Uniwersytet Warszawski

Wydział Fizyki

Mateusz Denys

Nr albumu: 249631

Badanie leptokurtyczności rozkładów modelowych i symulowanych szumów

Praca magisterska

na kierunku FIZYKA

specjalność METODY FIZYKI W EKONOMII (EKONOFIZYKA)

Praca wykonana pod kierunkiem

dr hab. Ryszarda Kutnera, prof. UW

z Zakładu Fizyki Biomedycznej

Instytutu Fizyki Doświadczalnej

Warszawa, maj 2011

Oświadczenie kierującego pracą

Oświadczam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i stwierdzam, że spełnia ona warunki do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca magisterska została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data Podpis autora pracy

Streszczenie

W pracy tej omawiam i modyfikuję model rynków finansowych zaproponowany ostatnio przez Pawła Sieczkę i Janusza A. Hołysta z Politechniki Warszawskiej. Część monograficzna zawiera opis tego modelu oraz innych powszechnie używanych modeli. Wyniki uzyskane przez autorów odtwarzają wiele faktów stylizowanych znanych z rzeczywistych rynków. Przedstawiam także wyniki moich badań nad modelem Sieczki-Hołysta, idących dalej niż to, co było zaprezentowane w pracach autorów. Wreszcie, badam dogłębniej jedną z możliwych modyfikacji modelu, wskazując, do jakich wyników prowadzi.

Słowa kluczowe

– symulacja
– magnetyzacja
– fakt stylizowany
– próg
– Ising
– wariogram
– centralne twierdzenie graniczne

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

13.2 Fizyka

Tytuł pracy w języku angielskim

Analysis of leptokurtosis in model distributions and simulated noises

Spis treści

Spis rysunków

Rozdział 1

Wprowadzenie

Modelowanie rynków finansowych stanowi palący problem, zwłaszcza ostatnio, w związku z wciąż trwającym światowym kryzysem finansowym. Tego typu problematyka należy także do kanonicznej problematyki ekonofizyki. Ekonofizyka traktuje rynek, podobnie jak złożony układ fizyczny, co okazuje się owocne, gdyż na tej drodze udaje się uzyskać wiele interesujących cech rynków. Szczególnie warte uwagi jest stosowane przez ekonofizykę podejście oparte na modelu Isinga lub jego różnych uogólnieniach. Odtwarza ono szereg faktów stylizowanych, np. grube ogony rozkładu dochodów czy długozakresowe korelacje absolutnych dochodów[1]. To z pewnością stanowi istotną zachętę do zajmowania się tego typu modelami. Poza tym, pomimo ponad dwóch dekad prężnego rozwoju ekonofizyki, nadal nie mamy prostego i klarownego modelu, który odtwarzałby *wszystkie* znane fakty stylizowane dotyczące rzeczywistych rynków. Warto zatem się tym zajmować, bo pozostało tutaj jeszcze wiele do zrobienia.

W niniejszej pracy omawiam i modyfikuję model zaproponowany ostatnio przez Sieczkę i Hołysta [16, 15]. Co więcej, przedstawiam zbudowane dotychczas modele.

Głównym celem pracy jest odtworzenie wyników zawartych w pracach [16, 15], a następnie systematyczne zbadanie własności modelu. Będzie to zrealizowane na bazie symulacji komputerowych, metodą dynamiki stochastycznej [17]. Praca składa się z części monograficznej, w której omawiam używane powszechnie modele oraz model Sieczki-Hołysta, zwany dalej *modelem progowym*. Pokażę, że wyniki uzyskane przez autorów odtwarzają dobrze wiele faktów stylizowanych znanych z rzeczywistych rynków. W drugiej części przedstawiam wyniki badań własnych i omawiam jedną z możliwych modyfikacji modelu wskazując, do jakich wyników prowadzi.

[1] Uwagę tę przytoczyłem za artykułem [16].

Rozdział 2

Inspiracje

2.1. Model Isinga

Model Isinga to model matematyczny, który wykorzystuje się w mechanice statystycznej, aby badać przemiany fazowe. Stworzył go Wilhelm Lenz w 1920 roku [11], pierwotnie był to model próbujący, w bardzo uproszczony sposób, opisać strukturę ferromagnetyka. W modelu tym rozpatruje się układ N ustalonych punktów, które nazywamy węzłami sieci. Tworzą one n-wymiarową periodyczną sieć, gdzie $n = 1, 2, 3$. W każdym węźle sieci zlokalizowana jest zmienna spinowa s_i (i=1, ..., N), przyjmująca wartość $+1$ lub -1. Poza tym w układzie nie ma żadnych innych stopni swobody. Gdy $s_i = +1$, to mówimy, że na i-tym węźle spin skierowany jest do góry, natomiast gdy $s_i = -1$, to mówimy, że jest on skierowany do dołu. Zbiór $\{s_i,\ i = 1, \ldots, N\}$ wyznacza konfigurację całego układu.
Spiny oddziałują ze sobą: energia oddziaływania każdej pary spinów może przyjmować jedną z dwóch wartości, która zależy od tego, czy ich wzajemna orientacja jest zgodna, czy przeciwna. Hamiltonian modelu Isinga uwzględniającego oddziaływania między spinami zlokalizowanymi w najbliżej sąsiadujących węzłach oraz zewnętrzne pole magnetyczne można przedstawić w postaci

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{\langle i,j\rangle} J_{ij} s_i s_j - \sum_i h_i s_i, \tag{2.1}$$

gdzie sumowanie w pierwszym składniku odbywa się po wszystkich sąsiadujących ze sobą parach spinów zlokalizowanych w węzłach i, j. Parametr J_{ij} jest całką wymiany i przyjmuje następujące wartości zależne od charakteru oddziaływań między spinami:

- $J_{ij} > 0$ – oddziaływanie ferromagnetyczne,
- $J_{ij} < 0$ – oddziaływanie antyferromagnetyczne,
- $J_{ij} = 0$ – para spinów nie oddziałuje ze sobą.

h_i jest energią i-tego spinu w zewnętrznym polu magnetycznym.
Prosta zamiana oznaczeń pozwala zastosować model Isinga do opisu układów innych niż ferromagnetyk, np. gaz sieciowy (zbiór atomów, których położenia mogą przyjmować tylko dyskretne wartości) czy stop podwójny (czyli dwuskładnikowy).
Dotychczas rozwiązano ściśle model Isinga dla przypadku jednowymiarowego. Zrobił to w 1925 roku Ernst Ising [9]. Rozwiązano także przypadek dwuwymiarowy z zerowym zewnętrznym polem magnetycznym (czego z kolei dokonał Lars Onsager w roku 1944 [12]). Na razie przypadek dwuwymiarowy w niezerowym zewnętrznym polu jest nierozwiązany[1].

2.2. Model zbiorowego zachowania Granovettera

Inspiracją do sformułowania modelu progowego był model zbiorowego zachowania przedstawiony w pracy Granovettera [5].
Modele zbiorowego zachowania opisują sytuacje, w których *aktorzy* mają wybór pomiędzy alternatywami. Konsekwencje danego wyboru zależą od tego, jak wielu pozostałych aktorów wybierze daną alternatywę. Kluczowym pojęciem jest tutaj *próg* (ang. *threshold*), czyli liczba lub proporcja pozostałych aktorów, którzy podejmują decyzję, zanim dany aktor to zrobi. Jest to punkt, w którym korzyści netto zaczynają przekraczać koszty netto dla tego aktora. Dzięki takim modelom, opierając się na rozkładzie progów, możemy obliczyć ostateczną lub równowagową liczbę aktorów podejmujących daną decyzję. Warto zauważyć, że w przypadku tych modeli grupy o bardzo podobnych średnich preferencjach mogą dawać bardzo różne zachowania; w związku z tym jest bardzo ryzykowne wyciągać wnioski co do indywidualnych cech poszczególnych aktorów na podstawie końcowych rezultatów.
Przykładowe zastosowania modeli zbiorowego zachowania to symulowanie wybuchu i rozwoju buntów i rozruchów, rozprzestrzenianie się innowacji lub plotek, strajki, głosowania czy też migracje.
Przykład buntu wyjątkowo dobrze obrazuje istotę modeli zbiorowego zachowania. Koszt włączenia się maleje razem z wielkością buntu. Zakładamy, że aktorzy są racjonalni i dążą do maksymalizacji swojej użyteczności. Indywidualne różnice są tym, na co zwraca się największą uwagę. Poszczególni aktorzy mają różne „poziomy bezpieczeństwa", od których zależy, kiedy zdecydują dołączyć się do buntu; różnią się także korzyściami, które uzyskują w wyniku tego włączenia się. Jak to było powiedziane powyżej, kluczowym pojęciem służącym do opisu tych różnic pomiędzy aktorami jest pojęcie progu. Próg danego aktora może być zdefiniowany jako część grupy aktorów, która przystąpi do buntu, zanim zrobi to on. *Radykał* (ang. *radical*) będzie miał niski próg; korzyści ze wstąpienia do buntu będą dlań wysokie, koszt aresztowania – niski. Niektórzy przystąpią do buntu, nawet jeśli nikt inny tego nie zrobi. Mają oni

[1] Oczywiście, problem polega na znalezieniu rozwiązania analitycznego, bo rozwiązania numeryczne (z kontrolowaną dokładnością) są znane. Model Isinga przedstawiłem na podstawie [13] oraz [7]

próg 0% i nazywają się *instigators* (podżegacze, prowokatorzy). Z kolei *konserwatyści* (ang. *conservatives*) mają wysoki próg, jako że odnoszą marne korzyści lub wręcz ponoszą straty z wstąpienia do buntu, a koszty aresztowania są dla nich wysokie. Tu też mamy przypadek skrajny - osoby, które nie przystąpią do buntu w żadnych okolicznościach - ci mają próg 100%. Niezależnie od rodzaju zastosowania modelu, jego cel jest zawsze taki sam: przewidzieć, opierając się na początkowym rozkładzie progów, ostateczną liczbę lub proporcję aktorów, podejmujących każdą z alternatywnych decyzji. Łatwo się przekonać, że – co już było powiedziane – wyciąganie wniosków o indywidualnych cechach na podstawie końcowych rezultatów może być tu mylące. Dwa bardzo podobne rozkłady progów mogą dać w rezultacie: jeden – bunt z udziałem wielu osób, drugi – jednostkowy incydent.

2.3. Model Iori

2.3.1. Wprowadzenie

Przedstawię teraz model, który jest bardzo podobny do modelu progowego, jeśli chodzi o lokalną dynamikę. Jego autorem jest Giulia Iori, a został on opisany w artykule [8]. W modelu tym rozpatrujemy macierz $L \times L$, gdzie każdy węzeł $i = 1, \ldots, L^2$, oznacza *agenta*, czyli inwestora. Połączenia między węzłami oznaczają oddziaływania między agentami. Każdy z agentów oddziałuje tylko ze swoimi czterema najbliższymi sąsiadami: u góry, u dołu, z lewej i z prawej, przy czym obowiązują periodyczne warunki brzegowe – agenci na samej górze macierzy oddziałują z odpowiednimi agentami na samym dole, a ci z prawego brzegu oddziałują z tymi z brzegu lewego. Innymi słowy macierz interakcji w tym modelu ma topologię torusa.

Na początku każdy z agentów ma taki sam kapitał, złożony z dwóch walorów: gotówki $M_i(0)$ oraz $N_i(0)$ jednostek akcji. W każdym kroku czasowym t dany agent, i, podejmuje jedną z trzech akcji reprezentowaną przez zmienną $S_i(t)$, która może przyjmować jedną z trzech wartości: $+1$, jeśli kupuje jedną jednostkę akcji, -1, jeśli ją sprzedaje lub 0, gdy pozostaje nieaktywny. Decyzja, którą podejmuje agent, jest ograniczona przez jego zasoby (agent może nie być w stanie kupić lub sprzedać ze względu na niedobór gotówki lub akcji) oraz przez warunek, że może on kupować/sprzedawać tylko jedną jednostkę akcji w jednym kroku czasowym.

Oprócz agentów-handlowców w modelu występuje *market maker*, którego zadanie polega na realizacji zleceń kupna/sprzedaży i dostosowywaniu cen. Market maker także pojawia się na rynku z pewnym początkowym zasobem pieniędzy oraz akcji i ten zasób, zmieniając się w czasie, ogranicza jego możliwości kupna/sprzedaży, jednak jego decyzja inwestycyjna w danym kroku czasowym nie jest ograniczona do jednej jednostki akcji, jak to było w przypadku pozostałych inwestorów.

2.3.2. Podejmowanie decyzji przez agenta

W każdym kroku czasowym agent podejmuje decyzję na podstawie dwóch czynników:

1. Zagregowanej opinii czterech najbliższych sąsiadów, z którymi oddziałuje, reprezentowanej przez człon $S_j(\tilde{t})$, gdzie j oznacza numer agenta, z którym zachodzi oddziaływanie, zaś $\tilde{t}$ oznacza czas pomiędzy początkiem a końcem danego okresu czasowego t, tzn. występowanie w danym miejscu zmiennej $\tilde{t}$ sygnalizuje nam, że w tym miejscu zmiany w układzie następują na bieżąco, jedna po drugiej, a nie wszystkie naraz na końcu danego okresu czasowego t.

2. Swojej własnej opinii o stanie rynku, która jest reprezentowana przez zmienną $\nu_i(t)$, będącą zmienną losową z rozkładu jednostajnego na przedziale $[-1, 1]$.

Składając te dwa elementy i dodając do pierwszego z nich macierz interakcji J_{ij} (mierzącą wpływ, który wywiera na i-tego agenta decyzja S_j jego sąsiada j), zaś do drugiego – parametr A, wyrażając siłę indywidualnej opinii i-tego agenta, otrzymujemy zagregowany sygnał $Y_i(\tilde{t})$, na podstawie którego i-ty agent podejmuje decyzję inwestycyjną:

$$Y_i(\tilde{t}) = \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} S_j(\tilde{t}) + A\nu_i(t). \tag{2.2}$$

$\langle i, j \rangle$ oznacza, że suma jest wykonywana po najbliższych sąsiadach agenta i. Przyjęto, że macierz interakcji jest symetryczna, choć w ogólności nie musiałoby tak być.
Decyzja inwestycyjna jest podejmowana na podstawie powyższego sygnału oraz *tarcia* (ang. *friction*), które może być interpretowane np. jako koszt transakcji, który jest inny dla każdego agenta. W tym modelu tarcie zostało odtworzone przez indywidualny próg aktywacji $\xi_i(t)$. Sygnał $Y_i(\tilde{t})$ musi przekroczyć ten próg, jeśli agent zdecyduje się na handlowanie. Podejmowanie decyzji przez agenta opisane jest przez następujące równania dyskryminacji:

$$\begin{aligned} S_i(\tilde{t}) &= 1 && \text{jeśli} \quad Y_i(\tilde{t}) \geq \xi_i(t), \\ S_i(\tilde{t}) &= 0 && \text{jeśli} \quad -\xi_i(t) < Y_i(\tilde{t}) < \xi_i(t), \\ S_i(\tilde{t}) &= -1 && \text{jeśli} \quad Y_i(\tilde{t}) \leq -\xi_i(t). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Wartości $\xi_i(t)$ są inicjowane zmiennymi losowymi z rozkładu Gaussa z początkową wariancją $\sigma_\xi(0)$ i średnią równą 0. Z okresu na okres wartości te zmieniają się dla każdego agenta proporcjonalnie do ruchów cen akcji.

2.3.3. Ustalenie wolumenu i ceny. Wyniki symulacji

Gdy już proces podejmowania decyzji się skończy, inwestorzy i jednocześnie market maker składają swoje zlecenia i ma miejsce handel po pojedynczej cenie. Market maker określa zagregowany popyt na akcje $D(t)$ oraz zagregowaną podaż akcji $Z(t)$ w czasie t:

$$D(t) = \sum_{i:S_i(t)>0} S_i(t), \qquad Z(t) = -\sum_{i:S_i(t)<0} S_i(t) \tag{2.4}$$

oraz wolumen $V(t) = Z(t) + D(t)$ i dostosowuje cenę akcji zgodnie z formułą:

$$P(t+1) = P(t)\left(\frac{D(t)}{Z(t)}\right)^{\alpha}, \tag{2.5}$$

gdzie

$$\alpha = a\frac{V(t)}{L^2}. \tag{2.6}$$

L^2 to liczba agentów, która jednocześnie oznacza maksymalną liczbę akcji mogących być w obrocie w każdym kroku czasowym.

Zmienność $\sigma(t)$ na rynku może być zdefiniowana jako wartość bezwzględna logarytmicznej stopy zwrotu $r(t)$:

$$r(t) = \log\frac{P(t)}{P(t-1)}, \quad \sigma(t) = |r(t)|. \tag{2.7}$$

Zmiany cen wpływają na zmianę progu w następnym okresie czasowym:

$$\xi_i(t+1) = \xi_i(t)\frac{P(t)}{P(t-1)}. \tag{2.8}$$

Jak widzimy, w modelu jest zachowana symetria pomiędzy kupowaniem a sprzedawaniem. Autorce pracy udało się odtworzyć takie fakty stylizowane jak grupowanie wariancji, pozytywna korelacja między wolumenem a zmiennością, potęgowy zanik funkcji autokorelacji modułu stopy zwrotu czy grube ogony rozkładu stóp zwrotu. Trzeba jednak zaznaczyć, że te rzeczy były odtwarzane tylko dla niektórych parametrów modelu.

2.4. Model Bornholdta

2.4.1. Wprowadzenie. *Fundamentaliści*

Ważną inspiracją dla sformułowania modelu progowego był także *model Bornholdta*. Po raz pierwszy został on przedstawiony w pracy [1], a następnie rozwinięty w [10] przez Taisei Kaizojiego, Stefana Bornholdta i Yoshi Fujiwarę. Model ten nadaje się do opisywania zmian cen waloru w krótkich okresach czasu, np. w ciągu jednego dnia.

W modelu Bornholdta mamy dwa typy uczestników rynku: m *fundamentalistów* (ang. *fundamentalists*) i n *oddziałujących handlowców* (ang. *interacting traders*). Ci pierwsi są wrażliwi jedynie na zmiany ceny. Znają oni fundamentalną wartość akcji $p^*(t)$ – jeśli rzeczywista cena $p(t)$ jest poniżej tej wartości, będą oni kupować akcje, jako że uważają je za niedoszacowane. Jeśli jest powyżej, będą akcje sprzedawać, uważając je za przeszacowane i przez to ryzykowne instrumenty. Zatem ich zbiorowe zlecenie kupna/sprzedaży będzie wyglądało następująco:

$$x^F(t) = am(\ln p^*(t) - \ln p(t)), \tag{2.9}$$

gdzie m to liczba fundamentalistów, natomiast a jest parametrem określającym, jak mocno fundamentaliści reagują na daną różnicę między wartością fundamentalną a rynkową waloru.

2.4.2. Oddziałujący handlowcy

Przejdźmy do charakterystyki oddziałujących handlowców. Są oni opisywani przez zmienną s_i, gdzie $i = 1, \ldots, n$, oznacza numer handlowca. Zmienna ta może przyjmować dwie wartości zależnie od tego, czy w danym okresie czasu handlowiec kupuje (wartość $+1$) czy sprzedaje (-1) akcję.

Rozważmy teraz następującą strategię inwestycyjną i-tego agenta:

$$s_i(t+1) = +1 \quad \text{z prawdopodobieństwem} \quad p = \frac{1}{1 + \exp(-2\beta h_i(t))} \tag{2.10}$$

lub

$$s_i(t+1) = -1 \quad \text{z prawdopodobieństwem} \quad 1 - p, \tag{2.11}$$

gdzie $h_i(t)$ jest lokalnym polem modelu spinowego, decydującym o strategii i-tego handlowca, natomiast β jest parametrem pełniącym rolę odwrotnej temperatury.

Decyzja, jaką podejmuje każdy oddziałujący handlowiec zależy od dwóch czynników: informacji lokalnej (ang. *local information*) i globalnej (ang. *global information*). Informację lokalną tworzy zachowanie się sąsiednich (czyli znajomych) handlowców. Zakładamy, że każdy oddziałujący handlowiec pozostaje pod wpływem jedynie swych najbliższych sąsiadów w odpowiednio zdefiniowanym sąsiedztwie. Z kolei informacja globalna jest dana przez to, czy handlowcy należą do większościowej (*majority*), czy mniejszościowej (*minority*) grupy sprzedających/kupujących w danym okresie czasowym i przez to, jak liczne są te grupy. Asymetria w rozmiarach większościowej i mniejszościowej grupy może być zmierzona wartością bezwzględną magnetyzacji $|M(t)|$, gdzie

$$M(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} s_i(t). \tag{2.12}$$

Celem oddziałujących handlowców jest oczywiście osiągnięcie wzrostu kapitału dzięki handlowi. Wiedzą oni, że aby pomnożyć swój kapitał, konieczne jest pozostawanie w grupie większościowej, choć nie jest to warunek wystarczający, aby grupa większościowa powiększyła się w trakcie następnego okresu. Z drugiej strony, oddziałujący handlowcy pozostający w grupie większościowej będą oczekiwali, że im większa jest wartość $|M(t)|$, tym trudniejsze będzie dalsze powiększanie rozmiaru tejże grupy. W związku z tym oddziałujący handlowcy z grupy większościowej czasami przenoszą się do grupy mniejszościowej, aby uniknąć straty kapitału w wyniku krachu, którego prawdopodobieństwo rośnie wraz z rozmiarami grupy większościowej. Inaczej mówiąc oddziałujący handlowcy z grupy większościowej starają się unikać ryzyka tym mocniej, im większe są rozmiary tej grupy. Sytuacja komplikuje się jeszcze bardziej, gdy zauważymy, że handlowcy z grupy mniejszościowej mogą chcieć przenieść się do grupy większościowej, by powiększyć swój kapitał i że handlowcy z grupy mniejszościowej tym chętniej podejmują ryzyko, im większa jest grupa większościowa. Podsumowując: im większa jest wartość $|M(t)|$, tym większe jest prawdopodobieństwo, że oddziałujący handlowcy zmienią swoją grupę, niezależnie od tego, czy jest to grupa większościowa, czy mniejszościowa. Zgodnie z [1] lokalne pole $h_i(t)$ uwzględniające interakcje opisane powyżej może być dane przez

$$h_i(t) = \sum_{j=1}^{m} J_{ij} S_j(t) - \alpha S_j(t) |M(t)|, \tag{2.13}$$

gdzie $\alpha > 0$. Pierwszy człon odpowiada informacji lokalnej, z oddziaływaniem najbliższych sąsiadów $J_{ij} = J$ i $J_{ij} = 0$ dla pozostałych par.
W omawianym modelu założono, że nadmiarowy popyt na akcje oddziałujących handlowców jest przybliżany przez wyrażenie

$$x^I(t) = bnM(t), \tag{2.14}$$

gdzie b jest liczbą akcji, które agent kupuje lub sprzedaje w każdym kroku czasowym.

2.4.3. Cena rynkowa i wolumen. Odtworzone fakty stylizowane

Zakładamy, że na rynku istnieje system clearingowy, w którym market makerzy pośredniczą w handlu i dostosowują cenę rynkową do wartości clearingowej. Transakcja rynkowa jest dokonywana, kiedy zlecenia zakupu zrównują się ze zleceniami sprzedaży. W związku z tym równość popytu i podaży możemy zapisać jako

$$x^F(t) + x^I(t) = am[\ln p^*(t) - \ln p(t)] + bnM(t) = 0. \tag{2.15}$$

Stąd możemy obliczyć cenę akcji:

$$\ln p(t) = \ln p^*(t) + \lambda M(t), \quad \lambda = \frac{bn}{am} \tag{2.16}$$

i wolumen:

$$V(t) = bn \frac{1 + |M(t)|}{2}. \tag{2.17}$$

Przypatrzmy się równaniu (2.16). Zgodnie z nim sytuacja, w jakiej znajduje się rynek, może być jedną z następujących:

- Jeśli $M(t) = 0$, cena rynkowa $p(t)$ jest tożsama z ceną fundamentalną $p^*(t)$.
- Jeśli $M(t) > 0$, cena rynkowa $p(t)$ przewyższa cenę fundamentalną $p^*(t)$ (reżim hossy).
- Jeśli $M(t) < 0$, cena rynkowa $p(t)$ jest mniejsza od ceny fundamentalnej $p^*(t)$ (reżim bessy).

Zgodnie z równaniem (2.16) logarytmiczna stopa zwrotu dla rynku w modelu Bornholdta wynosi

$$\ln p(t) - \ln p(t-1) = (\ln p^*(t) - \ln p^*(t-1)) + \lambda(M(t) - M(t-1)). \tag{2.18}$$

Załóżmy na chwilę, że tylko fundamentaliści uczestniczą w grze rynkowej. Wtedy z zasady cena rynkowa $p(t)$ jest zawsze równa cenie fundamentalnej $p^*(t)$, a to oznacza, że w tej

sytuacji ma zastosowanie *hipoteza efektywnego rynku*[2]. Zgodnie z modelem efektywnego rynku opisanym w [4], wartość ceny fundamentalnej podlega błądzeniu losowemu. Skoro ciągłą granicą błądzenia losowego jest proces gaussowski, gęstość prawdopodobieństwa logarytmicznej stopy zwrotu $r(t) = \ln p(t) - \ln p(t-1)$ jest opisywana przez rozkład normalny. Niestety, dla rzeczywistych rynków obserwuje się poważne odchylenia od tego rozkładu. W modelu Bornholdta jest to uwzględnione, ponieważ na rynku współistnieją fundamentaliści i oddziałujący handlowcy, co implikuje możliwość wystąpienia hossy lub bessy.
Badając statystyczne właściwości ceny i wolumenu w spinowym modelu rynków akcji, autorzy przyjęli dla prostoty, że cena fundamentalna nie zmienia się z upływem czasu.
Autorom modelu udało się odtworzyć wiele faktów znanych z rzeczywistego rynku, na przykład potęgowe rozkłady stóp zwrotu, grupowanie zmienności, dodatnią korelację pomiędzy zmiennością a obrotami oraz samopodobieństwo między zmiennościami na różnych skalach czasowych. Nie udało się odtworzyć kształtu funkcji autokorelacji wartości bezwzględnych stóp zwrotu – nie zanika ona potęgowo, jak na rzeczywistych rynkach.

[2]Ang. *efficient market hypothesis* – teza rozważana w finansach, zgodnie z którą w każdej chwili ceny papierów wartościowych w pełni odzwierciedlają wszystkie informacje dostępne na ich temat. Na podstawie [13].

Rozdział 3

Opis modelu progowego Sieczki-Hołysta

3.1. Opis założeń i postaci modelu progowego

Autorami ostatniego i dla tej rozprawy najważniejszego z omawianych modeli są Paweł Sieczka i Janusz A. Hołyst z Politechniki Warszawskiej. Przedstawili oni wyniki swoich badań w pracach [16] oraz [15]. Ich model jest oparty na modelu zbiorowego zachowania Granovettera, omówionego w rozdziale 2.2. Inspiracją do stworzenia modelu progowego był także omówiony wcześniej model Bornholdta.

W modelu progowym rozważamy N oddziałujących ze sobą agentów, z których każdy może podjąć jedną z trzech akcji: „kupuj", „sprzedawaj" albo „czekaj", podobnie jak to było w modelu Iori (rozdział 2.3). Akcjom tym odpowiada wartość zmiennej s_i, $i = 1, \ldots, N$, opisującej agenta: są to odpowiednio $+1$, -1 i 0. Agenci oddziałują zgodnie z macierzą interakcji J_{ij}, będącą odpowiednikiem całki wymiany J_{ij} z rozdziału 2.1. W omawianym modelu przyjęto, że na każdego agenta oddziałuje tylko czworo najbliższych sąsiadów[1] z taką samą siłą równą J. W zgodności z terminologią z rozdziału 2.1, jeśli $J > 0$, siłę interakcji nazywamy ferromagnetyczną, jeśli $J < 0$ – antyferromagnetyczną. Aby odtworzyć zachowania stadne, autorzy zajęli się przypadkiem ferromagnetycznym. W dalszych badaniach nad modelem ja również będę brał pod uwagę tylko ten przypadek.

Decyzja inwestycyjna podejmowana jest przez agenta zgodnie z regułą

$$s_i(t) = \mathrm{sign}_{\lambda|M(t-1)|}\left[\sum_{j=1}^{N} J_{ij} s_j(t-1) + \sigma\eta_i(t)\right], \tag{3.1}$$

[1] Założenie to było umotywowane tym, że w krótkim czasie, jaki średnio upływa od jednej do drugiej decyzji inwestycyjnej, inwestor przed jej podjęciem kontaktuje się co najwyżej z kilkoma znajomymi.

gdzie[2]

$$\text{sign}_q(x) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } x > q, \\ 0 & \text{jeśli } -q < x < q, \\ -1 & \text{jeśli } x < -q. \end{cases} \tag{3.2}$$

Jak łatwo zauważyć, w wyrażeniu (3.1) parametr λ jest zbędny (zwiększenie λ jest równoznaczne zmniejszeniu tyle samo razy J i σ, i odwrotnie), jednak wygodnie jest się nim posługiwać, przeprowadzając symulacje i zapewne dlatego autorzy umieścili go w swoim modelu (poza tym przydaje się, gdy chcemy wyzerować próg – patrz rozdział 4.1.1).

Funkcja $\eta_i(t)$ przyjmuje losowe wartości z rozkładu Gaussa o wartości średniej 0 i wariancji 1 (jej odpowiednik w modelu Iori, $\nu_i(t)$, był zmienną z rozkładu jednostajnego – patrz rozdział 2.3.2). Funkcja ta wyraża indywidualną opinię i-tego inwestora; parametr σ wyraża siłę indywidualnej opinii.

Magnetyzację sieci definiujemy w następujący sposób:

$$M(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} s_i(t), \tag{3.3}$$

czyli identycznie, jak to było w modelu Bornholdta (patrz wzór (2.12)). Razem ze stałą λ magnetyzacja tworzy parametr progowy q funkcji signum sign_q. Autorzy zauważają, że dla λ równego 0 model ten jest dwustanowym modelem Isinga.

W stosunku do bazowego modelu Bornholdta w procedurze obliczania ceny zostały poczynione pewne zmiany. Autorzy zdefiniowali cenę aktywów jako:

$$P(t) = P_0(t)e^{M(t)}, \tag{3.4}$$

gdzie (w zgodności z hipotezą rynku efektywnego) $P_0(t)$ podlega geometrycznemu ruchowi Browna. Dla prostoty załóżmy (tak jak to zrobił Bornholdt i in.), że $P_0(t) = P_0$, czyli P_0 jest wielkością stałą, niezależną od czasu. Otrzymujemy wtedy logarytmiczną stopę zwrotu postaci

$$r(t) = M(t) - M(t-1). \tag{3.5}$$

Uogólnieniem tego wyrażenia jest stopa zwrotu z opóźnieniem czasowym τ, dana przez

$$r_\tau(t) = M(t) - M(t-\tau). \tag{3.6}$$

Podsumowując, możemy powiedzieć, że (zgodnie z wyrażeniem (3.1)) są trzy czynniki wpływające na zachowanie się agentów:

[2]Por. wyrażenie (2.3). W oryginalnej pracy Sieczki i Hołysta nie jest powiedziane, co zrobić w przypadku gdy $x = q$ lub $x = -q$. Wbrew pozorom ma to pewne znaczenie, zwłaszcza gdy $\lambda = 0$. Jeśli przyjmiemy, że w takim wypadku $s_i(t)$ jest równe, odpowiednio, $+1$ lub -1, to są widoczne niewielkie różnice na wykresach magnetyzacji dla różnych parametrów J i σ, przy zachowanym stałym stosunku σ/J, co, jak to będzie omówione, nie powinno mieć miejsca (ma to związek ze specyfiką zastosowanego przeze mnie algorytmu). Gdy przyjąłem, że dla $x = q$ i $x = -q$ wielkość $s_i(t)$ jest równa odpowiednio $+1$ i 0, różnice nie były już w oczywisty sposób widoczne, prawdopodobnie zatem ich nie było.

1. Naśladowanie sąsiadów, związane z macierzą J_{ij}.

2. Indywidualna opinia każdego agenta, którą reprezentuje człon $\sigma\eta_i(t)$ (odpowiednik członu $A\nu_i(t)$ w modelu Iori – wzór (2.2)). Odwołując się do standardowego modelu Isinga wielkość σ/J można utożsamiać z „temperaturą" układu.

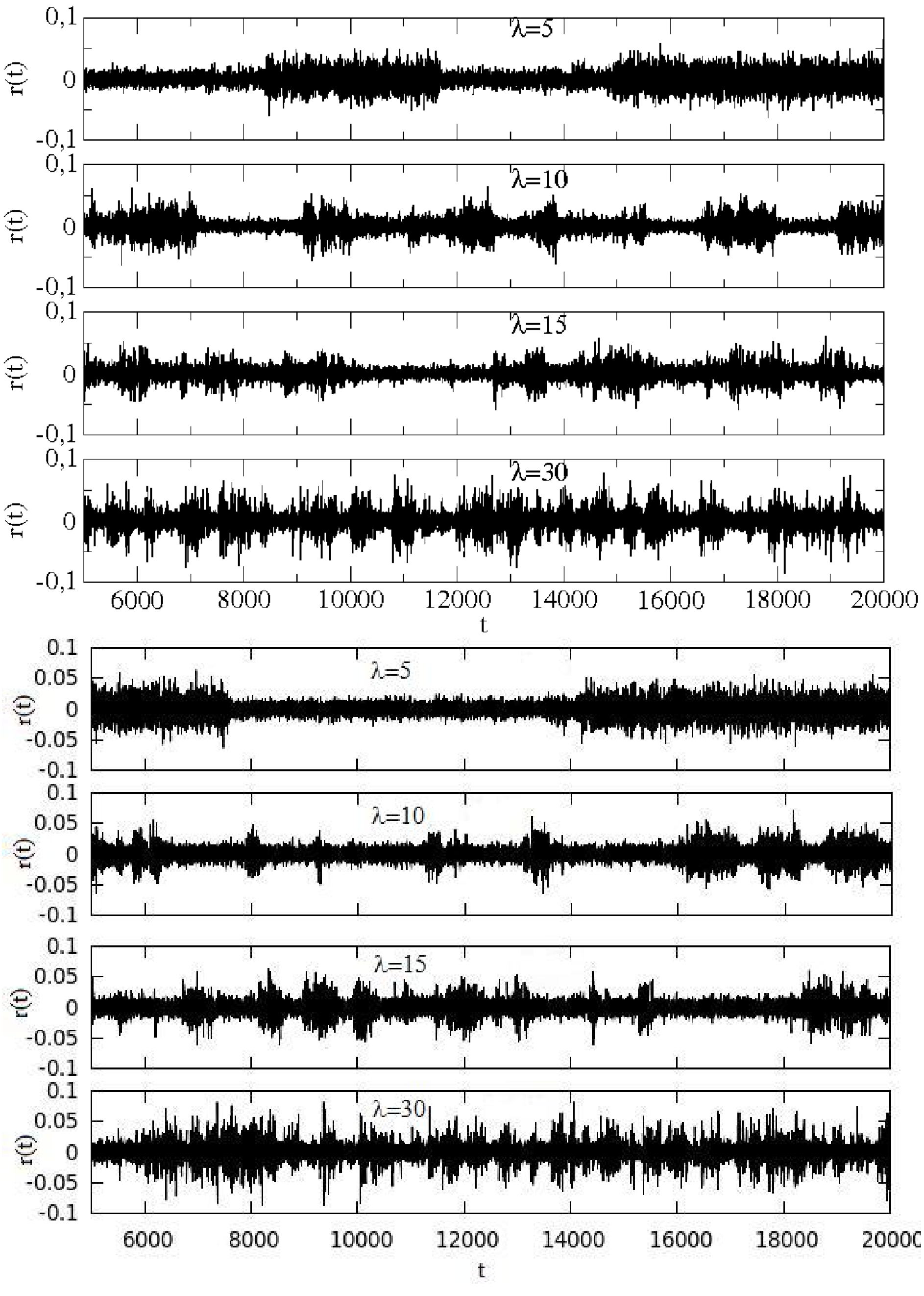
3. Czynnik $\lambda|M(t-1)|$, który pełni funkcję parametru progowego (awersji do ryzyka). Jedynie ci spośród agentów, którzy są w stanie przekroczyć próg, uczestniczą w handlowaniu. Jak widzimy, parametr ten zależy od magnetyzacji, która, zgodnie ze wzorem (3.4), mierzy odchylenie od wartości podstawowej. Zatem, kiedy jest ono duże, agenci boją się przeprowadzać transakcje, nawet gdy mają mocne wsparcie swoich sąsiadów lub związane z ich indywidualną opinią. Czynnik $\lambda|M(t-1)|$ jest odpowiednikiem czynnika $\xi_i(t)$ w modelu Iori (patrz rozdział 2.3.2).

Opisując funkcję parametrów modelu progowego, obrazowo można powiedzieć, że w σ jest zakodowana euforia, w λ – awersja do ryzyka, zaś w J – „owczy pęd".
Jak widzimy, u Sieczki i Hołysta, tak jak u Granovettera i Iori, też występuje *próg*, jednak u każdego z nich to słowo oznacza trochę co innego. Różnica polega na tym, że u Granovettera każdy aktor miał swój własny próg (można było zatem mówić o rozkładzie progów w „przestrzeni" aktorów), zaś u Sieczki i Hołysta wszyscy agenci (czyli aktorzy u Granovettera) w danej chwili czasu mają ten sam próg, choć od chwili do chwili może on się zmieniać (tu zatem można by mówić o rozkładzie progów, ale w czasie). Natomiast u Iori progi zmieniają się zarówno w przestrzeni agentów, jak i od jednego do drugiego kroku czasowego.

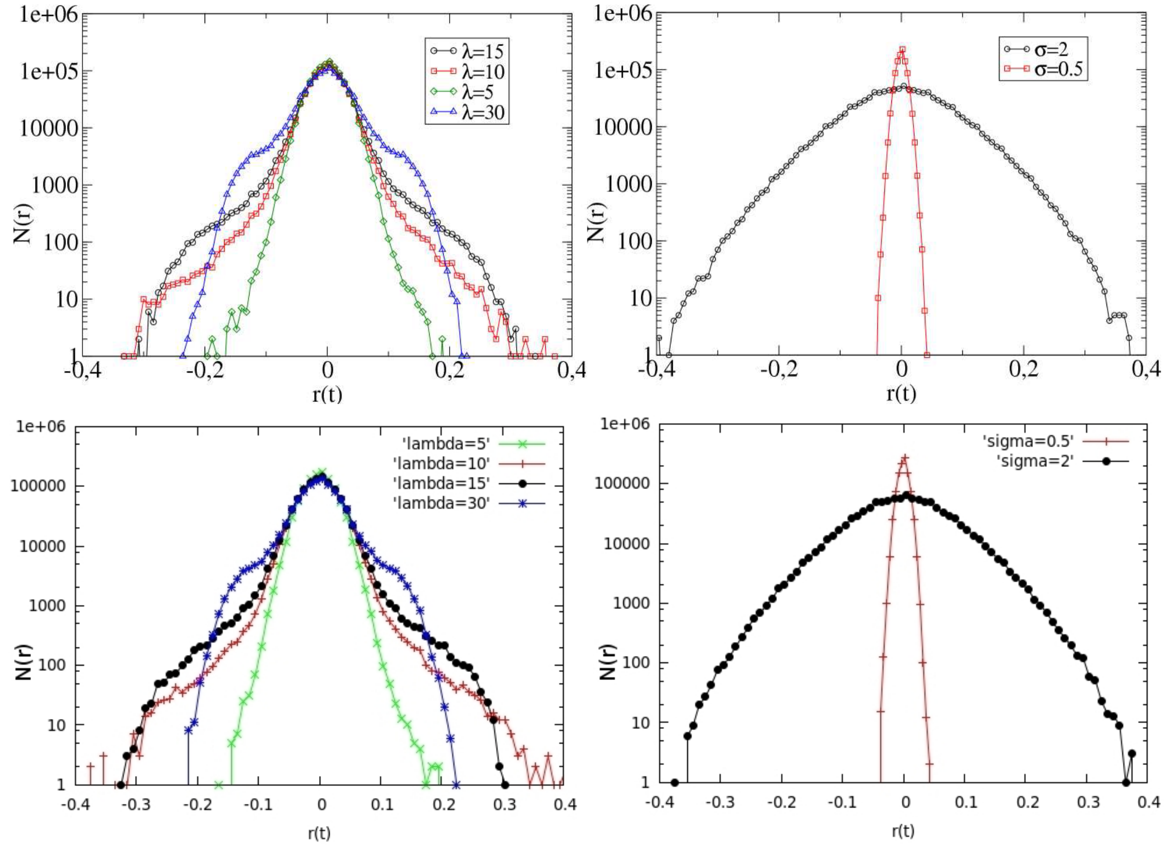
3.2. Wyniki symulacji i ich odtworzenie

Omawiam teraz wyniki przeprowadzonej symulacji przedstawione na rysunkach 3.1–3.5[3] i porównania ich z analogicznymi wynikami, które mnie udało się uzyskać programem własnym napisanym w języku C++ na podstawie opisu modelu podanego w pracy [16].
W symulacji użyto kwadratowej płaskiej sieci o wymiarach 32×32 z periodycznymi warunkami brzegowymi. Jak już było powiedziane, jedynie czterech najbliższych sąsiadów miało wpływ na każdego agenta. Początkowa konfiguracja spinów była losowa. W każdym kroku czasowym $32 \cdot 32 = 1024$ razy losowano numer agenta (ze zwracaniem) i na bieżąco uaktualniano wartość odpowiadającego mu spinu. Zignorowano pierwsze 5000 kroków czasowych jako czas termalizacji. Na tej podstawie oszacowano jak zmienia się cena waloru.
Rysunek 3.1 pokazuje, że dla odpowiednich parametrów symulacji na wariogramie stopy zwrotu występuje zjawisko grupowania zmienności, które zostało po raz pierwszy zaobserwowane przez Mandelbrota. Polega ono na tym, że po dużych zmianach zwykle następują

[3]Rysunki i opis wyników przeprowadzono tutaj na podstawie [16].



Rysunek 3.1: Wariogramy stóp zwrotu dla $J = 1, \sigma = 1$ i różnych λ. U góry: wyniki autorów modelu (zaczerpnięte z [16]). U dołu: moje wyniki.



Rysunek 3.2: Grube ogony statystyk stóp zwrotu. U góry: wyniki autorów modelu (zaczerpnięte z [16]). U dołu: moje wyniki.

duże zmiany, zaś po małych — małe. Na tym rysunku widać to szczególnie dla $\lambda = 5$, czyli dla niskiego progu. Im większe λ, tym grupowanie wariancji słabsze.

Na rysunku 3.2 widzimy tzw. *fat tails*, czyli grube ogony w statystyce wariogramu stopy zwrotu $r_{16}(t)$ dla $J = 1$, $\sigma = 1$ i różnych λ (lewa część rysunku) oraz dla $J = 1$, $\lambda = 10$ i różnych σ (część prawa). Wskazuje to na niegaussowski charakter symulowanego procesu. Widać, że wraz ze wzrostem λ grube ogony najpierw się powiększają, następnie zaś „cofają się". Jak zobaczymy w rozdziale 4.1.1, jest to związane z tym, że im większe λ, tym mniejsza wartość $\sup_t |M|$, czyli mniejszy rozrzut możliwych do osiągnięcia przez układ wartości magnetyzacji – stąd „cofanie się" grubych ogonów dla bardzo dużych λ. Jednocześnie dla bardzo małych λ magnetyzacja długo pozostaje prawie niezmieniona, więc stopy zwrotu są zazwyczaj niewielkie – stąd początkowy brak grubych ogonów dla małych λ.

Rysunek 3.3 pokazuje zanikanie grubych ogonów wraz z rosnącym krokiem (przesunięciem) czasowym τ. Widać na nim histogramy stopy zwrotu $r_\tau(t)$ dla $J = 1$, $\sigma = 1$, $\lambda = 10$ i różnych kroków czasowych τ. Stopy zostały przeskalowane zgodnie z odpowiednim odchyleniem standardowym σ_r (będącym pierwiastkiem kwadratowym średniego odchylenia kwadratowego od średniej szeregu czasowego stóp zwrotu), a następnie rozkłady przesunięto w górę o czynnik 10, 100, 1000 itd., żeby całość była czytelna. Dla cen rzeczywistych grube ogony rozkładu stopy zwrotu $r_\tau(t) = \log(P(t)/P(t-\tau))$ są tym szczuplejsze, im większy jest krok czasowy symulacji. Dla dużych τ ogony rozkładu stają się gaussowskie, chociaż kształt rozkładu różni się od kształtu rozkładu normalnego – statystyka $r_\tau(t)$ posiada subtelną strukturę. Na rzeczywistych rynkach też nie mamy na ogół dokładnie rozkładu normalnego. W dalszej części pracy postaram się wyjaśnić, skąd biorą się charakterystyczne „dzióbki" po bokach rozkładu przeskalowanych stóp zwrotu.

Zjawisko grupowania zmienności może być pokazane ilościowo z pomocą autokorelacji stopy zwrotu[4]:

$$C_x(\tau) = \frac{\langle x(t)x(t-\tau)\rangle - \langle x(t)\rangle^2}{\sigma_x^2}, \tag{3.7}$$

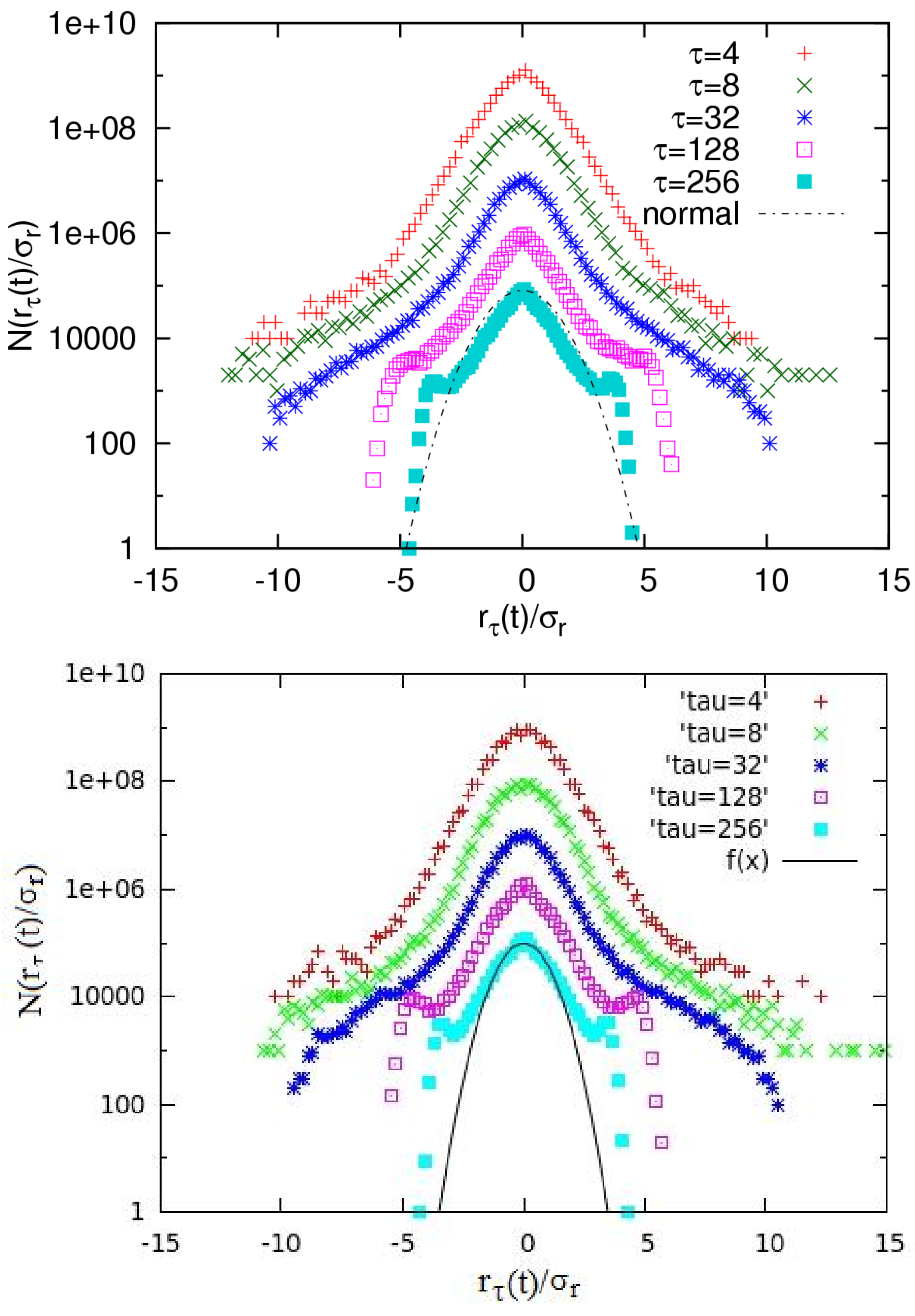
gdzie σ_x^2 to wariancja $x(t)$, a $\langle \ldots \rangle$ oznacza uśrednianie po czasie. Autorzy modelu wyznaczyli tę funkcję dla x równego stopie zwrotu i dla x równego wartości bezwzględnej z tej stopy.

Rysunek 3.4 przedstawia funkcję autokorelacji zwykłej stopy zwrotu, która, jak widać, bardzo szybko zanika do zera od strony ujemnych wartości (choć zdarzają się tam też wartości tej funkcji większe od zera). Jest to zgodne z obserwacjami z rzeczywistego rynku.

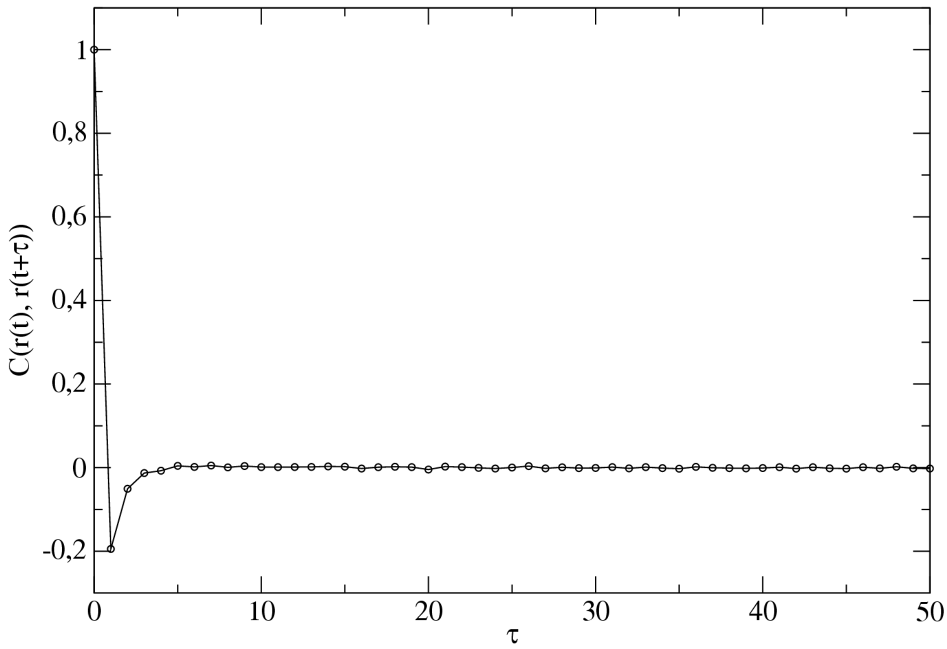
Na rysunku 3.5 u góry widać funkcję autokorelacji wartości bezwzględnej stopy zwrotu, którą otrzymali autorzy modelu. Jest to zanikająca funkcja eksponencjalna. Przypomina to rezultaty, jakie otrzymał na przykład Bornholdt i in. [10]. Autokorelacja wartości bezwzględnych zanika tutaj wolniej, niż autokorelacja zwykłej stopy zwrotu, czyli kolejne wartości bezwzględne są silniej ze sobą skorelowane, niż zwykłe stopy zwrotu. Zgadza się to z obserwacjami z rzeczywistych rynków, chociaż tam mamy zanik potęgowy, a nie – jak tutaj – eksponencjalny.

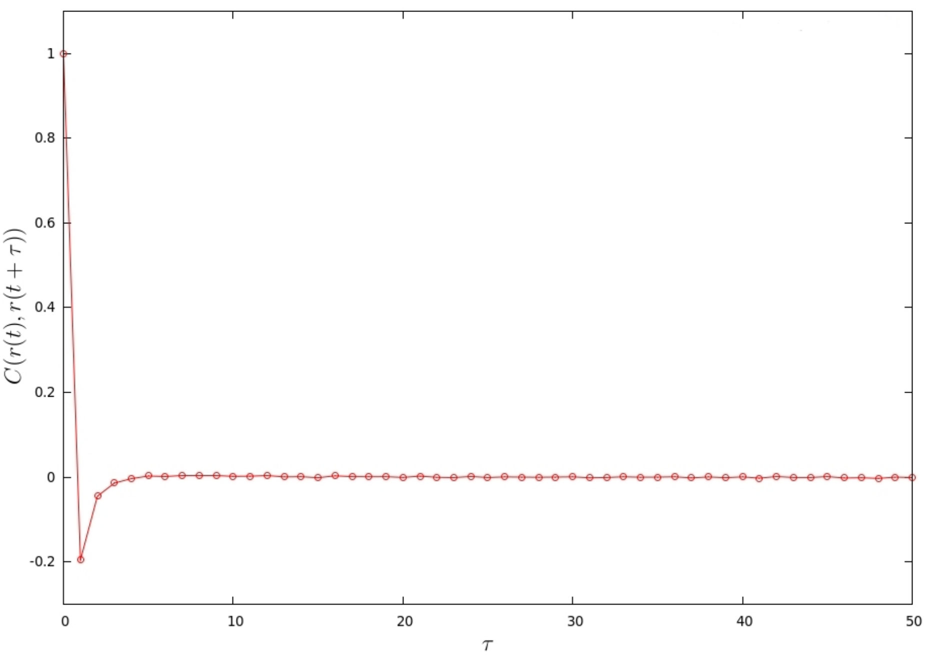
Jeśli chodzi o moje odtworzenie wyników Sieczki i Hołysta, to, jak widać na rysunkach, wyniki są zbliżone do wyników oryginalnych. Jeżeli chodzi o funkcję autokorelacji absolutnych stóp zwrotu, przedstawioną na rysunku 3.5 u dołu – jej relaksacja jest szybsza, tzn. kształt funkcji jest odtworzony, jednak dla takich samych τ przyjmuje ona niższe wartości. Poza tym, jak widać na rysunku 3.5 u góry, w przypadku wyników autorów modelu do $\tau = 1200$ funkcja ta przyjmowała same wartości dodatnie – u mnie zdarzały się też wartości ujemne, zwłaszcza dla symulacji o małej długości. Niemniej wartość tej funkcji zbiega do zera, co zgadza się z obserwacją z rzeczywistego rynku. Na rysunku 3.5 widać najlepsze, jak mi się wydawało, odtworzenie wyniku przedstawionego w pracy [16]. Uzyskałem je dla symulacji o długości 10 mln kroków czasowych (nie licząc termalizacji).

[4]Nie należy utożsamiać τ występującego w tej funkcji z τ występującym w wyrażeniu (3.6) na stopę zwrotu z opóźnieniem czasowym.

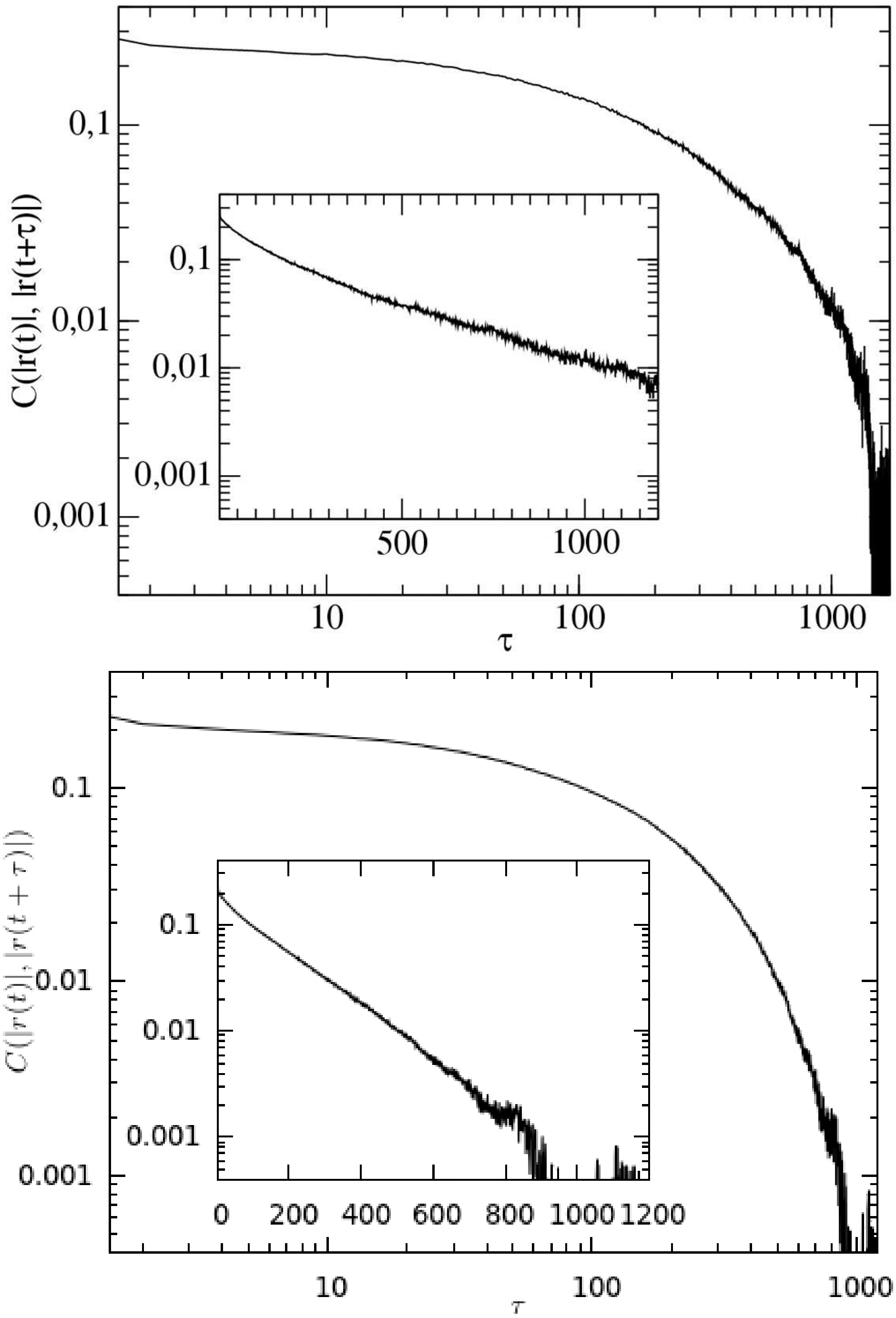


Rysunek 3.3: Zanikanie grubych ogonów z rosnącym krokiem czasowym. Na czarno zaznaczono rozkład normalny. U góry: wyniki autorów modelu (zaczerpnięte z [16]). U dołu: moje wyniki.





Rysunek 3.4: Autokorelacja stopy zwrotu dla $J = 1$, $\sigma = 1$ i $\lambda = 15$. U góry: wyniki autorów modelu (zaczerpnięte z [16]). U dołu: moje wyniki.



Rysunek 3.5: Autokorelacja modułu stopy zwrotu. Parametry: $J = 1$, $\sigma = 1$ i $\lambda = 15$. Skala logarytmiczna i półlogarytmiczna (wstawka). U góry: wyniki autorów modelu (zaczerpnięte z [16]). U dołu: moje wyniki.

3.3. Silne i słabe strony modelu

Najważniejsze zalety modelu progowego to:

1. Prostota założeń.

2. Mała złożoność obliczeniowa problemu, przez co symulacja szybko się wykonuje (obliczenie 25000 kroków czasowych trwa ok. 10 sekund).

3. Odtworzenie wielu faktów stylizowanych, w tym w szczególności:

   - grupowania zmienności na wariogramie stóp zwrotu,
   - pogrubionych ogonów rozkładów stóp zwrotu dla pewnych parametrów modelu,
   - zbliżania się do rozkładu Gaussa rozkładów stóp zwrotu z opóźnieniem czasowym $r_\tau(t)$ przy $\tau \to \infty$, czyli spełnienie Centralnego Twierdzenia Granicznego (choć – jak to było widać – niedokładnie),
   - szybko zanikającej od strony ujemnych wartości funkcji autokorelacji stóp zwrotu.

Pomimo wielu atutów, jakie ma model progowy, nie jest on niestety pozbawiony wad. Postaram się tutaj wymienić najważniejsze z nich:

1. Naiwność założeń (która, niestety, często idzie w parze z wymienioną w zaletach prostotą).

2. Nieodtworzony charakter zaniku funkcji autokorelacji wartości bezwzględnych stóp zwrotu. Na rzeczywistych rynkach mamy zanik potęgowy, tutaj – eksponencjalny.

3. Dynamika modelu: jak się okaże w dalszej części pracy, nierzadko mamy sytuację, w której wszyscy kupują lub wszyscy sprzedają, ale cena stoi; to jest chyba najpoważniejsza wada modelu.

Rozdział 4

Dalsze badania nad modelem

4.1. Magnetyzacja i wariancja spinu

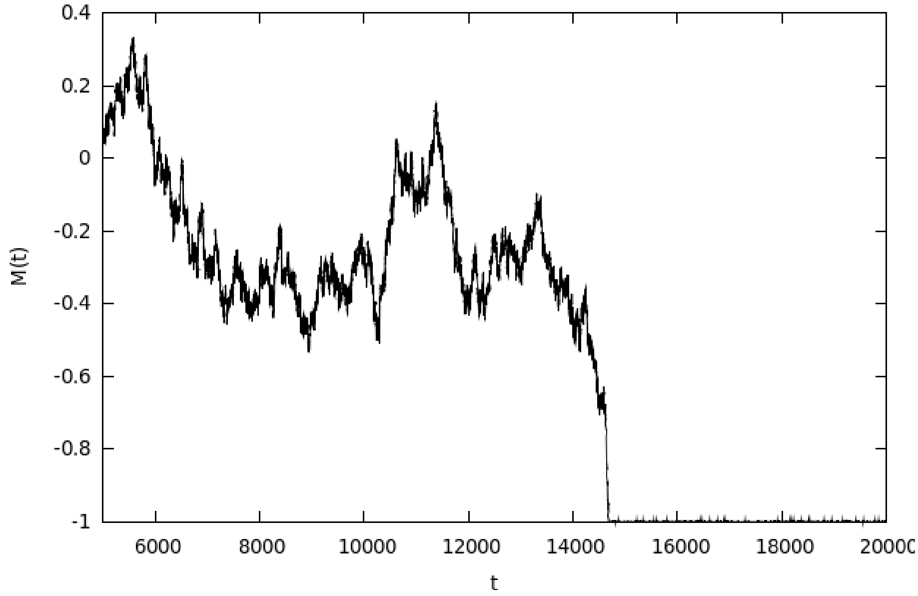
4.1.1. Magnetyzacja dla małego progu

Przejdziemy teraz do omówienia wyników moich badań nad modelem progowym, wykraczających poza to, co zostało przedstawione w pracy [16]. Znamy już wariogramy stóp zwrotu i ich rozkład dla różnych parametrów, przedstawiliśmy także funkcje autokorelacji tych stóp. Jednak stopę zwrotu w modelu Sieczki-Hołysta oblicza się na podstawie magnetyzacji M; dlatego zachowanie magnetyzacji wymaga zbadania. Zachowanie to jest interesujące i dla różnych parametrów może być jakościowo różne.

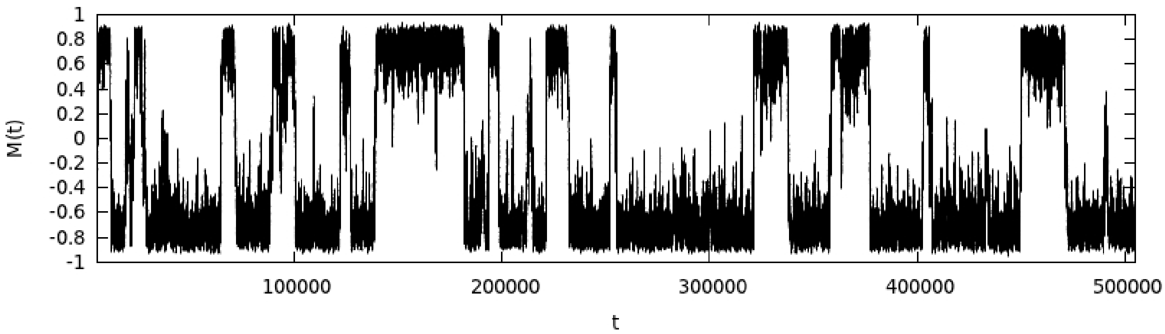
Przyjrzyjmy się najpierw rysunkowi 4.1, przedstawiającemu ewolucję magnetyzacji w czasie w modelu dwustanowym, czyli dla[1] $\lambda = 0$. Jak widać, układ ma tendencję do wpadania w stan uporządkowania, tj. magnetyzacja po pewnym czasie osiąga wartość $+1$ (*dodatni*) albo -1 (*ujemny* stan uporządkowania) i pozostaje taka do końca, a przynajmniej do końca czasu symulacji (nie zdarzyło mi się zaobserwować przypadku, w którym układ opuściłby stan uporządkowania, gdy już go osiągnął). Przez analogię do klasycznego modelu Isinga można powiedzieć, że temperatura układu jest w tym przypadku poniżej temperatury krytycznej, zwanej temperaturą Curie, bo spiny mają tendencję do spontanicznego porządkowania się, i to nawet bez zewnętrznego pola. Jak widać na rysunku 4.2, dla $J = 1$, $\sigma = 2$ i $\lambda = 0$ temperatura układu jest powyżej krytycznej – układ nie wpada spontanicznie w stan uporządkowania[2]. Potwierdza to, że im większe σ, tym większa temperatura układu. Poza tym wykres magnetyzacji dla $J = 2$, $\sigma = 4$ i $\lambda = 0$ jakościowo nie różni się od wykresu magnetyzacji dla $J = 1$, $\sigma = 2$ i $\lambda = 0$, a wykres dla $J = 2$, $\sigma = 3.8$ i $\lambda = 0$ – od wykresu dla $J = 1$, $\sigma = 1.9$

[1] Dla $\sigma = 0$ i niezerowych pozostałych parametrów magnetyzacja szybko osiąga pewien ustalony poziom, a następnie może (ale nie musi) trochę się wokół niego wahać, natomiast dla $J = 0$ i pozostałych parametrów niezerowych wykres magnetyzacji wygląda jak szum wokół zera.

[2] Jak ustaliłem na podstawie symulacji, temperatura krytyczna dla $J = 1$ jest osiągana przez układ właśnie przy σ niewiele poniżej 2, pomiędzy 1.9 a 2.



Rysunek 4.1: Ewolucja magnetyzacji dla $J = 1$, $\sigma = 1$ i $\lambda = 0$.

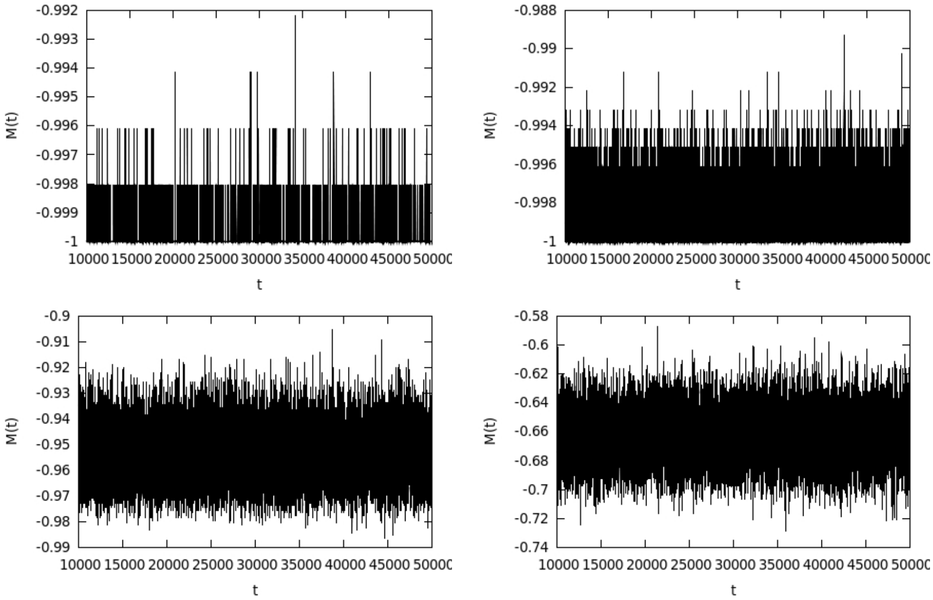


Rysunek 4.2: Ewolucja magnetyzacji dla $J = 1$, $\sigma = 2$ i $\lambda = 0$.

i $\lambda = 0$. Tego zresztą należało się spodziewać – jeśli przyjrzymy się wyrażeniu (3.1) na $s_i(t)$, to widzimy, że dla $\lambda = 0$ jeden z dwóch pozostałych parametrów jest zbędny, bo znaczenie ma tylko ich stosunek. To wszystko potwierdza przypuszczenie, że dla $\lambda = 0$, czyli w przypadku klasycznego modelu Isinga, σ/J możemy utożsamiać z temperaturą układu.

Kolejny rysunek, 4.3, przedstawia sekwencję zmian wyglądu stanu uporządkowania wraz z rosnącym od 0 do 3 parametrem λ, przy σ i J nadal równym 1. Ten stan nie jest już teraz ściśle stanem uporządkowania, bo nie wszystkie spiny mają jednakową wartość; dla odróżnienia nazwiemy go stanem *stagnacji*[3]. Na rysunku pokazano same ujemne stany stagnacji, ale oczywiście równie często zdarzają się także dodatnie.

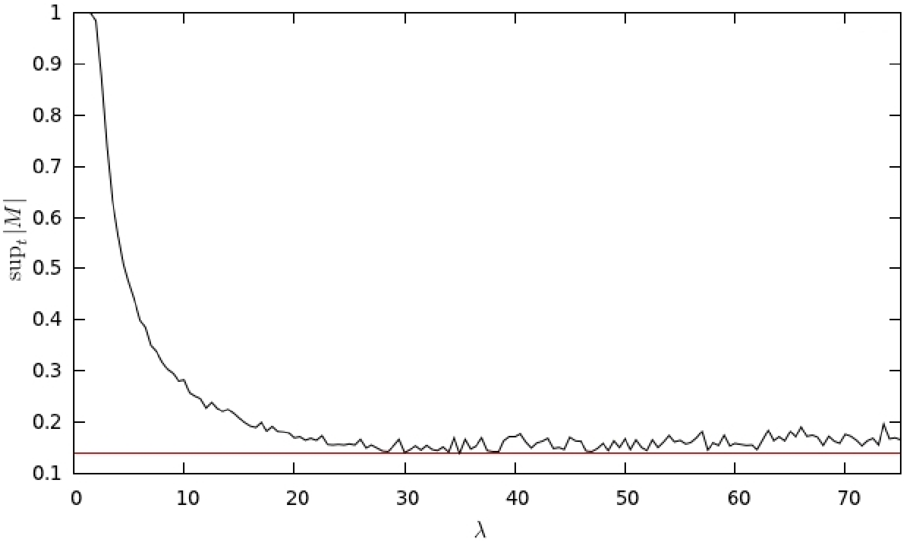
[3]Będę starał unikać się giełdowego określenia *konsolidacja*, ponieważ dotyczy on raczej zmian cen, które w ogólności nie muszą być dane prostym przekształceniem $M(t)$ (patrz wzór (3.4) i rozdział 5).



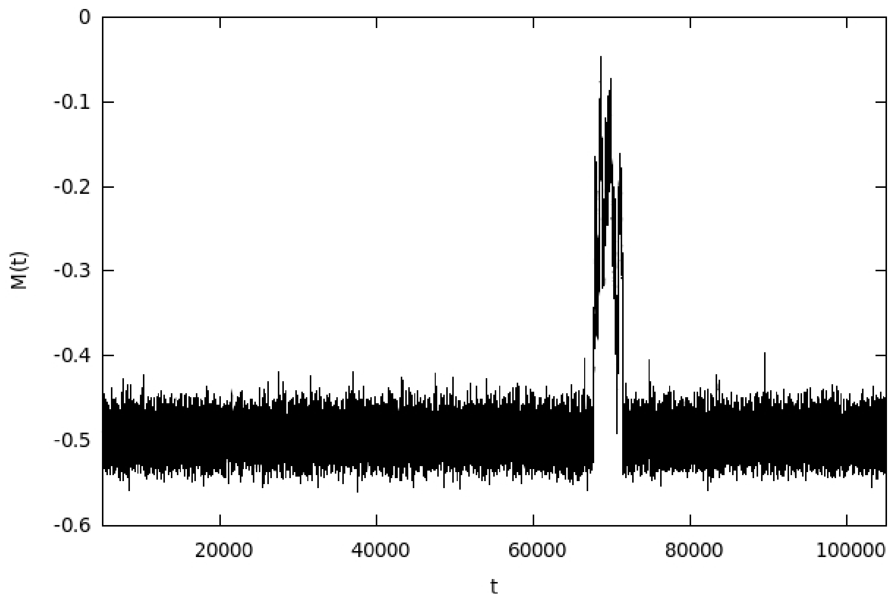
Rysunek 4.3: Stan stagnacji w ewolucji magnetyzacji dla $\lambda = 0, 1, 2, 3$. Widać, że wahania wartości magnetyzacji w stanie stagnacji stają się coraz większe, a następnie odsuwa się ona od -1 tym bardziej, im większe λ. Podobnie jest dla dodatniego stanu stagnacji.

Nie powinno specjalnie dziwić, że wraz ze wzrastającym λ stan stagnacji znajduje się coraz bliżej zera. Intuicyjnie jest to jasne – wszak gdy wzrasta λ, wzrasta próg, więc coraz więcej inwestorów wybiera decyzję „czekaj", jeśli nie ma naprawdę solidnego wsparcia od swoich sąsiadów. W związku z tym moduł magnetyzacji się zmniejsza. Pokazuje to poglądowo rysunek 4.4. Przedstawiono na nim wartość $\sup_t |M|$ w funkcji wzrastającego λ dla $J = 1$, $\sigma = 1$ i symulacji każda po 200000 kroków czasowych, nie licząc okresu termalizacji. Widać, że moduł magnetyzacji w stanie stagnacji jest coraz mniejszy, ale maleje coraz wolniej, a dla $\lambda > 30$ nawet zaczyna jakby nieznacznie rosnąć. W każdym razie najmniej wynosi on około 0.14 (wartość zaznaczona na rysunku czerwoną linią). Jak się można przekonać, dla dużych λ wykres magnetyzacji wygląda po prostu jak szum wokół zera – jej znak zmienia się z dodatniego na ujemny i odwrotnie z dużą częstotliwością, tak jakby magnetyzacja była cały czas w *zerowym* stanie stagnacji – można więc powiedzieć, że zostaje osiągnięty pewien próg, poniżej którego moduł magnetyzacji już nie może zejść.

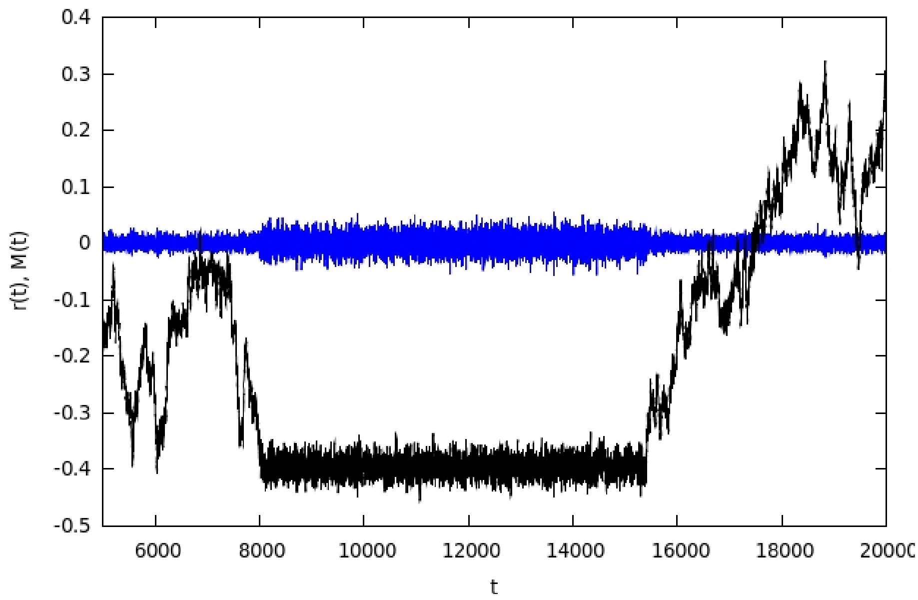
Okazuje się, że wielkością wyróżnioną w jakiś sposób w modelu jest, w przybliżeniu, $\lambda = 4$. Nie jest to dokładnie 4 (podobne zachowanie do opisanego poniżej uzyskałem na przykład dla $\lambda = 3.95$), choć dynamika modelu, a w szczególności równanie (3.1) wyróżnia taką kombinację J i λ, dla której $\lambda/J = 4$. Na rysunku 4.5 widać, że (trzeba tu jednak dodać, że tylko czasami) dla $\lambda = 4$ otrzymujemy – na pewnym, choć niezbyt długim, przedziale czasowym – przebieg magnetyzacji z dala od stanu stagnacji **po osiągnięciu tego stanu**. Można zatem postawić



Rysunek 4.4: $\sup_t |M|$ w funkcji wzrastającego λ. Czerwona linia odpowiada $\sup_t |M| = 0.14$.



Rysunek 4.5: Niestandardowy przebieg magnetyzacji dla $J = 1$, $\sigma = 1$ i $\lambda = 4$.

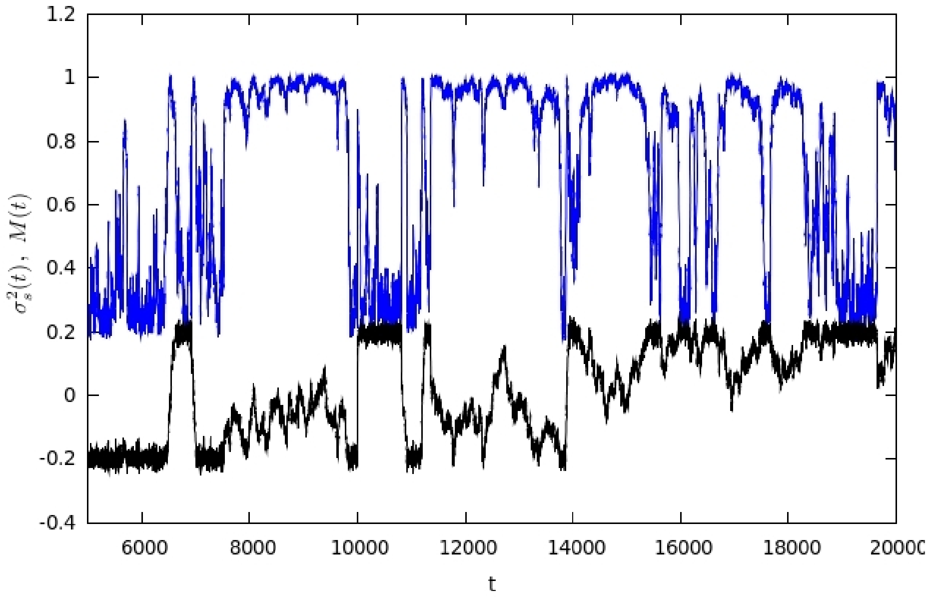


Rysunek 4.6: Magnetyzacja i wariogram stóp zwrotu dla $J = 1$, $\sigma = 1$ i $\lambda = 5$. Tam gdzie magnetyzacja (dane w kolorze czarnym) znajduje się w stanie stagnacji, widać większy rozrzut na wariogramie (dane w kolorze niebieskim).

hipotezę, że wprowadzenie do modelu parametru λ zmniejsza temperaturę krytyczną lub że zmienia charakter modelu, przez co temperatura ta – o ile jeszcze można mówić o jej istnieniu – nie ma już tak istotnego wpływu na układ. Innymi słowy, zwiększanie λ działa podobnie, jak zwiększanie σ. Jak pokażą także dalsze rysunki, im większe λ, tym łatwiej wyjść układowi ze stanu stagnacji, a to prawdopodobnie dlatego, że pojawia się wtedy więcej zer w macierzy agentów i w związku z tym pojawia się także większa szansa na jakąś fluktuację w tej macierzy, o znaku przeciwnym do aktualnego znaku magnetyzacji, która zapoczątkuje zmianę trendu (pamiętamy, że decyzja każdego agenta zależy także od decyzji jego sąsiadów).

4.1.2. Magnetyzacja i wariogram stóp zwrotu

Idźmy dalej. Dla $\lambda = 5$ odstępstwa od stanu stagnacji zdarzają się częściej i, statystycznie rzecz biorąc, są coraz dłuższe. Na rysunku 4.6 jest pokazany przykładowy przebieg magnetyzacji i wariogram stóp zwrotu dla tych samych danych. Jak widać, **stopy zwrotu mają większy rozrzut w stanie stagnacji**. W symulacjach, które zrobiłem dla $J = 1$ i $\sigma = 1$, nie spotkałem się z odstępstwem od tej reguły, można zatem postawić hipotezę, że dla takich parametrów i różnych wielkości λ jest to faktycznie regułą.



Rysunek 4.7: Magnetyzacja (linia w kolorze czarnym) i wariancja spinu (linia w kolorze niebieskim) w czasie.

4.1.3. Wariancja spinu

Wprowadźmy teraz nową wielkość, która posłuży nam do poczynienia kolejnej ciekawej obserwacji. Wielkość tę nazwiemy *wariancją spinu* i oznaczymy przez σ_s^2 – będzie to po prostu średni kwadrat rozrzutu zmiennej spinowej $s_i(t)$, gdzie w każdej chwili czasu t uśredniamy po indeksie i, czyli

$$\sigma_s^2(t) = \langle s_i^2(t) \rangle_i - \langle s_i(t) \rangle_i^2 = \langle s_i^2(t) \rangle_i - M^2(t), \tag{4.1}$$

jako że[4] $\langle s_i(t) \rangle_i = M(t)$. W programie symulacyjnym obliczałem wielkość σ_s^2 tak, jak standardowo oblicza się wariancję na podstawie serii danych:

$$\sigma_s^2(t) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (s_i(t) - M(t))^2. \tag{4.2}$$

Przyjrzyjmy się teraz, jak wygląda wykres wariancji spinu w czasie i porównajmy go z wykresem magnetyzacji. Porównanie przebiegu tych dwóch wielkości dla parametrów $J = 1$, $\sigma = 1$ i $\lambda = 10$ przedstawia rysunek 4.7. Znów jedna rzecz jest widoczna od razu: w stanie stagnacji wariancja spinu jest niewielka (mieści się w przedziale 0.2–0.4), natomiast w pozostałych miejscach – duża (0.8–1). Gdyby różnice te były mniejsze, można by to wyjaśnić tym, że w stanie stagnacji kwadrat magnetyzacji jest duży, przez co wariancja spinu się zmniejsza (por. wzór (4.1)). Jednak, wobec tego że dla podanych parametrów magnetyzacja nie przekracza granicy dolnej ok. -0.2 ani górnej ok. $+0.2$, nie może być to dominujący powód, bo jej kwadrat nie

[4]Ponieważ $\langle s_i^2(t) \rangle_i \leq 1$, a $M^2(t) \geq 0$, to $\sigma_s^2(t) \leq 1$.

przekracza w takim wypadku 0.04. Pozostaje zatem druga możliwość: **W stanie stagnacji wiele zmiennych spinowych przyjmuje wartość 0, czyli wielu agentów wybiera decyzję „czekaj"**. Nie jest to zaskoczeniem, skoro jest to stan najwyższego modułu magnetyzacji, zatem próg jest wtedy wysoki, co – jak widzieliśmy w rozdziale 3.1 – oznacza, że agenci boją się handlować i mamy dużo spinów równych 0.

4.2. Wielkości M_+ i M_-. Płynność.

4.2.1. Wprowadzenie współczynnika płynności

Wprowadźmy teraz trzy nowe wielkości:

$$M_+(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{s_i(t)=+1}, \tag{4.3}$$

$$M_0(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{s_i(t)=0} \tag{4.4}$$

oraz

$$M_-(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{s_i(t)=-1}. \tag{4.5}$$

Łatwo można zauważyć, że

$$M(t) = M_+(t) - M_-(t), \tag{4.6}$$

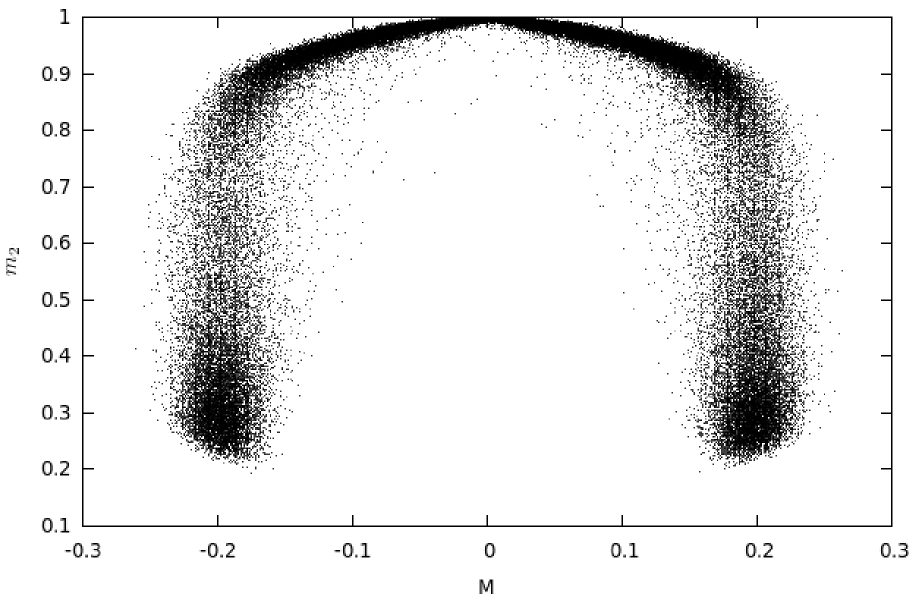
ponieważ spiny, które w danej chwili mają wartość 0 nie dają żadnego przyczynku do magnetyzacji. Zauważmy też, że

$$M_+(t) + M_-(t) = m_2(t) = \langle s_i^2(t)\rangle_i, \tag{4.7}$$

gdzie $m_2(t)$ to po prostu drugi moment zwykły zmiennej spinowej $s_i(t)$. Faktycznie: dla $s_i(t) = \pm 1$ wkład do $m_2(t)$ będzie równy 1, zaś $s_i(t) = 0$ nie będzie dawało doń wkładu, więc średni kwadrat zmiennej spinowej będzie sumą liczby spinów o wartościach $+1$ i -1. Widzimy, że im więcej pasywnych ($s_i(t) = 0$) inwestorów, tym wartość $m_2(t)$ mniejsza, a dokładnie:

$$m_2(t) = 1 - M_0(t). \tag{4.8}$$

Warto teraz zwrócić uwagę na jedną rzecz: chociaż Sieczka i Hołyst precyzują z jakiego powodu inwestorzy decydują się nie kupować ani nie sprzedawać walorów w danym kroku czasowym – boją się handlować z powodu przegrzania rynku – to możliwa jest też inna interpretacja przyjętej przez nich dynamiki modelu. Pasywność inwestora na rynku nie musi być związana z jego obawą, że rynek jest przegrzany, na podstawie której podejmuje on *decyzję*, ale być *koniecznością* związaną z brakiem płynności na rynku, gdy jest on przegrzany. Innymi słowy, **im więcej decyzji „czekaj", tym mniejsza płynność**, a im mniej takich decyzji, tym



Rysunek 4.8: Zależność magnetyzacji M od współczynnika płynności m_2.

płynność większa. Zatem wprowadzony w równaniu (4.7) współczynnik m_2, który jest tym większy, im mniej decyzji „czekaj", przy powyższych założeniach może nam posłużyć jako współczynnik określający płynność na rynku – będziemy go zatem, na potrzeby tej pracy, nazywali *współczynnikiem płynności*[5].

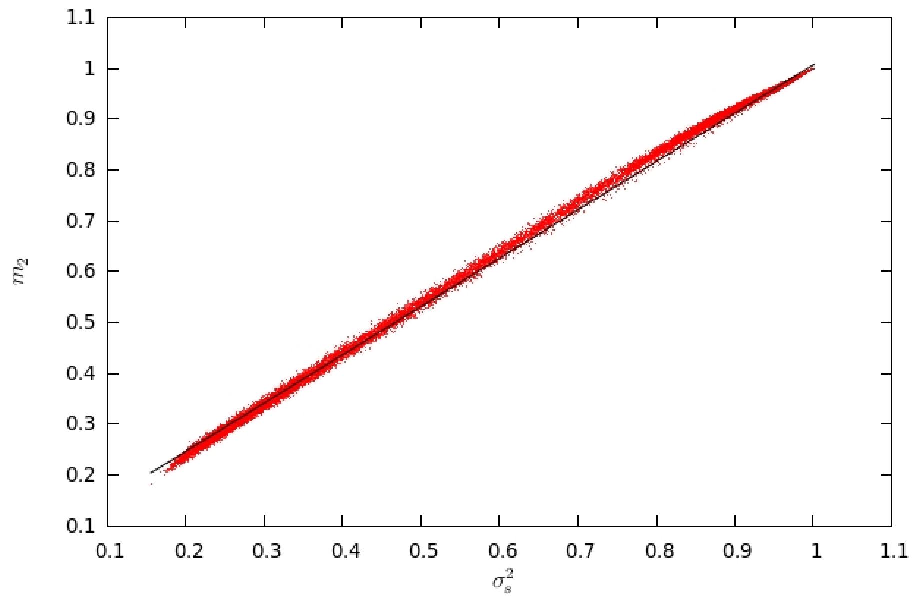
4.2.2. Zależność współczynnika płynności od magnetyzacji i wariancji spinu

Jeśli na osi poziomej odłożymy magnetyzację, zaś na pionowej – odpowiadające jej wartości współczynnika płynności, otrzymamy wykres w kształcie podkowy. Przedstawia to (dla 50000 kroków czasowych, $J = 1$, $\sigma = 1$ i $\lambda = 10$) rysunek 4.8. Trzy rzeczy od razu zwracają uwagę:

1. Współczynnik m_2 nigdy nie przekracza wartości 1, co wynika z równania (4.8).

2. Wykres ma załamanie dla $M \approx \pm 0.2$. Jak widać na rysunku 4.7, dla tych parametrów jest to wartość odpowiadająca stanowi stagnacji. Zatem dla stanów, które nie są stanami stagnacji, utrzymuje się względnie wysoka płynność (m_2 w granicach 0.9–1) i dopiero po wejściu w ten stan płynność gwałtownie spada do $m_2 \approx 0.3$.

[5]Klasyczna definicja płynności na rynku finansowym określa ją jako przestrzeń dla transakcji na rynku powiązaną z głębokością rynku (wskazującą na wielkość transakcji jakie można dokonać na rynku bez wywoływania dużych zmian cen). Płynność to cecha instrumentu finansowego, która określa, do jakiego stopnia może on być sprzedany bez wywołania znaczących ruchów ceny i z minimalną stratą wartości. Płynność taka występuje wtedy, gdy istnieje na danym rynku swoboda dokonywania wszelkich transakcji sprzedaży lub kupna, bez obawy, że nie znajdzie się odpowiedniego popytu lub podaży. Na podstawie [13] oraz [3]



Rysunek 4.9: Zależność współczynnika płynności m_2 od wariancji spinu σ_s^2. Czerwone punkty przedstawiają zależność empiryczną, zaś czarna linia – dopasowaną do nich funkcję liniową. Widać, że korelacja między m_2 i σ_s^2 jest silna.

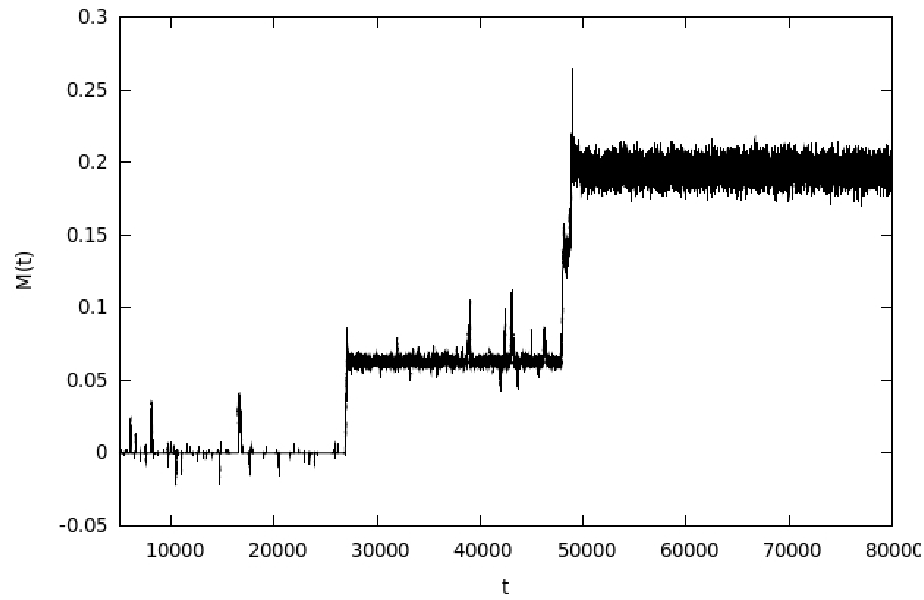
3. Na wykresie można wyróżnić trzy zwarte obszary: jeden odpowiada dużej płynności, zaś dwa kolejne są obszarami płynności ograniczonej[6]. Zwróćmy uwagę, że stany dużego $|M|$ są prawie zawsze stanami małego m_2, a stany $|M|$ poniżej ok. 0.2 są zwykle stanami dużego m_2 – dużej płynności.

Zauważmy, że kwadrat magnetyzacji, nawet w stanie stagnacji, jest dla parametrów $J = 1$, $\sigma = 1$ i $\lambda = 10$ niewielki. Intuicja podpowiada zatem, że wprowadzona w rozdziale 4.1.3 wariancja spinu σ_s^2 nie powinna wiele się różnić od współczynnika m_2. Rzeczywiście, rysunek 4.9 pokazuje, że korelacja pomiędzy nimi jest bardzo silna.

4.3. Zachowanie się modelu dla małego σ

Dotychczas rozważaliśmy zachowanie się układu dla $J = 1$ i $\sigma = 1$. Teraz zmienimy proporcję tych dwóch parametrów, a mianowicie zmniejszymy σ do 0.5, pozostawiając J niezmienione. Zachowanie magnetyzacji w czasie dla parametrów $J = 1$, $\sigma = 0.5$ i $\lambda = 10$ będzie, **czasami**, wyglądało jak na rysunku 4.10. Rzuca się w oczy to, że mamy w takim przypadku więcej,

[6]Jednak, nie zawsze to tak wyglądało; czasami jeden z obszarów płynności ograniczonej był słabo widoczny. Ale zawsze przynajmniej jeden – prawy albo lewy – był widoczny dobrze. Takie zachowanie wynika oczywiście z tego, że w niezbyt długiej symulacji czasami ujemne stany stagnacji utrzymują się dłużej niż dodatnie lub odwrotnie.

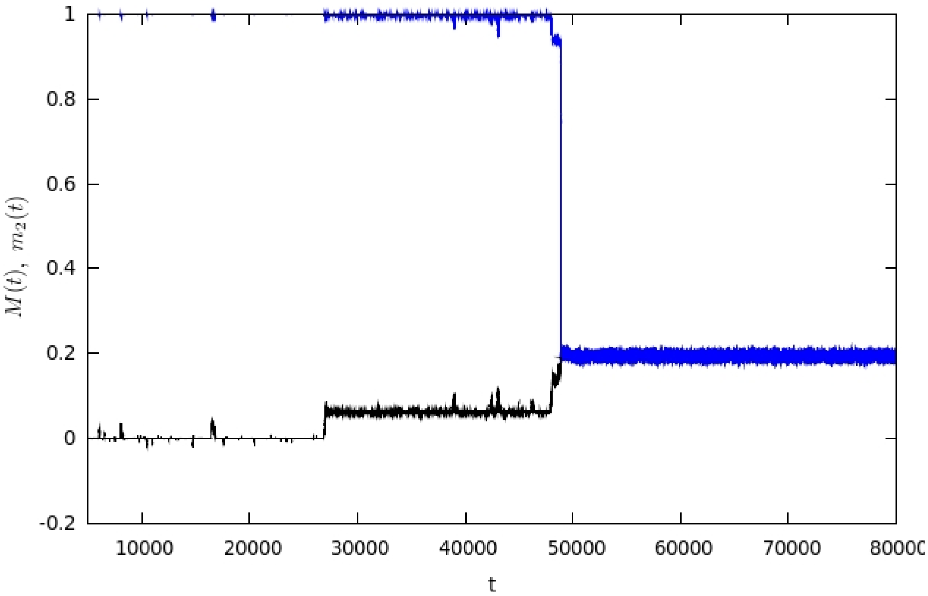


Rysunek 4.10: Ewolucja magnetyzacji w czasie dla małego σ.

niż dwa stany stagnacji – na rysunku 4.10 widać ich trzy[7]. Znamienne jest to, że im bliższy zera stan stagnacji, tym wahania wokół niego mniejsze; dla zera wahań tych prawie nie ma. Poza tym, jak pokazują dłuższe symulacje, po wpadnięciu w stan stagnacji odpowiadający $|M| \approx 0.2$ układ już z niego nie wychodzi. Taki stan stagnacji będziemy zatem nazywali *końcowym*. Właśnie z tego powodu pisałem, że tylko czasami będziemy mieli ciekawe zachowanie magnetyzacji, bo najczęściej układ po prostu od razu (a dokładnie: przed końcem okresu termalizacji) wpadnie w końcowy stan stagnacji. Trudno powiedzieć, czy układ już nigdy nie wyjdzie z końcowego stanu stagnacji, czyli czy jest to stan trwały, ale długie symulacje pokazują, że w najlepszym przypadku jest to głęboki stan metatrwały.
Ciekawe wydaje się pytanie o to, czy stan stagnacji odpowiadający $M = 0$ jest spowodowany tym, że wszystkie spiny się zerują, czy też mamy w nim trochę spinów przyjmujących wartości ± 1. A może wszystkie przyjmują takie wartości i jest ich pół na pół? Aby odpowiedzieć sobie na to pytanie, przyjrzyjmy się wykresowi magnetyzacji z poprzedniego rysunku z nałożoną na niego zależnością $m_2(t)$. Widać je na rysunku 4.11[8]. Widzimy, że dla fragmentów wykresu, dla których $M(t) = 0$ mamy jednocześnie $m_2(t) = 1$. Oznacza to, że wszystkie spiny przyjmują tam wartości ± 1, tyle że jest dokładnie połowa tych równych $+1$ i połowa tych równych -1. Nie powinno to specjalnie dziwić – dla $M(t) = 0$ rynek jest w doskonałej równowadze,

[7]Stany stagnacji dla tego zestawu parametrów są rozmieszczone symetrycznie wokół zera i jest ich pięć: „zerowy", dwa „pośrednie" i dwa „skrajne".

[8]Wydaje się, jakoby na tym rysunku współczynnik m_2 przekraczał czasami wartość 1. Nie jest to jednak prawda – widać to po powiększeniu fragmentu rysunku, gdzie rzekomo tak się dzieje. Prawdopodobnie jest to jakiś błąd programu rysującego Gnuplot.



Rysunek 4.11: $M(t)$ (kolor czarny) i $m_2(t)$ (kolor niebieski) dla małego σ.

więc i płynność jest doskonała i współczynnik m_2 przyjmuje wartość 1. Ciekawsze jest to, że także w „pośrednim" stanie stagnacji, odpowiadającym $M \approx 0.07$, mamy bardzo wysoką płynność, czyli prawie nie ma spinów przyjmujących wartość 0. Natomiast głębszy namysł powinno budzić to, że dla końcowego stanu stagnacji wykres $m_2(t)$ praktycznie pokrywa się z wykresem $M(t)$. Co to może oznaczać? Jeśli przyrównamy do siebie wyrażenia (4.6) i (4.7) na M i m_2, to dostaniemy

$$m_2 \approx M \Leftrightarrow M_+ + M_- \approx M_+ - M_- \Leftrightarrow M_- \approx 0. \tag{4.9}$$

Okazuje się, że kiedy układ wpada w ujemny końcowy stan stagnacji, wykres $m_2(t)$ jest w przybliżeniu odbiciem wykresu $M(t)$ względem zera, a więc

$$m_2 \approx -M \Leftrightarrow M_+ + M_- \approx -M_+ + M_- \Leftrightarrow M_+ \approx 0. \tag{4.10}$$

Czyli dla końcowych stanów stagnacji, dla których mamy $m_2 \approx |M|$, spiny przyjmują prawie wyłącznie dwie wartości: zero (zawsze) i $+1$ dla dodatniego stanu stagnacji albo -1 dla stanu ujemnego. Przy czym – skoro tak i skoro $|M|$ w końcowym stanie stagnacji dla tych parametrów jest równe zaledwie ok. 0.2 – to w tym przypadku tych zer jest całkiem sporo, bo ok. 80% (resztę stanowią same plus jedynki albo same minus jedynki). Zatem w modelu progowym Sieczki i Hołysta, **dla małego σ w dodatnim końcowym stanie stagnacji prawie nie ma inwestorów, którzy sprzedają walory, a w ujemnym – inwestorów, którzy je kupują, w obu tych przypadkach jest jedynie sporo inwestorów oczekujących**. Symulacje dla $\sigma = 1$ pokazują, że nie zawsze jest to prawdą, i dobrze, bo raczej rzadko jest to prawdą na rzeczywistym rynku, gdzie zwykle nawet gdy rynek jest przegrzany, znajdują się jednak tacy inwestorzy, którzy mimo wszystko podejmują decyzję przeciwną do dominującej na rynku. Dlaczego mamy takie, a nie inne zachowanie się modelu dla małego parametru σ? Być może wiąże się to z tym, że pojawienie się końcowego stanu stagnacji to pewne uporządkowanie się układu, w którym pozostają tylko spiny zerowe i spiny o znaku zgodnym ze znakiem magnetyzacji, a małe σ to mały „szum" w układzie, który mógłby powodować występowanie w niektórych miejscach spinów niezgodnych ze wspomnianym uporządkowaniem. Dla większego σ „szum" jest już większy i spiny niezgodne ze znakiem magnetyzacji mogą wystąpić.

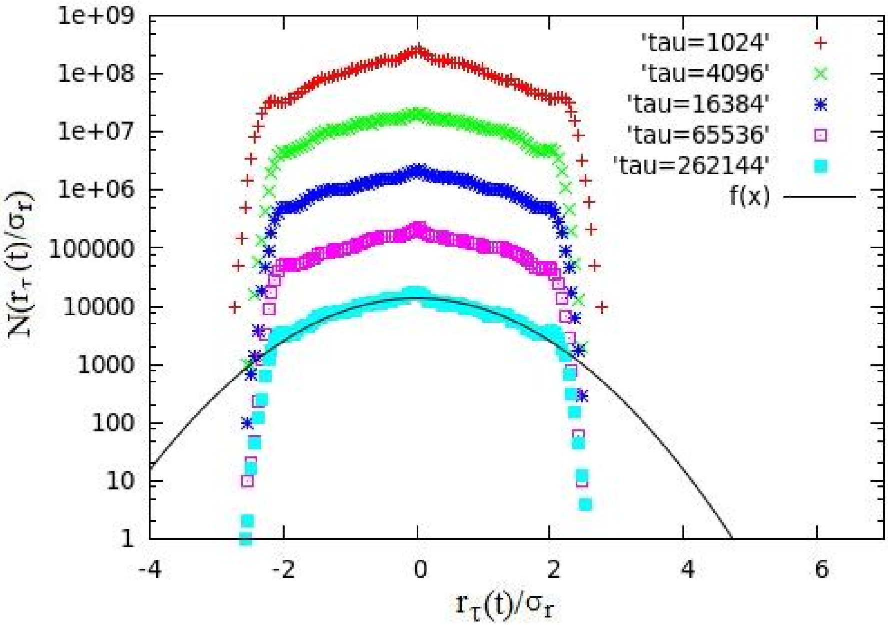
4.4. Złamanie centralnego twierdzenia granicznego

W modelu progowym nie jest spełnione centralne twierdzenie graniczne, tzn. nieprawdą jest to, że rozkład stóp zwrotu dąży do rozkładu normalnego przy wzrastającym do nieskończoności interwale czasowym, czyli że, używając wcześniej wprowadzonych oznaczeń,

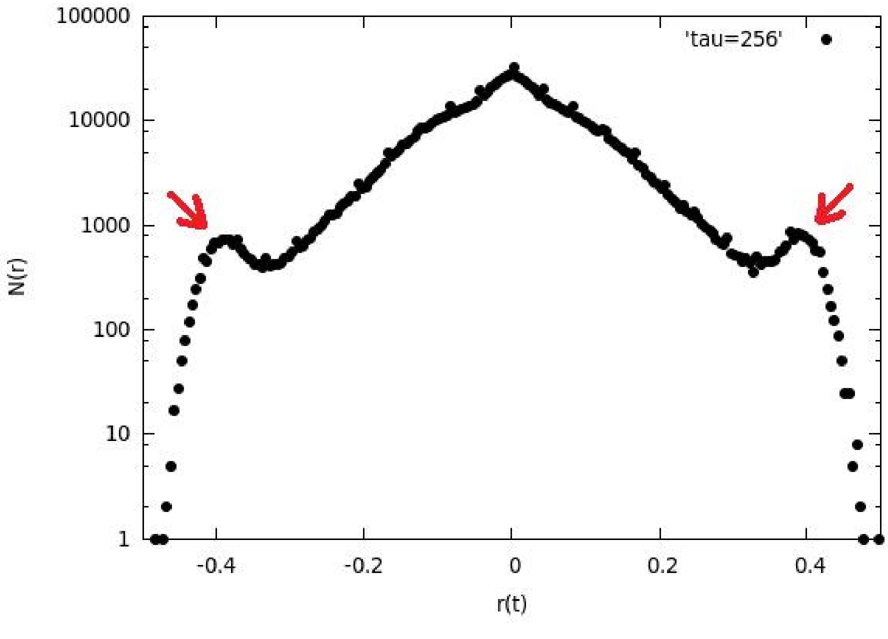
$$\lim_{\tau \to \infty} r_\tau(t) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \tag{4.11}$$

gdzie μ i σ^2 (nie mylić z parametrem σ w wyrażeniu (3.1)) są odpowiednio wartością oczekiwaną i wariancją rozkładu. Jak to było pokazane w rozdziale 3.2, w przypadku modelu progowego Sieczki i Hołysta rozkład stóp zwrotu z rosnącym τ zbliża się do rozkładu Gaussa, ale – przynajmniej dla $\tau = 256$ – nie osiąga go. Pójdźmy dalej i zbadajmy kształty rozkładów $r_\tau(t)$ dla większych τ (kolejnych potęg czwórki, poczynając od 1024). Wyniki moich obliczeń przedstawia rysunek 4.12. Jak widać, **rozbieżność między rozkładem normalnym a rozkładem $\mathbf{r}_\tau(\mathbf{t})$ w modelu Sieczki i Hołysta pozostaje mimo zwiększania** τ. Tu, a może nawet jeszcze bardziej na rysunku 3.3 dla $\tau = 256$, widać charakterystyczne „dzióbki" po bokach rozkładu, stanowiące jego subtelną strukturę. Wyjaśnienie ich występowania, które sygnalizowałem w rozdziale 3.2, jest proste. Przykładowo, przyjrzyjmy się nieprzeskalowanemu zgodnie z odchyleniem standardowym rozkładowi stóp zwrotu $r_{256}(t)$ (rysunek 4.13). Łatwo zauważyć, że „dzióbki" (zaznaczone czerwonymi strzałkami) występują dla $r_{256} \approx \pm 0.4$. Jeśli przytoczymy teraz fragment wykresu magnetyzacji M w czasie dla tych danych (rysunek 4.14), zauważymy, że wartość 0.4 jest przybliżoną różnicą między $\sup_t M(t)$ a $\inf_t M(t)$, czyli między górnym i dolnym brzegiem wykresu magnetyzacji, a jak widzieliśmy wcześniej, w tych obszarach wartość magnetyzacji „lubi" długo przebywać. W związku z tym, przy odpowiednio dużym odstępie czasowym, często zdarzać się będą przeskoki z dolnego do górnego ($r_\tau = +0.4$) i z górnego do dolnego ($r_\tau = -0.4$) krańca wykresu magnetyzacji – stąd zatem biorą się owe charakterystyczne „dzióbki"!

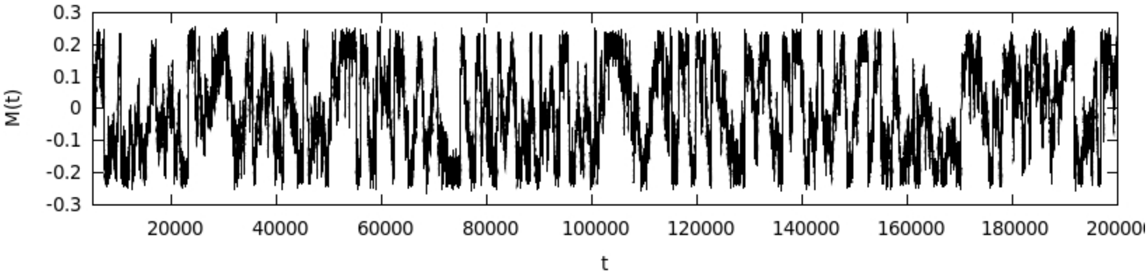
Pozostaje jeszcze wyjaśnić, dlaczego „dzióbki" się nie powiększają ze wzrastającym τ. Otóż, jak widać na rysunku 4.14, przeskoki z ujemnego na dodatni i z dodatniego na ujemny stan



Rysunek 4.12: Rozkłady przeskalowanych stóp zwrotu dla większych τ. Histogramy stopy zwrotu $r_\tau(t)$ dla $J = 1$, $\sigma = 1$, $\lambda = 10$ i różnych kroków czasowych τ. Stopy zostały przeskalowane zgodnie z odpowiednim odchyleniem standardowym σ_r. Rozkłady zostały przesunięte w górę o czynnik 10, 100, 1000 itd. Czarną linią ciągłą zaznaczono rozkład normalny.



Rysunek 4.13: Rozkład stóp zwrotu $r_{256}(t)$ dla $J = 1$, $\sigma = 1$ i $\lambda = 10$.



Rysunek 4.14: Magnetyzacja M w czasie dla danych z rysunku 4.13 (fragment).

stagnacji na wykresie magnetyzacji zdarzają się średnio co jakiś skończony czas. W pewnym momencie wartość τ przekracza już długość tego czasu, w związku z czym liczba przeskoków z dolnego na górny i z górnego na dolny kraniec wykresu magnetyzacji, gdy przeskakujemy o τ do przodu, nie będzie już rosła.

Należy podkreślić, że wykazanie, iż centralne twierdzenie graniczne jest tutaj złamane, stanowi jeden z kluczowych wyników badawczych mojej pracy.

Rozdział 5

Modyfikacja modelu Sieczki i Hołysta

5.1. Motywacja

Autorzy modelu progowego uprościli obliczenia logarytmicznej stopy zwrotu zakładając, że wielkość $P_0(t)$ w wyrażeniu (3.4) na cenę instrumentu finansowego, której ewolucję opisuje ten model, jest stała, równa P_0. Jak było podane, przy takich założeniach zależna od czasu logarytmiczna stopa zwrotu jest dana przez różnicę magnetyzacji w tym i poprzednim kroku czasowym (wzór (3.5)). Jednak, jak to już było powiedziane w rozdziale 3.1, gdzie omawialiśmy założenia modelu Sieczki-Hołysta, $P_0(t)$ w ogólności powinno podlegać tzw. geometrycznemu ruchowi Browna, czyli logarytm tej wielkości powinien podlegać ruchowi Browna. Może trochę dziwić, dlaczego autorzy nie poszli tym tropem, nie jest bowiem trudno wprowadzić w kodzie programu modyfikację, która oblicza stopy zwrotu przy założeniu błądzenia $P_0(t)$ zgodnie z tym schematem. Najważniejsza korzyść związana z wprowadzeniem takiej modyfikacji to, jak zobaczymy, bardziej realne wykresy ceny waloru (dotychczas cena wyglądała bardzo podobnie do magnetyzacji, czyli mało realnie). Wydaje mi się, że jedną z przyczyn mogło być to, że wprowadzane są w ten sposób do modelu dodatkowe parametry: początkowa cena waloru $P_0(0)$, odchylenie standardowe, σ_P, rozkładu normalnego, z którego losowane są zmiany logarytmu ceny oraz wartość średnia tego rozkładu. Interesujące wydaje się pytanie, czy (jeśli w ogóle) wprowadzenie takiej modyfikacji do modelu zmieni charakter uzyskanych wyników, a w szczególności czy rynkowe fakty stylizowane dotychczas odtwarzane przez model, nadal bedą przezeń odtwarzane. Na to właśnie pytanie będę starał się odpowiedzieć w tym rozdziale.

5.2. Założenia

Równanie stochastyczne dla geometrycznego ruchu Browna przyjmuje postać[1]:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \tag{5.1}$$

[1] Poniższe obliczenia przeprowadzono na podstawie [3] oraz [2].

gdzie W_t to proces Wienera centrowany w zerze o dyspersji jednostkowej, zaś μ i σ (nie mylić z parametrem σ ze wzoru (3.1) na $s_i(t)$) są stałymi. Rozwiązaniem tego równania jest

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t\right), \tag{5.2}$$

z czego wynika, że

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) \sim \mathcal{N}\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t, \sigma^2 t\right). \tag{5.3}$$

Tutaj $S_t \equiv P_0(t)$ oraz $\sigma^2 \equiv \sigma_P^2$. Mamy zatem zależność

$$\ln\left(\frac{P_0(t)}{P_0(t-1)}\right) \sim \mathcal{N}\left(\left(\mu - \frac{\sigma_P^2}{2}\right), \sigma_P^2\right). \tag{5.4}$$

W symulacji przyjąłem cenę początkową $P_0(0) = 10$, $\sigma_P = 0.005$ oraz, aby zredukować do niezbędnego minimum liczbę parametrów w modelu, $\mu = 0.0000125$ tak, iż

$$P_0(t) = P_0(t-1) \cdot e^{a(t)}, \quad \text{gdzie } a(t) \sim \mathcal{N}(0, 0.005), \tag{5.5}$$

przy czym $a(t)$ w kolejnych chwilach czasu t są od siebie niezależne.

5.3. Wyniki symulacji

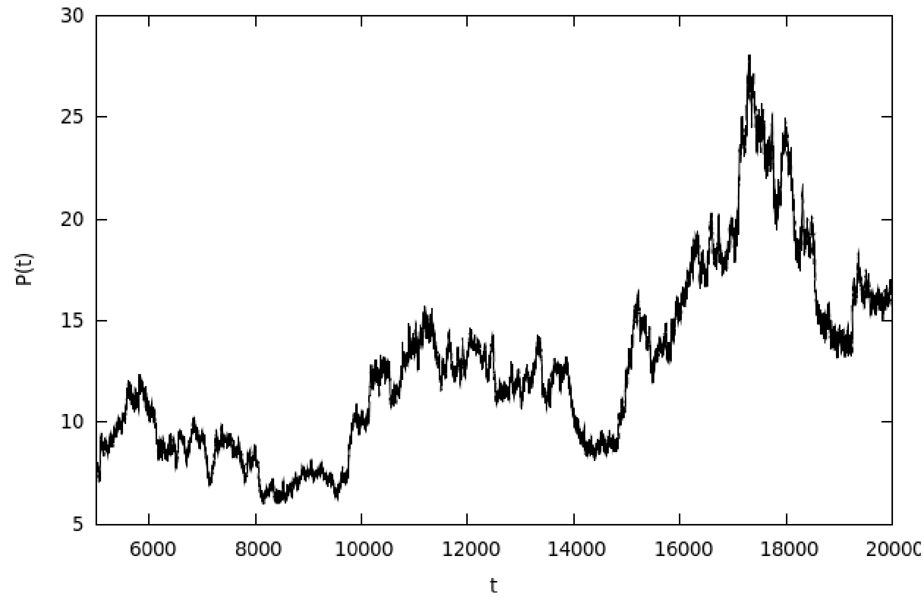
5.3.1. Wariogramy stóp zwrotu

Rysunek 5.1 przedstawia przykładową ewolucję ceny instrumentu finansowego, opisywanej przez model, dla parametrów $J = 1$, $\sigma = 1$ i $\lambda = 10$. Widać, że nasz wykres jakościowo przypomina wykresy ceny instrumentów finansowych z rynków rzeczywistych. Kolejny rysunek, 5.2, jest analogiem rysunku 3.1 – przedstawia wariogramy stóp zwrotu dla $J = 1$, $\sigma = 1$ i różnych λ. Rysunek ten jakościowo bardzo przypomina rysunek 3.1.

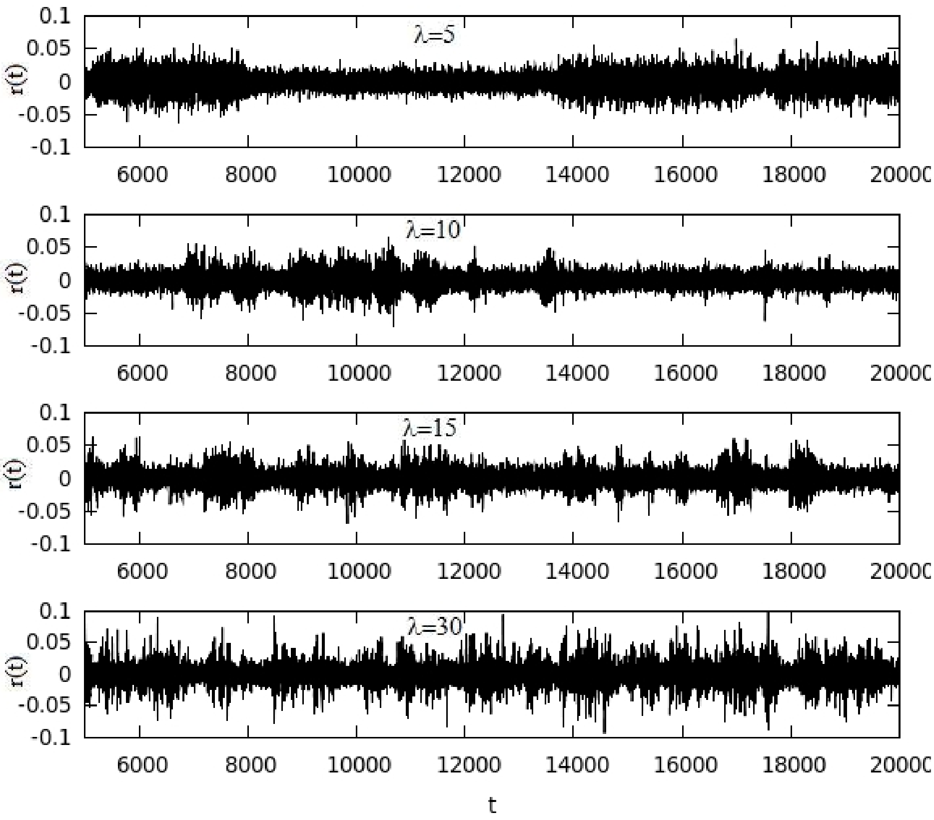
Wybór σ_P równego właśnie 0.005 był podyktowany tym, że, jak się okazało, dla zbyt dużej wartości tego parametru w trakcie symulacji zdarzają się zbyt duże skoki $P_0(t)$, które na rzeczywistym rynku raczej nie powinny mieć miejsca. Poza tym zaciera się efekt grupowania zmienności – zmniejsza się różnica pomiędzy stanami o dużej zmienności a tymi o zmienności mniejszej, co – dla $J = 1$, $\sigma = 1$, $\lambda = 5$ i różnych σ_P – pokazuje rysunek 5.3.

Jaka może być przyczyna takiej zmiany w wyglądzie wariogramów? Prawdopodobnie jest ona wynikiem tego, że na całkowitą zmienność wpływają teraz dwa efekty, co pokazuje wyrażenie na logarytmiczną stopę zwrotu z inwestycji (por. wyrażenie (2.18)):

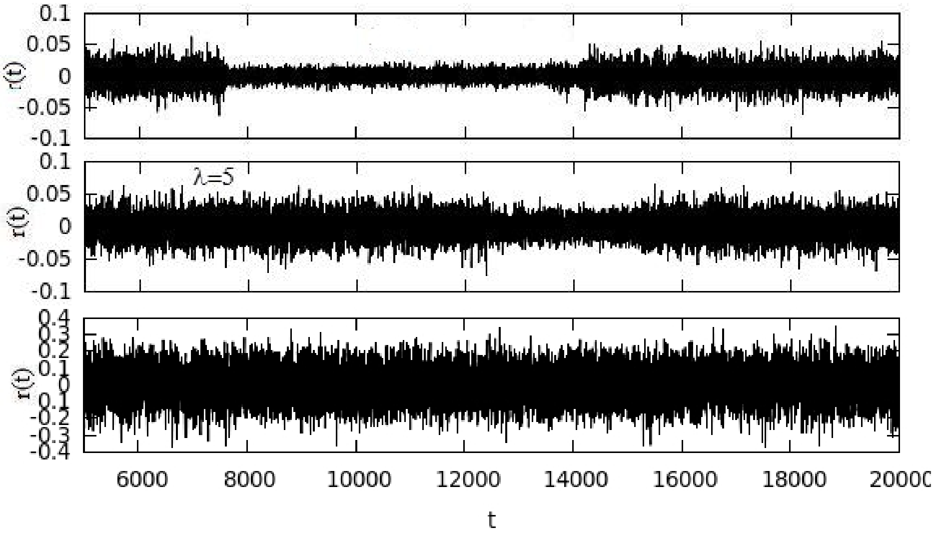
$$\begin{aligned} r(t) &= \ln\left(\frac{P(t)}{P(t-1)}\right) = \ln\left(\frac{P_0(t) \cdot e^{M(t)}}{P_0(t-1) \cdot e^{M(t-1)}}\right) = \\ &= \ln(P_0(t)) - \ln(P_0(t-1)) + M(t) - M(t-1) = \\ &= r^P(t) + r^M(t), \end{aligned} \tag{5.6}$$



Rysunek 5.1: Wykres ceny w zmodyfikowanym modelu Sieczki i Hołysta.



Rysunek 5.2: Wariogramy stóp zwrotu w zmodyfikowanym modelu Sieczki i Hołysta.



Rysunek 5.3: Zanikanie grupowania wariancji wraz ze zwiększaniem σ_P. Wprowadzenie P_0 zależnego od czasu powoduje zmiejszenie grupowania zmienności na wariogramie. Efekt jest tym silniejszy, im większe σ_P. Górny rysunek pokazuje przypadek $P_0 = const$ ($\sigma_P = 0$), środkowy: $\sigma_P = 0.01$, zaś dolny: $\sigma_P = 0.1$.

gdzie skorzystaliśmy ze wzoru (3.4) na cenę waloru. Widzimy zatem, że nowa stopa zwrotu składa się z dwóch członów:

$$r^M(t) = M(t) - M(t-1) \tag{5.7}$$

to dotychczasowa, „stara" stopa z wyrażenia (3.5), natomiast

$$r^P(t) = \ln(P_0(t)) - \ln(P_0(t-1)) \tag{5.8}$$

to dodatkowy składnik, związany z tym, że $P_0(t)$ zmienia się z okresu na okres. Korzystając ze wzoru (5.5), łatwo dostajemy, że

$$r^P(t) \sim \mathcal{N}(0, 0.005), \tag{5.9}$$

czyli człon $r^P(t)$ ma rozkład gaussowski o średniej 0 i wariancji równej 0.005.
Zatem pierwszy efekt wpływający na całkowitą zmienność to zmiany magnetyzacji, związane ze składnikiem $r^M(t)$ – to już mieliśmy dotychczas. Natomiast efekt drugi, nowy, to zmiany $P_0(t)$ w czasie, związane z członem $r^P(t)$ (por. wyrażenie (5.6)). Można się kłócić, że przecież dodatkowy człon wpływa na zmienność w każdym momencie, także wtedy, gdy jest ona większa. Faktycznie, tak jest, jednak ponieważ efekt zwiększenia zmienności związany z członem $r^P(t)$ jest jednakowy w każdym momencie (bo parametry geometrycznego ruchu Browna nie zmieniają się w czasie), zaciera się różnica pomiędzy grubszymi i cieńszymi fragmentami wariogramu i całość wydaje się bardziej jednolita. Zauważmy, jak duża jest całkowita

zmienność dla $\sigma_P = 0.1$! Można też polemizować, że człon $r^P(t)$ może mieć przeciwny znak, niż $r^M(t)$, w związku z czym czasami zmienność może być mniejsza. To prawda, ale nie będzie tego widać na wariogramie, ponieważ jest on bardzo zagęszczony i zawsze są na nim widoczne tylko największe i najmniejsze w danym momencie stopy zwrotu, których moduł stanie się większy gdy będziemy mieli dwa człony odpowiedzialne za zmienność, a nie jeden.
Z drugiej strony, σ_P nie może też być za małe, gdyż im jest ono mniejsze, tym bardziej nasz model przypomina swoją niezmodyfikowaną wersję i wykres ceny przypomina wykres magnetyzacji, czyli wygląda mało przekonująco. Starałem się zatem wybrać złoty środek pomiędzy nierealnie dużymi a nierealnie małymi wartościami parametru σ_P i wybrałem, metodą prób i błędów, właśnie wartość 0.005.

5.3.2. Stopa zwrotu z opóźnieniem czasowym w modyfikacji modelu

Sieczka i Hołyst zdefiniowali w swoim modelu logarytmiczną stopę zwrotu z opóźnieniem czasowym τ. Ich wyrażenie – (3.6) – było bardzo proste, ale oczywiście teraz się ono zmieni, podobnie jak zmieniło się wyrażenie na zwykłą stopę zwrotu $r(t)$. Nowa logarytmiczna stopa zwrotu z opóźnieniem czasowym, obliczona analogicznie jak nowe $r(t)$, to

$$\begin{aligned} r_\tau(t) &= \ln\left(\frac{P(t)}{P(t-\tau)}\right) = \ln\left(\frac{P_0(t)\cdot e^{M(t)}}{P_0(t-\tau)\cdot e^{M(t-\tau)}}\right) = \\ &= \ln(P_0(t)) - \ln(P_0(t-\tau)) + M(t) - M(t-\tau) = \\ &= r_\tau^P(t) + r_\tau^M(t), \end{aligned} \tag{5.10}$$

gdzie interpretacja członów $r_\tau^M(t)$ oraz $r_\tau^P(t)$ jest podobna, jak interpretacja członów $r^M(t)$ oraz $r^P(t)$ w wyrażeniu (5.6). Warto zauważyć następującą rzecz,

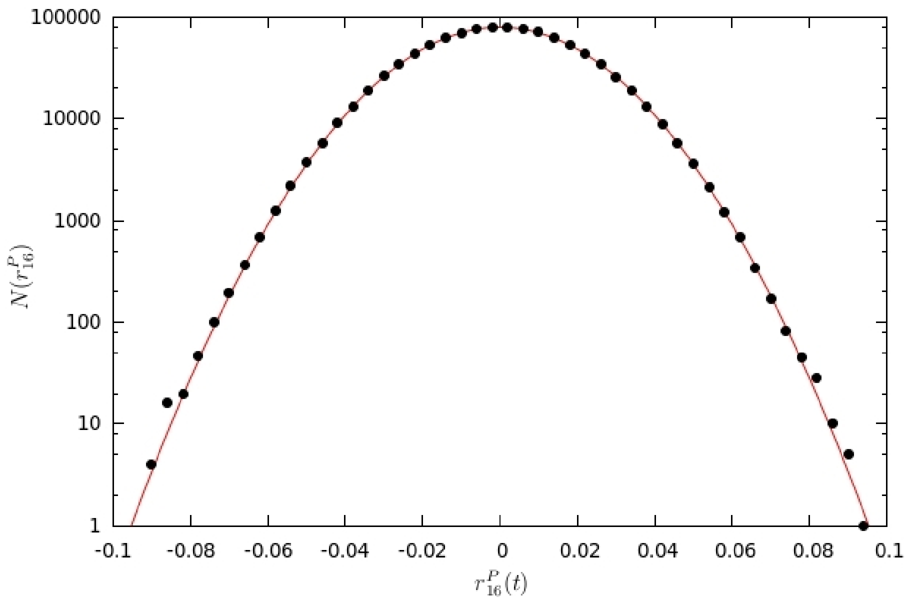
$$r_\tau^P(t) = r^P(t) + r^P(t-1) + \cdots + r^P(t-\tau+1) \sim \mathcal{N}(0, \sqrt{\tau\cdot 0.005^2}). \tag{5.11}$$

Widać, że $r_\tau^P(t)$ podlega rozkładowi Gaussa jako suma zmiennych z tego rozkładu, co wynika z CTG (por. zależność (5.9)). Wartość oczekiwana tego rozkładu będzie oczywiście nadal równa 0, jednak czy jego wariancja będzie równa po prostu $\tau\cdot 0.005^2$? Zmienne te nie są niezależne, ponieważ mają parami wspólne człony, ale, jak się okazuje, ich kowariancja jest równa 0 tak, że wariancja rozkładu, któremu podlega $r_\tau^P(t)$ jest równa właśnie $\tau\cdot 0.005^2$. Obliczmy to. Skorzystamy ze wzoru (5.5),

$$r_1^P(t) = r^P(t) = \frac{\ln(P_0(t))}{\ln(P_0(t-1))} = a(t), \quad \text{gdzie } a(t) \sim \mathcal{N}(0, 0.005). \tag{5.12}$$

Jednocześnie, dysponujemy definicją kowariancji

$$\mathrm{Cov}(x,y) = \mathrm{E}(x\cdot y) - \mathrm{E}(x)\cdot\mathrm{E}(y), \tag{5.13}$$



Rysunek 5.4: Statystyka $r^P_{16}(t)$ wraz z dopasowaną krzywą gaussowską.

gdzie $\mathrm{E}(\cdot)$ oznacza wartość oczekiwaną. Z tych dwóch wyrażeń dostajemy

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(r^P(t), r^P(t-1)) &= \mathrm{E}(a(t)\cdot a(t-1)) - \mathrm{E}(a(t))\cdot \mathrm{E}(a(t-1)) = \\ &= \mathrm{E}(a(t))\cdot \mathrm{E}(a(t-1)) - \mathrm{E}(a(t))\cdot \mathrm{E}(a(t-1)) = 0,\end{aligned} \tag{5.14}$$

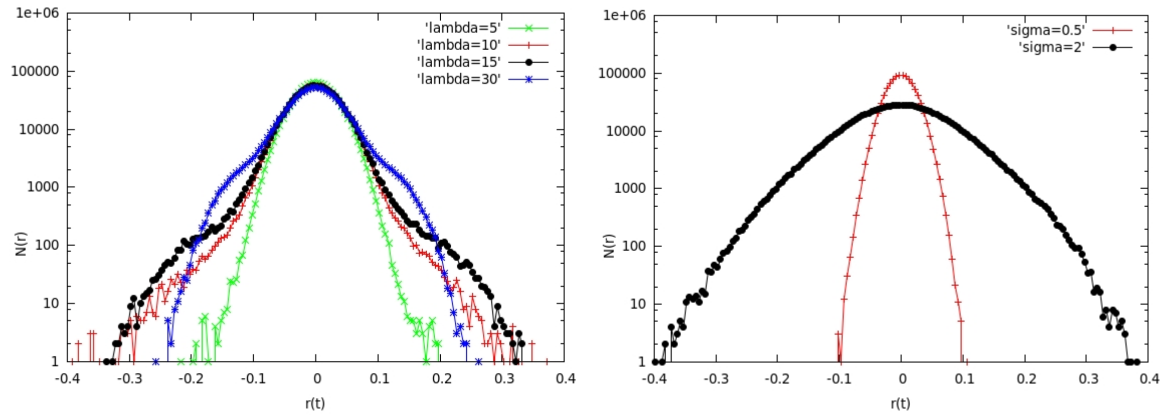
gdzie skorzystaliśmy z tego, że $a(t)$ i $a(t-1)$ są dwiema niezależnymi zmiennymi losowanymi z rozkładu normalnego (odwołując się do sposobu realizacji geometrycznego ruchu Browna w kodzie programu symulacyjnego). Analogicznie obliczyć można

$$\mathrm{Cov}(r^P(t), r^P(t-\tau')) = 0, \tag{5.15}$$

gdzie τ' jest dowolną liczbą między 1 a τ ze wzoru (5.11). Skoro zaś kowariancja między dowolnymi ze zmiennych jest równa zero, to wariancja sumy zmiennych jest sumą wariancji tych zmiennych, a ponieważ wariancje te są takie same, to

$$\mathrm{Var}(r^P_\tau(t)) = \tau\sigma_P^2. \tag{5.16}$$

Jako że $\sigma_P = 0.005$, to $\mathrm{Var}(r^P_\tau(t)) = \tau \cdot 0.005^2$, tak jak postulowaliśmy.
Sprawdźmy, czy obliczenia zgadzają się z rzeczywistością. Rysunek 5.4 przedstawia statystykę $r^P_{16}(t)$ oraz dopasowaną do niej w programie Gnuplot krzywą gaussowską. Jak widać, dopasowanie jest bardzo dobre – faktycznie mamy do czynienia z rozkładem normalnym. Parametr σ tej krzywej obliczony z dopasowania to 0.0200648, co dobrze zgadza się z wartością teoretyczną, równą $\sqrt{16 \cdot 0.005^2} = 0.02$.

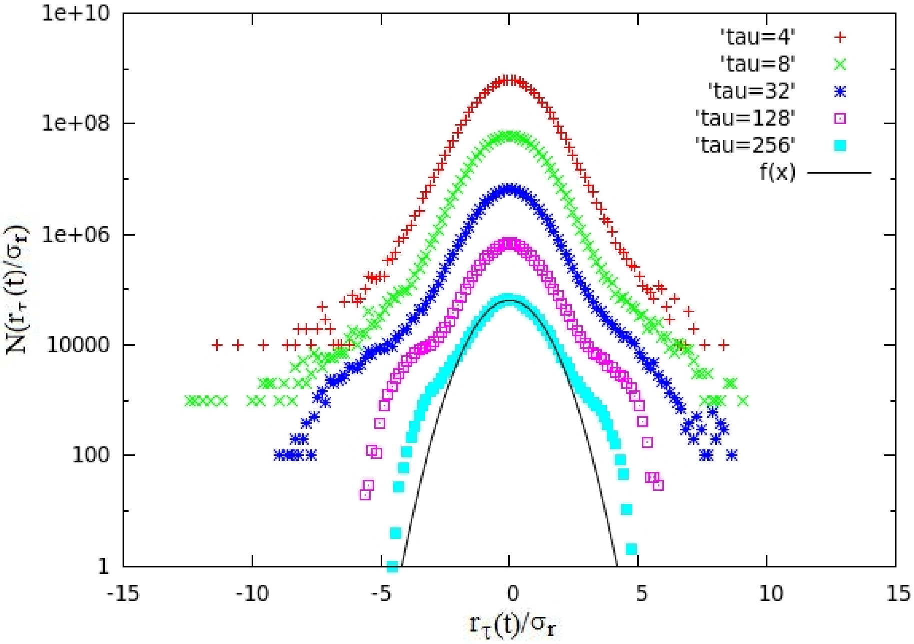


Rysunek 5.5: Statystyki stóp zwrotu w modelu zmodyfikowanym. Po lewej: $J = 1$, $\sigma = 1$ i różne λ. Po prawej: $J = 1$, $\lambda = 10$ i różne σ.

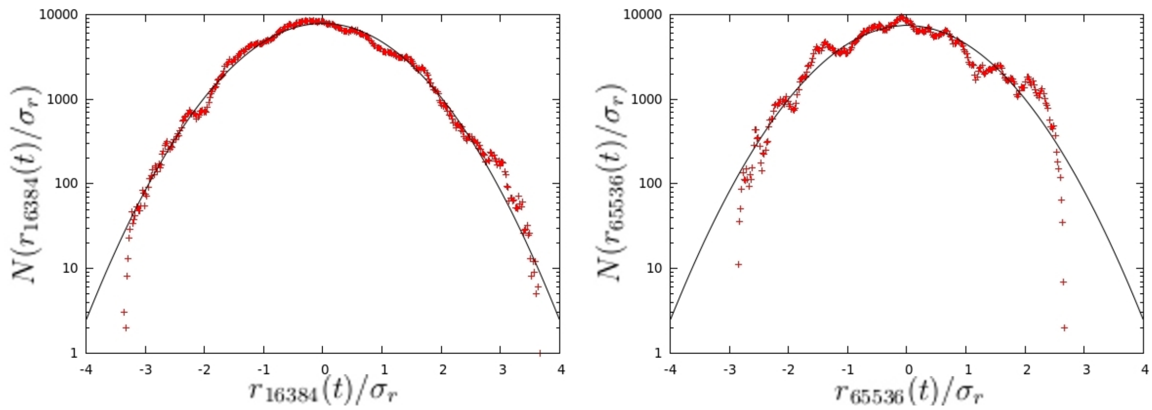
5.3.3. Pozostałe wyniki

Przyjrzyjmy się teraz, jak wyglądają rozkłady stóp zwrotu $r_{16}(t)$ dla różnych parametrów zmodyfikowanego modelu progowego. Przedstawia je rysunek 5.5. Ogólnie rozkłady stóp zwrotu w modyfikacji modelu progowego są podobne do tych, które przedstawiłem w rozdziale 3.2 na rysunku 3.2. Największą różnicą, która od razu rzuca się w oczy, jest pogrubienie rozkładu $r(t)$. Jest to widoczne szczególnie wtedy, gdy pierwotna grubość rozkładu była niewielka, a więc w pierwszej kolejności dla $J = 1$, $\sigma = 0.5$ i $\lambda = 10$ (prawa część rysunku, kolor czerwony), a potem dla $J = 1$, $\sigma = 1$ i $\lambda = 5$ (po lewej, kolor zielony). Jest to wyraz tego, o czym już mówiliśmy omawiając wariogramy – doszła nam dodatkowa zmienność związana z członem $r^P(t)$ i to ona sprawiła, że rozkłady są grubsze. Przy dokładniejszym porównaniu rysunków 3.2 oraz 5.5 można też zauważyć, że rozkład jakby nieco spłaszczył się u góry – gdy pojawiła się dodatkowa zmienność, związana z członem $r^P_{16}(t)$, mniej jest zerowych stóp zwrotu.

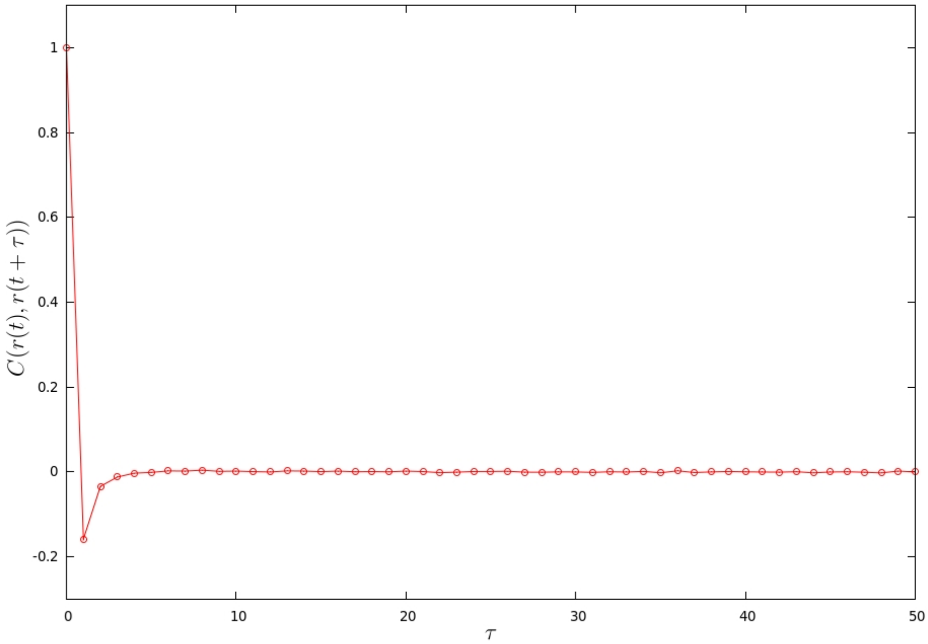
Kolejny rysunek, 5.6, przedstawia zanikanie grubych ogonów wraz z rosnącym krokiem czasowym τ w zmodyfikowanej wersji modelu. Tu zwraca uwagę przede wszystkim to, że opisywane przeze mnie przy okazji rysunku 3.3 i później w rozdziale 4.4 charakterystyczne „dzióbki" zmniejszyły się. Zatem dodanie błądzenia geometrycznego do ewolucji ceny powoduje ścięcie „dzióbków". W związku z tym, że tego typu „dzióbki" nigdy nie były obserwowane na rzeczywistych rynkach, przedstawiona przeze mnie modyfikacja modelu, przynajmniej pod tym względem, wydaje się właściwsza. Co dzieje się dla jeszcze większych τ? Rysunek 5.7 przedstawia dwa rozkłady – dla $\tau = 16384$ i $\tau = 65536$ – wraz z dopasowanym rozkładem normalnym. Widać, że dla $\tau = 16384$ (lewa część rysunku), rozkład bardzo przypomina rozkład normalny. Są pewne odstępstwa, nieregularności, ale ogólnie rozkład ten znacznie bardziej przypomina Gaussowski, niż analogiczny rozkład w pierwotnej wersji modelu (patrz rysunek



Rysunek 5.6: Zanikanie grubych ogonów z rosnącym τ w modyfikacji modelu. Histogramy stopy zwrotu $r_\tau(t)$ dla $J = 1$, $\sigma = 1$, $\lambda = 10$ i różnych kroków czasowych τ. Stopy zostały przeskalowane zgodnie z odpowiednim odchyleniem standardowym σ_r. Rozkłady zostały przesunięte w górę o czynnik 10, 100, 1000 itd. Czarną linią ciągłą zaznaczono rozkład normalny.



Rysunek 5.7: Rozkłady przeskalowanych $r_\tau(t)$ dla większych τ w modyfikacji modelu. Histogramy stopy zwrotu $r_\tau(t)$ dla $J = 1$, $\sigma = 1$, $\lambda = 10$ oraz $\tau = 16384$ (po lewej) i $\tau = 65536$ (po prawej). Stopy zostały przeskalowane zgodnie z odpowiednim odchyleniem standardowym σ_r. Czarną linią ciągłą zaznaczono rozkład normalny.

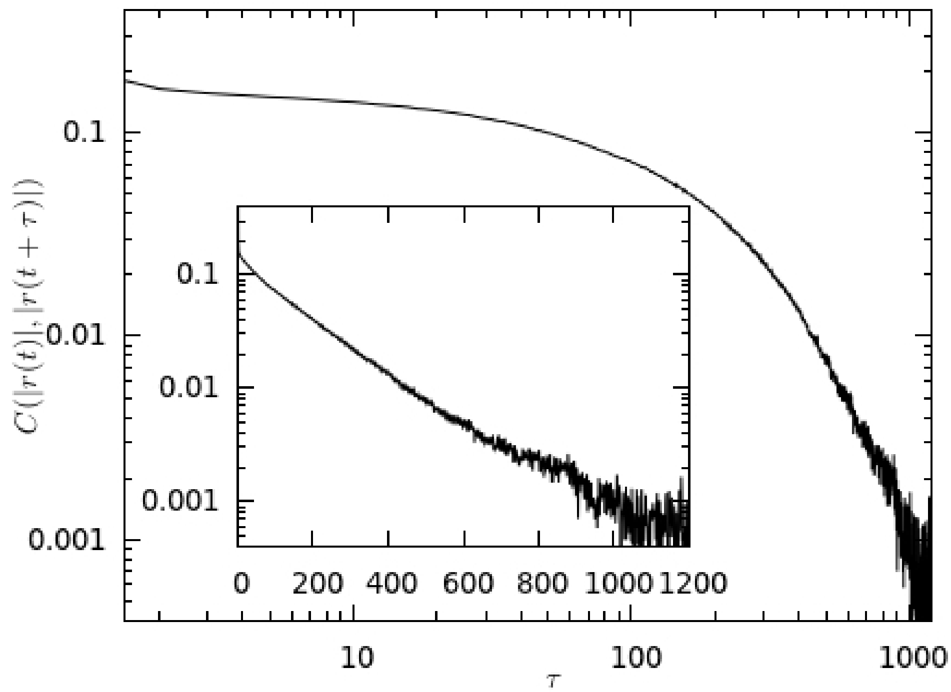


Rysunek 5.8: Autokorelacja stopy zwrotu w modyfikacji modelu.

4.12, kolor niebieski). Zastanawiające jest to, że parametr σ_P rozkładu Gaussa dopasowanego w programie Gnuplot do rozkładu empirycznego dla $\tau = 16384$ jest bliski jedności (0.995102). Nie jest to parametr σ_P rozkładu r^P_{16384}, bo ten jest równy $\sqrt{16384 \cdot 0.005^2} = 0.64$. Być może więc jest to tylko zbieg okoliczności. Jeśli chodzi o $\tau = 65536$ (prawa część rysunku), to podobieństwo do rozkładu normalnego jest już znacznie mniejsze. Nieregularności są wyraźniejsze, a poza tym rozkład jest jakby obcięty po bokach (w niewielkim stopniu było to już widać dla $\tau = 16384$).

Funkcja autokorelacji stóp zwrotu, przedstawiona na rysunku 5.8, wygląda bardzo podobnie do swojej odpowiedniczki w modelu niezmodyfikowanym. Różni się jedynie głębokością początkowego „dołka" – w wersji niezmodyfikowanej jest to prawie dokładnie -0.2, a tutaj trochę mniej, w okolicach -0.16. Dodatkowy człon $r^P(t)$ w nowej stopie zwrotu $r(t)$ powoduje takie właśnie spłaszczenie – autokorelacja obliczana tylko dla tego członu natychmiast spada do (prawie) zera, co nie powinno dziwić, skoro kolejne stopy zwrotu $r^P(t)$ są kolejnymi niezależnymi zmiennymi z rozkładu Gaussa $a(t)$ (por. wyrażenie (5.12)). Uśrednienie zachowania się autokorelacji tego składnika i składnika $r^M(t)$ powoduje takie spłaszczenie „dołka" funkcji autokorelacji stóp zwrotu.

Pozostało nam jeszcze przyjrzenie się funkcji autokorelacji modułów stóp zwrotu (rysunek 5.9). Jak widać, kształt funkcji autokorelacji pozostał niezmieniony. Dla symulacji o długości 10 mln kroków czasowych, który to przypadek został pokazany na rysunku 5.9, do $\tau = 1200$ nie było wartości ujemnych tej funkcji, poza tym całość jest jakby bardziej podobna do tego,



Rysunek 5.9: Autokorelacja modułu stopy zwrotu w modyfikacji modelu.

co otrzymali autorzy w oryginalnym modelu (patrz rysunek 3.5, u góry), ale tu oczywiście mamy do czynienia z nieco innym modelem, więc to podobieństwo jest raczej przypadkowe. Ogólnie jednak autokorelacja nadal zanika eksponencjalnie, a nie potęgowo, jak na rzeczywistych rynkach, pod tym względem zatem nie ma ani pogorszenia, ani polepszenia.

Zatem moja urealniająca model modyfikacja nie zaburza odtwarzania przez niego faktów stylizowanych, a w dodatku rozkład stóp zwrotu z opóźnieniem czasowym $r_\tau(t)$ ma słabiej widoczne nieregularności, „dzióbki". W związku z tym, że na rzeczywistych rynkach nie są one obserwowane, ta wersja modelu progowego wydaje się właściwsza.

Rozdział 6

Podsumowanie

6.1. Co zostało zrobione w tej pracy

Praca ta składała się z swóch zasadniczych części: części monograficznej oraz części opisującej moje własne badania. Osią pracy był progowy model rynków finansowych, zaproponowany przez Pawła Sieczkę i Janusza A. Hołysta z Wydziału Fizyki Politechniki Warszawskiej. W części monograficznej opisano najpierw modele, które posłużyły autorom jako inspiracja do sformułowania modelu progowego, a w końcu sam model progowy, w ramach którego badano dynamikę ceny instrumentu finansowego. Wyniki były uzyskane na bazie symulacji komputerowych, metodą dynamiki statystycznej. Wraz z prezentacją wyników opisanych w pracy [16], pokazałem także moje ich odtworzenie. W większości przypadków (wariogramy stóp zwrotu z grupowaniem wariancji, rozkłady tychże z grubymi ogonami zanikającymi wraz z rosnącym krokiem czasowym, funkcja autokorelacji stóp zwrotu) wyniki moje i autorów były bardzo podobne, z wyjątkiem funkcji autokorelacji wartości bezwzględnych stóp zwrotu, która co prawda nadal była funkcją eksponencjalną, jednak przebiegała niżej niż oryginał i przyjmowała także wartości ujemne.
W części z moimi własnymi wynikami najpierw opisałem badania nad klasycznym modelem Sieczki-Hołysta. Stwierdziłem, że rozkłady stóp zwrotu z opóźnieniem czasowym odbiegają od gaussowskich nawet dla bardzo dużego opóźnienia – obserwacja ta wykracza poza pracę doktorską Pawła Sieczki [15]. Następnie zbadałem zmodyfikowany model, w którym zmiany cen były spowodowane nie tylko zmianami magnetyzacji, lecz również geometrycznym błądzeniem brownowskim ceny fundamentalnej. Ta wersja modelu, choć zasugerowana niejako w pracy [16], nie była badana przez autorów modelu. Dopiero tu uzyskano, jak się wydaje, spełnienie centralnego twierdzenia granicznego, choć dla asymptotycznie dużych wartości opóźnienia czasowego pozostaje ono złamane.

6.2. Propozycje dalszych badań

Na koniec pragnę zasygnalizować rzeczy, których nie zbadałem w tej pracy, a którymi warto by się jeszcze zająć:

- Wszystkie symulacje były przeprowadzone, w zgodności z symulacjami autorów, dla macierzy 32 na 32 agentów. Warto by zbadać zachowanie się układu dla innych, w szczególności większych (na rzeczywistych rynkach jest wszak więcej, niż 1024 inwestorów) wymiarów tej macierzy. Pojawia się tu problem złożoności obliczeniowej – dla większej macierzy agentów symulacja będzie dłużej trwała. Mimo wszystko w większości przypadków nie będzie to dużą przeszkodą. Symulacja o długości 100000 kroków czasowych dla macierzy 32 na 32 trwała tylko 40 sekund, dla macierzy 64 na 64 powinna więc potrwać około 2.5 minuty.

- Być może sporo ciekawych obserwacji można by było poczynić, badając, jak zmienia się macierz agentów w kolejnych krokach czasowych. Mam tu na myśli wizualizację tej macierzy, gdzie każda z decyzji inwestycyjnych, tj. „kupuj", „sprzedawaj" i „czekaj" byłaby oznaczona innym kolorem. Ciekawe zwłaszcza byłoby zachowanie się tej macierzy w stanach stagnacji (np. czy tworzą się klastry jednakowych decyzji inwestycyjnych).

- W niniejszej pracy przedstawiłem modyfikację modelu opartą na uogólnionej definicji ceny waloru. Oczywiście, jest możliwe wiele innych modyfikacji, np. J, σ czy λ zależne od agenta lub od czasu (niektóre z tych pomysłów mieliśmy już w modelu Iori), macierz interakcji z wolno malejącym oddziaływaniem lub niesymetryczna, trójkątna sieć agentów zamiast prostokątnej albo prostokątna macierz agentów, wprowadzenie do modelu obrotów (czy jest dodatnia korelacja pomiędzy obrotami a zmiennością), redefinicja ceny waloru, a nawet redefinicja lokalnej dynamiki czy zmiennej spinowej $s_i(t)$ (możliwa na wiele różnych sposobów). Propozycji można podać wiele i niewykluczone, że część z takich modyfikacji okazałaby się sensowna, dając wyniki zgodne z faktami stylizowanymi, być może nawet zanikającą w sposób potęgowy funkcję autokorelacji wartości bezwzględnych stóp zwrotu, czego nie udało się osiągnąć w podstawowej wersji modelu progowego. Brownowska modyfikacja modelu, którą przebadałem, nie popsuła odtwarzania przez niego faktów stylizowanych, a nawet trochę je poprawiła, co daje nadzieję na taką modyfikację, która mogłaby odtwarzanie tych faktów jeszcze bardziej poprawić.

Widzieliśmy, że założenia modelu progowego Sieczki i Hołysta są proste i że generuje on bardzo obiecujące, bo odtwarzające rynkowe fakty stylizowane, wyniki. Ogólnie zatem można powiedzieć, że jest on dobrym punktem startowym/inspiracją do stworzenia bardziej rozbudowanego modelu rynków finansowych, który, bazując na tak solidnej podstawie, ma szanse odtworzyć jeszcze więcej faktów stylizowanych, a może nawet posłużyć do przewidywania zachowania się rynku. Model progowy jest na tyle obiecującym modelem rynku, że na pewno warto zająć się nim dogłębniej, niż zostało to uczynione w tej pracy, ze szczególnym naciskiem na ewentualne uogólnienia i modyfikacje.

Bibliografia

[1] S. Bornholdt, Expectation bubbles in a spin model of markets: intermittency from frustration across scales, *Int. J. Mod. Phys. C* **12**, 667 (2001).

[2] coin.wne.uw.edu.pl/∼tmostowski/pliki/matlab/matlab7.pdf

[3] en.wikipedia.org

[4] E.F. Fama, Efficient capital market: a review of theory and empirical work, *J. Finance* **25**, 383 (1970).

[5] M. Granovetter, Threshold Models of Collective Behavior, *The American Journal Of Sociology* **83** (6), 1420 (1978).

[6] T. Gubiec, dyskusja prywatna (2011).

[7] K. Huang, Mechanika statystyczna, przeł. Z. Ajduk, M. Cieplak, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1978.

[8] G. Iori, A microsimulation of traders activity in the stock market: the role of heterogeneity, agents' interactions and trade frictions, *Journal of Economic Behaviour and Organization* **49** (2), 269 (2002).

[9] E. Ising, Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus, *Z. Phys.* **31**, 253 (1925).

[10] T. Kaizoji, S. Bornholdt, Y. Fujiwara, Dynamics of price and trading volume in a spin model of stock markets with heterogeneous agents, *Physica A* **316**, 441 (2002).

[11] W. Lenz, Beiträge zum Verständnis der magnetischen Eigenschaften in festen Körpern, *Physikalische Zeitschrift* **21**, 613 (1920).

[12] L. Onsager, Crystal statistics. I. A two-dimensional model with an order-disorder transition, *Phys. Rev. (2)* **65**, 117 (1944).

[13] pl.wikipedia.org

[14] P. Sieczka, dyskusja prywatna (2010).

[15] P. Sieczka, Efekty kolektywne w modelowaniu ryzyka finansowego – rozprawa doktorska (2010).

[16] P. Sieczka, J.A. Hołyst, A Threshold Model of Financial Markets, *Acta Physica Polonica A* **114** (3), 525 (2008).

[17] N.G. van Kampen, Procesy stochastyczne w fizyce i chemii, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1990.