Zadanie 1 Dla $f \in L^2([0,\infty[)$ definiujemy

$$(Tf)(x) := 2x^{-1} f(4x^{-1}).$$

Pokazać, że

(i) T jest operatorem samosprzężonym,
(ii) T jest operatorem unitarnym,
(iii) $T^2 = \mathbb{1}$,
(iv) $\frac{1}{2}(\mathbb{1} + T)$ jest rzutem ortogonalnym.

Zadanie 2 Rozważmy $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ i przestrzeń $L^2(\mathbb{Z}_n)$ z bazą kanoniczną $\{\delta_j,\ j \in \mathbb{Z}_n\}$.
Zdefiniujmy operator

$$H = \sum_{j=0}^{n-1} \Big(|\delta_{j-1}) + |\delta_{j+1}) \Big) (\delta_j|$$

zwany czasem "dyskretnym Laplasjanem". Przypomnijmy sobie, że dyskretna trasformacja Fouriera jest operatorem na $L^2(\mathbb{Z}_n)$ zdefiniowanym jako

$$\mathcal{F} = \sum_{j,k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}jk2\pi}{n}} |\delta_j)(\delta_k|$$

Policzyć

$$\mathcal{F}^{-1} H \mathcal{F}.$$

Zadanie 3 Wiadomo, że funkcje $c_n(x) := \cos(nx)$, $n = 0, 1, \dots$ tworzą bazę ortogonalną przestrzeni $L^2[0,\pi]$. Niech $f \in L^2[0,\pi]$ będzie zadany przez $f(x) := \begin{cases} 1, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$

Rozwinąć f w bazie ortogonalnej $\{c_0, c_1, \dots\}$.

Zadanie 4 Załóżmy, że $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R})$, $f', f'' \in L^1(\mathbb{R})$. Pokazać, że $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

Wskazówka. Pokazać, że istnieje C takie, że

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{C}{(1 + |\xi|^2)}.$$