\theta,\varphi)}$ (to było już w zasadzie robione w serii 7)

c) Skorzystaj z wieloparametrowego kwantowego ograniczenia Cramera-Rao aby wyprowadzić ograniczenie na precyzję estymacji przyjmując jako błąd estymacji kombinację wariancji parametrów w postaci $\Delta^2\theta + \sin^2(\theta)\Delta^2\varphi$.

d) Porównaj asymptotyczne zachowanie wyrażenia (1) z ograniczeniem wynikającym z kwantowej nierówności Cramera-Rao. Wyciągnij głębokie wnioski. Porównaj z podobnymi rozważaniami jakie prowadziliśmy dla zagadnienia estymacji fazy dla stanu qubitu znajdującego się na sferze Blocha.