06.09.2017

Egzamin Poprawkowy z Analizy Funkcjonalnej I

Zadanie 1 Policzyć granicę w sensie dystrybucyjnym

$$T := \lim_{n\to\infty} \chi_n,$$

gdzie

$$\chi(x) := \begin{cases} 0, & |x| > 1, \\ 1, & 0 \le x < 1; \\ -1, & -1 < x \le 0; \end{cases}$$
$$\chi_n(x) := n^2 \chi(nx).$$

Wskazówka. Jeśli $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, to

$$\phi(x) = \phi(0) + x\phi'(0) + O(x^2).$$

Zadanie 2 Dla $t > 0$ zdefiniujmy $h_t(x) := \frac{1}{(x-t)^2+1}$.

(i) Policzyć $\hat{h}_t(\xi) := \int h_t(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} \mathrm{d}x$.

(ii) Znaleźć $h_t * h_s$.

Zadanie 3 (i) Znaleźć dystrybucje $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ spełniające

$$\big(\partial_x + 1 + \mathrm{i}\big) G(x) = \delta(x).$$

(ii) Które z tych dystrybucji należą do $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$?

Zadanie 4 Niech T będzie operatorem na $L^2(\mathbb{R})$ zdefiniowanym wzorem

$$(Tf)(x) := \int \frac{1}{(x+\mathrm{i})(y+2\mathrm{i})} f(y) \mathrm{d}y.$$

(i) Policzyć jak działa na funkcje operator T^*.

(ii) Policzyć jak działa na funkcje operator $A := T^* T$.

(iii) Pokazać, że istnieje $\lambda > 0$ takie, że $\frac{1}{\lambda} A$ jest rzutem ortogonalnym.

(iv) Znaleźć normę operatora T.

Odpowiedzi.

ad Zad. 1 $\langle T|\phi\rangle = \phi'(0)$, czyli $T = -\delta'$.

ad Zad. 2

(i) $\hat{h}_t(\xi) = \pi e^{-|\xi| - it\xi}$.

(ii) $h_t * h_s(x) = \frac{2\pi}{(x-t-s)^2+4}$.

ad Zad. 3

(i) $G(x) = A e^{-(1+i)x} + G_0(x)$,
$G_0(x) = \theta(x) e^{-(1+i)x}$.

(ii) Tylko G_0.

ad Zad. 4

(i) $T^* f(x) = \int \frac{1}{(x-2i)(y-i)} f(y) dy$.

(ii) $T^* T f(x) = \pi \int \frac{1}{(x-2i)(y+2i)} f(y) dy$.

(iii) $\lambda = \frac{\pi^2}{2}$,

(iv) $\|T\| = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.