Wykład monograficzny—1999-2000

Teoria operatorów liniowych w przestrzeniach Hilberta

Jan Dereziński
Katedra Metod Matematycznych Fizyki
Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski
Hoża 79, 00-682 Warszawa
e-mail Jan.Derezinski@fuw.edu.pl

1 Przestrzenie Hilberta

1.1 Przestrzenie z iloczynem skalarnym

Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią wektorową. Funkcję

$$\mathcal{H} \times \mathcal{H} \ni (v, y) \mapsto (v|y) \in \mathbf{C}$$

nazywamy iloczynem skalarnym, gdy

$$\begin{aligned}
&(v|y+z) = (v|y) + (v|z), \qquad (v|\lambda y) = \lambda(v|y),\\
&(v+y|z) = (v|y) + (y|z), \qquad (\lambda v|y) = \bar{\lambda}(v|y),\\
&(v|v) \geqslant 0,\\
&(v|v) = 0 \Rightarrow v = 0.
\end{aligned}$$

Twierdzenie 1.1 (Hermitowskość.)

$$(v|y) = \overline{(y|v)}.$$

Dowód. Korzystamy z tożsamości polaryzacyjnej:

$$\begin{aligned}
(v|y) &= \tfrac{1}{4}\textstyle\sum_{n=0}^{3}(-\mathrm{i})^n(v+\mathrm{i}^n y|v+\mathrm{i}^n y),\\
(y|v) &= \tfrac{1}{4}\textstyle\sum_{n=0}^{3}\mathrm{i}^n(v+\mathrm{i}^n y|v+\mathrm{i}^n y).
\end{aligned}$$

□

Definiujemy

$$\|v\| := \sqrt{(v|v)}$$

Twierdzenie 1.2 (Tożsamość równoległoboku.)

$$2(\|v\|^2 + \|y\|^2) = \|v+y\|^2 + \|v-y\|^2.$$

Twierdzenie 1.3 (Nierówność Schwarza.)

$$|(v|y)| \leqslant \|v\|\|y\|$$

Dowód.

$$0 \leqslant (v+ty|v+ty) = \|v\|^2 + t(v|y) + \overline{t(v|y)} + \|y\|^2|t|^2.$$

Podstawiamy $t = -\frac{\overline{(v|y)}}{\|y\|^2}$ i dostajemy

$$0 \leqslant \|v\|^2 - \frac{|(v|y)|^2}{\|y\|^2}.$$

□

Twierdzenie 1.4 (Nierówność trójkąta.)

$$\|v+y\| \leqslant \|v\| + \|y\|$$

Dowód.

$$\|v+y\|^2 = \|v\|^2 + (v|y) + (y|v) + \|y\|^2 \leqslant (\|v\| + \|y\|)^2.$$

□

Zatem $\|\cdot\|$ jest normą.

1.2 Definicja i przykłady przestrzeni Hilberta

Definicja 1.5 *Przestrzeń z iloczynem skalarnym nazywamy przestrzenią Hilberta, jeśli jest zupełna, tzn jeśli* $v_n \in \mathcal{H}$, $n = 1, 2, \ldots$ *i*

$$\forall_{\epsilon>0} \exists_N \forall_{n,m>N} \|v_n - v_m\| < \epsilon,$$

to istnieje $v \in \mathcal{H}$ *taki, że* $\lim_{n\to\infty} v_n = v$.

Przykład 1.6 *Niech* I *będzie dowolnym zbiorem. Wtedy* $L^2(I)$ *oznacza przestrzeń ciągów* $(v^i)_{i\in I}$ *o wartościach w* $\mathbf{C}$ *indeksowanych przez* I *takich, że*

$$\sum_{i\in I} |v^i|^2 < \infty$$

z iloczynem skalarnym

$$(v|w) = \sum_{i\in I} \overline{v^i} w^i.$$

Nierówność Schwarza gwarantuje dobrą określoność iloczynu skalarnego.

Przykład 1.7 *Niech $a < b$ (gdzie a może być $-\infty$ i b może być ∞). Niech $\rho(x)$ będzie funkcją dodatnią mierzalną na $[a,b]$. Wtedy $L^2([a,b],\rho)$ oznacza zbiór funkcji na $[a,b]$ o wartościach zespolonych spełniających*

$$\int_a^b |f(x)|^2 \rho(x) \mathrm{d}x < \infty.$$

Iloczyn skalarny jest zdefiniowany jako

$$(f|g) := \int_a^b \overline{f(x)} g(x) \rho(x) \mathrm{d}x.$$

1.3 Podprzestrzenie dopełniające

Niech na razie $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią z iloczynem skalarnym (niekoniecznie zupełną).

Jeśli $A \subset \mathcal{H}$, to $\mathrm{Span}(A)$ oznacza zbiór skończonych kombinacji liniowych elementów z A i

$$A^\perp := \{v \in \mathcal{H} \ : \ (v|z) = 0, \quad z \in A\}.$$

Przez A^{cl} będziemy oznaczać domknięcie zbioru A.

Stwierdzenie 1.8 *(1)* $\mathrm{Span}(A)$ *jest podprzestrzenią.*
(2) $A^\perp$ *podprzestrzenią domkniętą.*
(3) $A \subset B \ \Rightarrow A^\perp \supset B^\perp$
(4) $(A^\perp)^\perp \supset \mathrm{Span}(A)^{\mathrm{cl}}$

Dowód. (1), (2) i (3) są oczywiste. Żeby pokazać (4) zauważamy, że $(A^\perp)^\perp \supset A$. Ale $(A^\perp)^\perp$ jest przestrzenią domkniętą na mocy (2). Więc zawiera najmniejszą podprzestrzeń domkniętą zawierającą A, czyli $\mathrm{Span}(A)^{\mathrm{cl}}$. □

Załóżmy teraz, że $\mathcal{H}$ jest przestrzenią Hilberta.

Twierdzenie 1.9 *Niech $\mathcal{K}$ będzie podprzestrzenią domkniętą w $\mathcal{H}$. Wtedy $\mathcal{K}^\perp$ jest podprzestrzenią domkniętą i*

$$\mathcal{K} \oplus \mathcal{K}^\perp = \mathcal{H}, \quad (\mathcal{K}^\perp)^\perp = \mathcal{K}.$$

Dowód. Niech

$$\inf_{w \in \mathcal{K}} \|v - w\| =: d.$$

Wtedy istnieje ciąg $y_n \in \mathcal{K}$ taki, że

$$\lim_{n \to \infty} \|v - y_n\| = d.$$

Wtedy korzystając najpierw z tożsamości równoległoboku a potem z tego, że $\frac{1}{2}(y_n+y_m) \in \mathcal{K}$ dostajemy

$$\begin{aligned}\|y_n - y_m\|^2 &= 2\|y_n - v\|^2 + 2\|y_m - v\|^2 - 4\|v - \tfrac{1}{2}(y_n + y_m)\|^2 \\ &\leqslant 2\|y_n - v\|^2 + 2\|y_m - v\|^2 - 4d^2 \to 0.\end{aligned}$$

Czyli (y_n) jest ciągiem Cauchy'ego i istnieje

$$\lim_{n\to\infty} y_n =: y.$$

Oczywiście, $y \in \mathcal{K}$ i jest to element najbliższy x. Kładziemy $z := v - y$. Pokażemy, że $z \in \mathcal{K}^\perp$. Niech $w \in \mathcal{K}$. Wtedy

$$\begin{aligned}\|z\|^2 &= \|v - y\|^2 \leqslant \|v - (y + tw)\|^2 \\ &= \|z - tw\|^2 = \|z\|^2 - \bar{t}(w|z) - t(\overline{(w|z)} + |t|^2\|w\|^2.\end{aligned}$$

Podstawiamy $t = \frac{\overline{(w|z)}}{\|w\|^2}$. Dostajemy

$$0 \leqslant -\frac{|(w|z)|^2}{\|w\|^2}.$$

Czyli $(w|z) = 0$. To pokazuje, że $\mathrm{Span}(\mathcal{K} \cup \mathcal{K}^\perp) = \mathcal{H}$.

$\mathcal{K} \cap \mathcal{K}^\perp = \{0\}$ jest oczywiste. Z tego wynika jednoznaczność pary $y \in \mathcal{K}$, $z \in \mathcal{K}^\perp$. To kończy dowód $\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}^\perp$.

Pokażemy teraz, że $(\mathcal{K}^\perp)^\perp \subset \mathcal{K}$. Niech $v \in (\mathcal{K}^\perp)^\perp$. Wtedy $v = y + z$, gdzie $y \in \mathcal{K}$, $z \in \mathcal{K}^\perp$. Ale $(z|v) = 0$ i $(z|y) = 0$. Mamy

$$(z|v) = (y|z) + (z|z).$$

Stąd $(z|z) = 0$, czyli $z = 0$ a więc $v \in \mathcal{K}$ □

Wniosek 1.10

$$A^{\perp\perp} = \mathrm{Span}(A)^{\mathrm{cl}}$$

Dowód.

$$\mathrm{Span}(A)^{\mathrm{cl}\perp\perp} \supset A^{\perp\perp} \supset \mathrm{Span}(A)^{\mathrm{cl}}$$

wynika ze Stwierdzenia 1.8.

$$\mathrm{Span}(A)^{\mathrm{cl}\perp\perp} = \mathrm{Span}(A)^{\mathrm{cl}}$$

wynika z Twierdzenia 1.9. □

1.4 Bazy ortonormalne

Załóżmy na razie, że $\mathcal{H}$ jest przestrzenią z iloczynem skalarnym.

Definicja 1.11 *$A \subset \mathcal{H}\backslash\{0\}$ jest układem ortogonalnym, gdy $e_1, e_2 \in A$, i $e_1 \neq e_2$ implikuje $(e_1|e_2) = 0$. $A \subset \mathcal{H}$ jest układem ortonormalnym, gdy jest on układem ortogonalnym oraz jeśli $e \in A$, to $\|e\| = 1$.*

Twierdzenie 1.12 *Niech $(e_1, \ldots, e_N)$ będzie układem ortonormalnym. Zachodzi wtedy* **tw. Pitagorasa**

$$\|v\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |(v|e_n)|^2 + \|v - \sum_{n=1}^{N}(e_n|v)e_n\|^2$$

oraz **nierówność Bessela***:*

$$\|v\|^2 \geqslant \sum_{n=1}^{N} |(v|e_n)|^2.$$

Zakładamy teraz, że $\mathcal{H}$ jest przestrzenią Hilberta.

Definicja 1.13 *Układ ortonormalny maksymalny nazywamy bazą ortonormalną.*

Twierdzenie 1.14 *Niech $\{e_i\}_{i\in I}$ będzie układem ortonormalnym. Jest to baza ortonormalna, gdy zachodzi jeden z poniższych równoważnych warunków:*
(1) $\{e_i \ : \ i \in I\}^{\perp} = \{0\}$.
(2) $(\mathrm{Span}\{e_i \ : \ i \in I\})^{\mathrm{cl}} = \mathcal{H}$

Twierdzenie 1.15 *Każdy układ ortonormalny można uzupełnić do bazy ortonormalnej.*

Dowód. Niech $\mathcal{B}$ oznacza zbiór układów ortonormalnych uporządkowanych przez inkluzję. Niech $\{A_i \ : \ i \in I\} \subset \mathcal{B}$ będzie podzbiorem liniowo uporządkowanym. Wtedy

$$\cup_{i\in I} A_i$$

jest też układem ortonormalnym. Jest to jednocześnie górne ograniczenie zbioru $\{A_i \ : \ i \in I\}$. Zatem możemy zastosować lemat Kuratowskiego-Zorna. □

Podobnie definiujemy bazę ortogonalną. Z każdej bazy ortogonalnej $(w_i)_{i\in I}$ można utworzyć bazę ortonormalną $\{\|w_i\|^{-\frac{1}{2}} w_i\}_{i\in I}$.

Twierdzenie 1.16 *Niech $(e_i)_{i\in I}$ będzie bazą ortonormalną i $v \in \mathcal{H}$.*
(1)

$$v = \sum_{i\in I}(e_i|v)e_i, \tag{1.1}$$

oraz

$$\|v\|^2 = \sum_{i\in I} |(v|e_i)|^2.$$

(2) Jeśli
$$v = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i,$$
to $\lambda_i = (e_i|v)$.

Dowód. Z nierówności Bessela wynika, że jest skończenie wiele współczynników $> \epsilon > 0$. Zatem przeliczalnie wiele współczynników jest różna od zera. Ponumerujmy niezerowe wyrazy $(e_{i_n}|v),\ n = 1, 2, \ldots$ Z nierówności Bessela dostajemy
$$\sum_{i=1}^{\infty} |(e_i|v)|^2 \leqslant \|v\|^2.$$
Połóżmy
$$v_N := \sum_{n=1}^{N} (e_i|v) e_i,$$
Wtedy dla $N < M$
$$\|v_M - v_M\|^2 = \sum_{i=N+1}^{M} |(e_i|v)|^2.$$
Zatem z zupełności $\mathcal{H}$ wynika zbieżnosc v_N czyli zbieżność szeregu. Poza tym wektor
$$v - \sum_{i \in I} e_i (e_i|v)$$
jest ortogonalny do bazy. Zatem równy jest zero. To dowodzi (1) □

Twierdzenie 1.17 *Niech B_1 i B_2 będą bazami ortonormalnymi w X. Wtedy są one równoliczne.*

Dowód. Jeśli B_1 lub B_2 jest skończone, to tak jak na Algebrze I.

Dla każdego $y \in B_1$ istnieje przeliczalnie wiele $x \in B_2$ takich, że $(x|y) \neq 0$. Dla każdego $x \in B_2$ znajdziemy $y \in B_1$ taki, że $(x|y) \neq 0$. Zatem istnieje funkcja $f : B_2 \to B_1$ taka, że przeciwobraz każdego zbioru jest przeliczalny. Zatem
$$|B_2| \leqslant |B_1 \times \mathbf{N}| = \max(|B_1|, \aleph_0).$$
Podobnie sprawdzamy, że
$$|B_1| \leqslant \max(|B_2|, \aleph_0).$$
□

Definicja 1.18 *Moc bazy nazywamy wymiarem przestrzeni.*

Definicja 1.19 *Operator liniowy $U : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ nazywamy unitarnym, gdy jest bijekcją i*

$$(Uw|Uv) = (w|v)$$

Przestrzenie $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$ nazywamy izomorficznymi, gdy istnieje operator unitarny z $\mathcal{H}_1$ na H_2.

Twierdzenie 1.20 *Dwie przestrzenie Hilberta są izomorficzne $\Leftrightarrow$ mają ten sam wymiar.*

Dowód. Niech $\{x_i \ : \ i \in I\}$ będzie bazą ortonormalną $\mathcal{H}$. Wystarczy pokazać, że $\mathcal{H}$ jest izomorficzna z $L^2(I)$. Definiujemy operator unitarny

$$(Uv)_i := (x_i|v).$$

□

2 Ograniczone operatory liniowe w przestrzeniach Hilberta

2.1 Operatory liniowe

Operator liniowy z $\mathcal{H}$ w $\mathcal{K}$ nazywamy ograniczonym, gdy

$$\|Av\| \leqslant C\|v\|, \quad v \in \mathcal{H}.$$

$$\|A\| = \sup_{\|v\| \leqslant 1} \|Av\|.$$

Zbiór operatorów ograniczonych z $\mathcal{H}$ w $\mathcal{K}$ oznaczamy przez $B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Piszemy $B(\mathcal{H}) := B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$. Przestrzeń $\mathcal{H}' := B(\mathcal{H}, \mathbf{C})$ nazywamy przestrzenią sprzężoną.

Stwierdzenie 2.1 *Niech $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ będzie gęste. Niech $A : \mathcal{D} \mapsto \mathcal{H}$ będzie operatorem liniowym takim, że*

$$\|Av\| \leqslant C\|v\|, \quad v \in \mathcal{D}.$$

Wtedy istnieje dokładnie jeden operator $A^{\mathrm{cl}} \in B(\mathcal{H})$ taki, że

$$A^{\mathrm{cl}}\big|_{\mathcal{D}} = A.$$

Jeśli $A \in B(L^2(I))$ i (v_i) jest bazą, to wzór

$$A_{ij} = (v_j|Av_i)$$

definiuje macierz operatora A.

Jeśli $A \in B(L^2([a,b],\rho)$, to może się zdarzyć, że istnieje funkcja (albo dystrybucja) $A(x_1, x_2)$ taka, że

$$(g|Af) = \int_a^b \overline{g(x_1)}\rho(x_1)A(x_1,x_2)f(x_1\rho(x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2).$$

$A(x_2, x_1)$ nazywamy jądrem całkowym (dystrybucyjnym) operatora A

Przykład 2.2 *Niech $\{e_i\}$, $i \in I$ będzie bazą ortonormalną w $\mathcal{H}$ a $\{a_i\}$ $i \in I$ ciągiem liczb zespolonych taki, że $\sup_{i\in I}|a_i| < \infty$. Wtedy kładziemy*

$$A\sum_{i\in I}\lambda_i e_i := a_i\lambda_i e_i.$$

Wtedy operator A jest ograniczony i jego norma wynosi $\|A\| = \sup_{i\in I}|a_i|$.

2.2 Przestrzeń sprzężona do przestrzeni Hilberta

Twierdzenie 2.3 (Lemat Riesza) *Wzór*

$$\langle C_{\mathcal{H}}(v)|x\rangle := (v|x)$$

definiuje antyliniową bijektywną izometrię $\mathcal{H}$ na $\mathcal{H}'$.

Dowód. Izometryczność:

$$\|C(v)\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1}|(v|x)| \leqslant \|v\|.$$

Wystarczy wziąć $x = \frac{v}{\|v\|}$ by dostać równość.

Surjektywność: Niech $w \in \mathcal{H}'$ i $\mathcal{K} := \mathrm{Ker}w$. Jeśli $\mathcal{K} = \mathcal{H}$, to $w = C(0)$. Jeśli nie, to niech $x_0 \in \mathcal{K}^\perp$, $\|x_0\| = 1$. Połóżmy

$$v := x_0\overline{\langle w|x_0\rangle}.$$

Pokażemy, że $w = C(v)$.

Dowolny wektor y można przedstawić jako

$$y = \left(y - \frac{\langle w|y\rangle}{\langle w|x_0\rangle}x_0\right) + \frac{\langle w|y\rangle}{\langle w|x_0\rangle}x_0$$

Pierwszy wyraz należy do $\mathcal{K}$. Zatem

$$\begin{aligned}(v|y) &= \left(x_0\overline{\langle w|x_0\rangle}|\tfrac{\langle w|y\rangle}{\langle w|x_0\rangle}x_0\right)\\ &= \tfrac{\langle w|y\rangle\langle w|x_0\rangle}{\langle w|x_0\rangle} = \langle w|y\rangle.\end{aligned}$$

□

Przestrzeń sprzężona do przestrzeni Hilberta sama jest przestrzenią Hilberta:

$$(v|w) := (C_{\mathcal{H}}^{-1}w|C_{\mathcal{H}}^{-1}v), \quad v, w \in \mathcal{H}'.$$

Twierdzenie 2.4 *Przestrzeń Hilberta jest refleksywna, tzn* $(\mathcal{H}')' = \mathcal{H}$ *i* $C_{\mathcal{H}'}C_{\mathcal{H}} = \mathbf{1}$.

Dowód. Niech $y \in \mathcal{H}$, $v \in \mathcal{H}'$. Wtedy

$$\langle C_{\mathcal{H}'}C_{\mathcal{H}}y|v\rangle = (C_{\mathcal{H}}y|v) = (C_{\mathcal{H}}^{-1}v|y) = \langle v|y\rangle = \langle \phi y|v\rangle.$$

Czyli $C_{\mathcal{H}'}C_{\mathcal{H}} = \phi$. Ale $C_{\mathcal{H}'}$ i $C_{\mathcal{H}}$ cą bijektywne, czyli ϕ też jest bijekcją, (którą utożsamiamy z identycznością). □

2.3 Operatory sprzężone

Formą półtoraliniową na $\mathcal{K} \times \mathcal{H}$ nazywamy odwzorowanie

$$\mathcal{K} \times \mathcal{H} \ni (\phi, \psi) \mapsto a(\phi, \psi) \in \mathbf{C}$$

antyliniowe ze względu na pierwszy argument i liniowe ze względu na drugi argument. Mówimy, że forma a jest ograniczona, gdy

$$|a(\phi, \psi)| \leqslant C\|\phi\|\|\psi\|.$$

Stwierdzenie 2.5 *1) Niech a będzie ograniczoną formą półtoraliniową na $\mathcal{K} \times \mathcal{H}$. Wtedy istnieje dokładnie jeden operator $A \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ taki, że*

$$a(\phi, \psi) = (\phi|A\psi).$$

2) Jeśli $A \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, to $(\phi|A\psi)$ jest ograniczoną formą półtoraliniową na $\mathcal{K} \times \mathcal{H}$.

Dowód. 2) jest oczywiste. Żeby pokazać 1) zauważmy, że $\phi \mapsto a(\phi|\psi)$ jest formą antyliniową na $\mathcal{K}$. Zatem istnieje $\eta \in \mathcal{K}$ taki, że $a(\phi, \psi) = (\phi|\eta)$. Kładziemy $A\psi := \eta$.

Definicja 2.6 *Niech $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ będą przestrzeniami Hilberta i $A \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Wtedy operator A^* zadany (jednoznacznie) wzorem*

$$(A^*\psi|\phi) := (\psi|A\phi)$$

Nazywamy operatorem (hilbertowsko) sprzężonym do A.

Uwaga: definicja jest poprawna, bo $(\psi|A\phi)$ jest ograniczoną formą półtoraliniową.
Oczywiście, hilbertowska i banachowska sprzężoność związane są następującą relacją:

$$A^* = C_{\mathcal{H}}^{-1}A'C_{\mathcal{K}}. \tag{2.2}$$

Twierdzenie 2.7 *Sprzężenie hilbertowskie ma następujące własności:*

1) $\|A^*\| = \|A\|$
2) $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$
3) $(A + B)^* = A^* + B^*$,
4) $(AB)^* = B^* A^*$,
5) $A^{**} = A$,
6) $(\mathrm{Ran} A)^\perp = \mathrm{Ker} A^*$,
7) $(\mathrm{Ran} A^*)^\perp = \mathrm{Ker} A$,
8) A *jest odwracalny* $\Leftrightarrow A^*$ *jest odwracalny* $\Leftrightarrow \|A\phi\| \geqslant C\|\phi\|$ *i* $\|A^*\phi\| \geqslant C\|\phi\|$, *i wtedy* $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.
9) $\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}$.

Dowód. Stosujemy tożsamość 2.2 i twierdzenie o operatorach sprzężonych banachowsko. □

2.4 Operatory rzutowe

$P \in B(\mathcal{H})$ nazywamy rzutem, gdy $P^2 = P$. Przypomnijmy, że jeśli $\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{M}$, gdzie $\mathcal{K}$ i $\mathcal{M}$ są domkniętymi podprzestrzeniami w $\mathcal{H}$, to istnieje dokładnie jeden rzut $P \in B(\mathcal{H})$ taki, że $\mathrm{Ran} P = \mathcal{K}$ i $\mathrm{Ker} P = \mathcal{M}$.

Twierdzenie 2.8 *Niech P będzie rzutem ograniczonym. Następujące warunki są równmoważne:*
1) $P^* = P$
2) $\mathrm{Ker} P = (\mathrm{Ran} P)^\perp$.
Rzut spełniający jeden z powyższych warunków (a więc oba) nazywamy rzutem ortogonalnym na $\mathcal{K}$.

Jeśli $(w_i)_{i\in I}$ jest bazą ortogonalną w $\mathcal{K}$, to

$$Pv = \sum_{i\in I} \frac{(w_i|v)}{\|w_i\|^2} w_i.$$

Jeśli $\mathcal{H} = L^2([a, b], \rho)$, to

$$P(x, y) = \sum_{i\in I} \frac{w_i(x)\overline{w_i(y)}}{\int_a^b \rho(x)|w_i|^2(x)\mathrm{d}x}.$$

jest rzutem ortogonalnym na $\mathcal{K}$

Stwierdzenie 2.9 (Ortogonalizacja Gramma-Schmidta) *Niech $y_1, y_2, \ldots$ będzie układem liniowo niezależnym. Niech P_n będzie rzutem na (n-wymiarową) przestrzenią $Span\{y_1, \ldots, y_n\}$. Wtedy*

$$w_n := (1 - P_{n-1})y_n$$

jest układem ortogonalnym. Równoważna definicja:

$$w_1 = y_1, \qquad w_n := y_n - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(w_j|y_n)}{\|w_j\|^2} w_j.$$

2.5 Spektrum operatorów ograniczonych

Definicja 2.10 *Niech $A \in B(X, Y)$. Mówimy, że A jest odwracalny, gdy A jest bijekcją z X na Y i operator odwrotny A^{-1} jest ograniczony.*

Stwierdzenie 2.11 *Niech A, B będą odwracalne. Wtedy zachodzi wzór*

$$A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B - A)B^{-1}.$$

Twierdzenie 2.12 *Niech A będzie odwracalny i*

$$\|BA^{-1}\| < 1.$$

Wtedy $A + B$ jest też odwracalny i

$$(A + B)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j A^{-1}(BA^{-1})^j.$$

Dowód. Oczywiście, szereg jest zbieżny bezwzględnie w normie. Aby sprawdzić, że jest on równy $(A+B)^{-1}$ mnożymy $(A+B)$ raz z jednej a raz z drugiej strony przez ten szereg i redukujemy wyrazy dostając 1. □

Definicja 2.13 *Niech $A \in B(X)$. $\lambda \in \mathbf{C}$ należy do $\rho(A)$ (do zbioru rezolwentowego operatora A) gdy $\lambda - A$ jest odwracalny. Spektrum operatora A definiujemy jako*

$$\sigma(A) := \mathbf{C} \backslash \rho(A).$$

Twierdzenie 2.14 *1) Jeśli $\lambda, \mu \in \rho(A)$, to*

$$(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}.$$

2) Jeśli $\|(\lambda - A)^{-1}\| = c$, to $\{z : \ |z - \lambda| < c^{-1}\} \subset \rho(A)$. Zatem $\sigma(A)$ jest zbiorem domkniętym.
3) $\|(z - A)^{-1}\| \geqslant (\mathrm{dist}(z, \sigma(A)))^{-1}$.
4) $\|(z - A)^{-1}\| \leqslant |z|^{-1}(|z| - \|A\|)^{-1}, \quad |z| > \|A\|$.
5) $(z - A)^{-1}$ jest funkcją analityczną na $\rho(A)$

Definicja 2.15 *$\lambda \in \mathbf{C}$ jest wartością własną A, gdy istnieje $x \in X$ taki, że $Ax = \lambda x$. Zbiór wartości własnych operatora A oznaczamy $\sigma^{\mathrm{pp}}(A)$ i nazywamy spektrum czysto punktowym.*

Oczywiście,

$$(\sigma^{\mathrm{pp}}(A))^{\mathrm{cl}} \subset \sigma(A).$$

Definicja 2.16 *Promieniem spektralnym operatora A nazywamy*

$$r(A) := \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

Lemat 2.17 *Niech ciąg liczb rzeczywistych (c_n) spełnia*

$$c_n + c_m \geqslant c_{n+m}.$$

Wtedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{n} = \inf \frac{c_n}{n}.$$

Dowód. Ustalmy m. Niech $n = mq + r$, $r < m$. Mamy

$$c_n \leqslant qc_m + c_r.$$

Czyli

$$\frac{c_n}{n} \leqslant \frac{qc_m}{n} + \frac{c_r}{n}.$$

Zatem

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{c_n}{n} \leqslant \frac{c_m}{m}.$$

Czyli,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{c_n}{n} \leqslant \inf \frac{c_m}{m}.$$

□

Twierdzenie 2.18 *Niech A będzie operatorem ograniczonym. Wtedy*

$$\lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$$

istnieje i jest równy $r(A)$. Poza tym, $r(A) \leqslant \|A\|$.

Dowód. Niech

$$c_n := \log \|A^n\|.$$

Sprawdzamy, że

$$c_n + c_m \geqslant c_{n+m}$$

Wtedy istnieje

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{n}.$$

Przynajmniej dla $|z| > \|A\|$ mamy

$$(z - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n z^{-1-n}.$$

Ale z kryterium d'Alemberta, promień zbieżności tego szeregu jest równy $\lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}$.
□

Wniosek 2.19 *Jeśli $A \in B(X)$, to $\sigma(A)$ jest niepuste.*

Dowód. $(z - A)^{-1}$ jest funkcją analityczną dążącą do zera w nieskończoności. Zatem nie może być analityczna wszędzie, chyba że jest równa zero, co jest niemożliwe. □

Definicja 2.20 *Mówimy, że operator N jest nilpotentny stopnia n, gdy $N^n = 0$.*
Mówimy, że operator N jest quasinilpotentny, gdy $\sigma(N) = \{0\}$.

Stwierdzenie 2.21 *1) Operator nilpotentny jest quasinilpotentny.*
2) N jest quasinilpotentny $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|N^n\|^{\frac{1}{n}} = 0$.

2.6 Rzuty Riesza

Niech Ω będzie podzbiorem $B \subset \mathbf{C}$ i $\Omega' := B\backslash\Omega$. Ω będziemy nazywali izolowanym podzbiorem B, jeśli $\Omega \cap \Omega'^{\mathrm{cl}}$ i $\Omega \cap \Omega'^{\mathrm{cl}} = \emptyset$ (czyli Ω jest domknięty i otwarty w topologii B).

Niech $\Omega \subset \sigma(A)$ będzie izolowanym podzbiorem $\sigma(A)$ i $\Omega' := \sigma(A)\backslash\Omega$. Jeśli γ jest konturem okrążającym Ω, leżącym na zewnątrz Ω', wtedy definiujemy

$$\mathbf{1}_\Omega(A) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma (z - A)^{-1} \mathrm{d}z.$$

Definicja ta nie zależy od wyboru krzywej γ. Operator ten nazywamy rzutem spektralnym operatora A na Ω.

Twierdzenie 2.22 *Jeśli Ω_1 i Ω_2 są dwoma izolowanymi zbiorami w $\sigma(A)$, to*

$$\mathbf{1}_{\Omega_1}(A)\mathbf{1}_{\Omega_2}(A) = \mathbf{1}_{\Omega_1\cap\Omega_2}(A). \tag{2.3}$$

W szczególności, $\mathbf{1}_{\Omega}(A)$ jest rzutem. Mamy też

$$A\mathbf{1}_{\Omega}(A) = \mathbf{1}_{\Omega}(A)A,$$

Zatem $Z := \mathrm{Ran}\mathbf{1}_{\Omega}(A)$ jest niezmienniczą podprzestrzenią dla A. Mamy

$$\sigma\Big(A\Big|_Z\Big) = \sigma(A)\cap\Omega.$$

Dowód. Pokażmy (2.3).

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_{\Omega_1}(A)\mathbf{1}_{\Omega_2}(A) &= (2\pi\mathrm{i})^{-2}\textstyle\int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2}\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2(z_2-z_1)^{-1}(z_1-A)^{-1}-(z_2-A)^{-1})\\
&= (2\pi\mathrm{i})^{-1}\textstyle\int_{\gamma_1^0}(z_1-A)^{-1}\mathrm{d}z_1 + (2\pi\mathrm{i})^{-1}\int_{\gamma_2^0}(z_2-A)^{-1}\mathrm{d}z_2\\
&= \mathbf{1}_{\Omega_1\cap\Omega_2}(A),
\end{aligned}$$

gdzie γ_1^0 jest częścią γ_1 wewnątrz γ_2 a γ_2^0 jest częścią γ_2 wewnątrz γ_1. □

Jeśli przestrzeń jest skończenie wymiarowa, to $\sigma_{\mathrm{pp}}(A) = \sigma(A)$ i $\sigma(A)$ ma co najwyżej $\dim X$ punktów. Jeśli Θ jest nieskończonym podzbiorem izolowanym $\sigma(A)$, to $\dim\mathbf{1}_{\Theta}(A) = \infty$.

Załóżmy teraz, że e jest izolowanym punktem w $\sigma(A)$. Połóżmy

$$P := \mathbf{1}_{\{e\}}(A), \qquad N := (A-e)P.$$

Definicja 2.23 *Mówimy, że e jest półprostą wartością własną, gdy $N = 0$, czyli*

$$\mathrm{Ran}\mathbf{1}_{\{e\}}(A) = \mathrm{Ker}(A-e).$$

Jeśli $N^n = 0$, to mówimy, że e ma stopień nilpotentności n. Łatwo pokazać, że stopień nilpotentności jest mniejszy od $\dim\mathbf{1}_{\{e_0\}}(A)$.

Stwierdzenie 2.24 *Operator N jest quasinilpotentny, spełnia $PN = NP = N$ i można zapisać go jako*

$$N = f(A), \quad f(z) := (z-e)\mathbf{1}_e(z). \tag{2.4}$$

Poza tym

$$(z-A)^{-1}P = (z-\lambda)^{-1}P + \sum_{j=1}^{\infty}N^j(z-\lambda)^{-j+1}.$$

i

$$(z-A)^{-1} - (z-\lambda)^{-1}P - \sum_{j=1}^{\infty}N^j(z-\lambda)^{-j+1}$$

jest analityczne w otoczeniu e. Jeśli N jest nilpotentny stopnia n, to istnieją $\delta > 0$ i C takie, że

$$\|(z-A)^{-1}\| \leqslant C|z-e|^{-n}, \quad z\in K(e,\delta). \tag{2.5}$$

Dowód.
$$\begin{aligned} N - f(A) &= (A-e)P - (2\pi\mathrm{i})^{-1}\textstyle\int_\gamma (z-e)(z-A)^{-1}\mathrm{d}z \\ &= (2\pi\mathrm{i})^{-1}\textstyle\int_\gamma (z-A)(z-A)^{-1}\mathrm{d}z = 0. \end{aligned}$$
To dowodzi (2.4). Następnie zauważamy, że $f(z) = 0$ na $\sigma(A)$. Zatem $\sigma(N) = \{0\}$.

Z rozwinięcia w szereg Laurent'a dostajemy
$$(z-A)^{-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-\lambda)^n,$$
gdzie
$$C_n = (2\pi\mathrm{i})^{-1}\int_\gamma (z-A)^{-1}(z-\lambda)^{-n-1}\mathrm{d}z.$$
Oczywiście, $C_{-1} = \mathbf{1}_{\{\lambda\}}(A)$ i $C_{-2} = N$. Poza tym mamy
$$C_{-1-n}C_{-1-m} = C_{-1-n-m}.$$
□

2.7 Niezmienniczość spektrum względem homografii

Twierdzenie 2.25 *Niech $A \in B(X)$ i $z_0 \in \rho(A)$. Wtedy*
1) $\sigma((z_0 - A)^{-1}) = (z_0 - \sigma(A))^{-1}$,
2) Jeśli Θ jest izolowanym podzbiorem $\sigma(A)$, to
$$\mathbf{1}_{(z_0-\Theta)^{-1}}\Big((z_0-A)^{-1}\Big) = \mathbf{1}_\Theta(A).$$

Dowód. 1) Niech $z \in \rho\Big((z_0 - A)^{-1}\Big)$. Mamy $w = z_0 - z^{-1}$, czyli $z = (z_0 - w)^{-1}$. Sprawdzamy, że
$$\Big(z - (z_0 - A)^{-1}\Big)^{-1} = z^{-1} + z^{-2}(w-A)^{-1}.$$

2) Niech γ będzie konturem okrążającym Θ. Zauważmy, że kontur $(z_0-\gamma)^{-1}$ nie otacza $z = 0$ (któremu odpowiada $w = \infty$). Mamy
$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{(z_0-\Theta)^{-1}}\Big((z_0-A)^{-1}\Big) &= (2\pi\mathrm{i})^{-1}\int_{(z_0-\gamma)^{-1}} \Big(z-(z_0-A)^{-1}\Big)^{-1}\mathrm{d}z \\ &= (2\pi\mathrm{i})^{-1}\int_{(z_0-\gamma)^{-1}} z^{-1}\mathrm{d}z + (2\pi\mathrm{i})^{-1}\int_{(z_0-\gamma)^{-1}} z^{-2}(z_0 - z^{-1} - A)^{-1}\mathrm{d}z \\ &= (2\pi\mathrm{i})^{-1}\int_\gamma (w-A)^{-1}\mathrm{d}w = \mathbf{1}_\Theta(A). \end{aligned}$$
□

2.8 Operatory unitarne, izometrie i częściowe izometrie

Definicja 2.26 *Operator U nazywamy częściową izometrią, gdy U^*U i UU^* są rzutami.*

Twierdzenie 2.27 *Niech $U \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Następujące własności są równoważne:*
1) $U^*U = \mathbf{1}$,
2) $(U\phi|U\psi) = (\phi|\psi), \quad \phi, \psi \in \mathcal{H}$,
3) U jest izometrią czyli $\|U\phi\| = \|\phi\|$.

Definicja 2.28 *Operator U spełniający własności Twierdzenia 2.27 nazywamy liniową izometrią.*

Dowód. 1)⇔2) jest oczywiste, 2)⇒3) też. 3)⇒2) wynika z tożsamości polaryzacyjnej:

$$\begin{array}{rl} (U\psi|U\phi) & = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{3}(-i)^j(U\psi + i^jU\phi|U\psi + i^jU\phi), \\ (\psi|\phi) & = \sum_{j=0}^{3}(-i)^j(\phi + i^j\psi|\phi + i^j\psi). \end{array}$$

□

Stwierdzenie 2.29 *Jeśli U jest liniową izometrią, to U^*U jest rzutem na* Ran$U$.

Dowód. Sprawdzamy najpierw, że U^*U jest rzutem ortogonalnym. Ze wzoru $UU^*U = U$ wynika, że Ran$UU^* \supset$ Ran$U$. Ran$UU^* \subset$ Ran$U$ jest oczywiste. □

Twierdzenie 2.30 *Niech $U \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Następujące własności są równoważne:*
1) $U^*U = UU^* = \mathbf{1}$,
2) U jest izometrią i surjekcją,
3) U jest bijekcją i $U^* = U^{-1}$.

Definicja 2.31 *Operator spełniający własności Twierdzenia 2.30 nazywamy unitarnym.*

Stwierdzenie 2.32 *Niech $\mathcal{H}$ będzie skończenie wymiarowa i $V \in B(\mathcal{H})$ izometryczny. Wtedy V jest unitarny.*

Dowód. Mamy $\dim \mathrm{Ker}V + \dim \mathrm{Ran}V = \dim \mathcal{H}$. Ale z izometryczności wynika, że $\mathrm{Ker}V = \{0\}$. Zatem $\dim \mathrm{Ran}V = \dim \mathcal{H}$. Ponieważ $\mathcal{H}$ jest skończenie wymiarowa, z tego wynika $\mathrm{Ran}V = \mathcal{H}$. □

Przykład 2.33 *Niech $(e_i), \ i = 1, 2, \ldots$ będzie bazą w $\mathcal{H}$. Kładziemy*

$$Te_i := e_{i+1}.$$

Wtedy T jest izometryczny ale nie unitarny.

Stwierdzenie 2.34 *Niech $U \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ będzie unitarny $\{e_i\}$, $i \in I$ niech będzie bazą w $\mathcal{H}$. Wtedy $\{Ue_i\}$, $i \in I$ jest bazą w $\mathcal{K}$.*

Przykład 2.35 *Niech $\{e_i\}$, $i \in I$ będzie bazą ortonormalną w $\mathcal{H}$. Wtedy Niech δ_i będzie wektorem w $L^2(I)$ takim, że $\delta_i^j = 1$ dla $i = j$, $\delta_i^j = 0$, $i \neq j$. Wtedy*

$$Ue_i := \delta_i, \quad i \in I$$

jest unitarny z $\mathcal{H}$ w $L^2(I)$.

Przykład 2.36 *Dla $f \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ kładziemy*

$$\mathcal{F}f(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}.$$

Wtedy $\mathcal{F}$ rozszerza się do operatora unitarnego z $L^2(\mathbf{R})$ w $L^2(\mathbf{R})$. Jego jądrem całkowym jest

$$\mathcal{F}(\xi, x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}.$$

Mamy $\mathcal{F}^2 = \epsilon$, gdzie

$$\epsilon f(x) = f(-x).$$

2.9 Wielomiany ortogonalne

Załóżmy, że

$$\int_a^b \rho(x)|x|^n \mathrm{d}x < \infty, \quad n = 0, 1, \ldots.$$

Niech Pol_n oznacza zbiór wielomianów stopnia mniejszego równego niż n. Jest to podprzestrzeń $L^2([a,b], \rho)$. Niech Pol oznacza zbiór wszystkich wielomianów.

Twierdzenie 2.37 *Niech $\epsilon > 0$ i*

$$\int_a^b \rho(x) \mathrm{e}^{\epsilon|x|} \mathrm{d}x < \infty.$$

Wtedy Pol jest gęste w $L^2([a,b], \rho)$.

Dowód. Załóżmy, że $f \in L^2([a,b], \rho)$ i $f \perp Pol$. Czyli

$$\int_a^b f(x)\rho(x)x^n \mathrm{d}x = 0, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Niech $F(x) := f(x)\rho(x)$. Mamy

$$\begin{aligned} |\textstyle\int_a^b F(x) \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\epsilon|x|} \mathrm{d}x| &= \textstyle\int f(x) \rho^{\frac{1}{2}}(x) \rho^{\frac{1}{2}}(x) \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\epsilon|x|} \mathrm{d}x \\ &\leqslant (\textstyle\int |f(x)|^2 \rho(x) \mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}} (\textstyle\int \rho(x) \mathrm{e}^{\epsilon|x|} \mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Zatem $F \in L^1(\mathbf{R})$ i możemy zastosować transformację Fouriera. $\hat{F}(\xi)$ przedłuża się do funkcji analitycznej na pasie $|\mathrm{Im}\xi| < \frac{1}{2}\epsilon$ spełniającej

$$0 = \int F(x)x^n \mathrm{d}x = \mathrm{i}^n \hat{F}^{(n)}(0).$$

Zatem, $\hat{F} = 0$, więc $F = 0$. □

Do ciągu x^n można zastosować ortogonalizację Gramma-Schmidta i otrzymać bazę ortonormalną (p_n), $\quad n = 0, 1, \ldots$ taką, że $p_n \in Pol^n$. Elementy macierzowe operatora x oznaczamy przez

$$\beta_{jm} := (p_j|xp_m) = \int_a^b \rho(x)xp_j(x)p_m(x)\mathrm{d}x.$$

Twierdzenie 2.38

$$\beta_{jm} = \beta_{mj},$$

$$\beta_{jm} = 0, \qquad |j - m| \geqslant 2.$$

Niech k_j będzie współczynnikiem p_j przy potędze x^j. Wtedy

$$\beta_{j,j+1} = \frac{k_j}{k_{j+1}},$$

bo xp_j ma najwyższy wyraz $k_j x^{j+1}$. Dostajemy wzór rekurencyjny

$$xp_n = \beta_{n,n-1}p_{n-1} + \beta_{n,n}p_n + \beta_{n.n+1}p_{n+1}.$$

Twierdzenie 2.39 (Wzór Christoffela-Darboux) *Jądro całkowe rzutu na Pol^n jest równe*

$$\begin{aligned} P_n(x, y) &= \sum_{k=0}^{n} p_k(x)p_k(y) \\ &= \tfrac{k_n}{k_{n+1}} \tfrac{p_n(x)p_{n+1}(y) - p_{n+1}(x)p_n(y)}{x - y}, \end{aligned}$$

a na diagonali

$$P_n(x, x) = \frac{k_n}{k_{n+1}}(p_n(x)p'_{n+1}(x) - p_{n+1}(x)p'_n(x)).$$

Dowód. Niech Q_k będzie rzutem na p_k. Ma ono jądro całkowe

$$Q_k(x, y) = p_k(x)p_k(y).$$

$[x, Q_k]$ ma jądro całkowe

$$\begin{aligned} xQ_k(x, y) - Q_k(x, y)y &= xp_k(x)p_k(y) - p_k(x)p_k(y)y \\ &= \beta_{k,k-1}(p_{k-1}(x)p_k(y) - p_k(x)p_{k-1}(y)) \\ &+\beta_{k+1,k}(p_{k+1}(x)p_k(y) - p_k(x)p_{k+1}(y)). \end{aligned}$$

Zatem $[x, P_n] = \sum_{k=1}^{n}[x, Q_k]$ ma jądro całkowe

$$xP_n(x,y) - P_n(x,y)y = \beta_{n,n+1}(p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y)).$$

□

2.10 Operatory samosprzężone

Twierdzenie 2.40 *Niech $A \in B(\mathcal{H})$. Następujące warunki są równoważne:*

$$1)\quad A = A^*,$$

$$2)\quad (A\psi|\phi) = (\psi|A\phi),\ \ \psi, \phi \in \mathcal{H}.,$$

$$3)\quad (\psi|A\phi) = \overline{(\psi|A\phi)},\ \ \psi, \phi \in \mathcal{H},$$

$$4)\quad (\phi|A\phi) \in \mathbf{R}.$$

Operator $A \in B(\mathcal{H})$ nazywamy samosprzężonym, gdy spełnia jeden z powyższych warunków (a więc wszystkie).

Dowód. 1)⇒2)⇒3)⇒4)⇒1) jest oczywiste. Żeby pokazać 4)⇒2) stosujemy tożsamość polaryzacyjną

$$\begin{aligned} (\psi|A\phi) &= \tfrac{1}{4}\textstyle\sum_{j=0}^{3}(-i)^j(\psi + i^j\phi|A(\psi + i^j\phi)), \\ \overline{(\phi|A\psi)} &= \tfrac{1}{4}\overline{\textstyle\sum_{j=0}^{3}(-i)^j(\phi + i^j\psi|A(\phi + i^j\psi))} \\ &= \tfrac{1}{4}\textstyle\sum_{j=0}^{3}(-i)^j(\psi + i^j\phi|A(\psi + i^j\phi)) \end{aligned}$$

□

Definicja 2.41 *Operator $A \in B(\mathcal{H})$ spełniający warunki twierdzenia 2.40 nazywamy operatorem samosprzężonym.*

Operator $A \in B(\mathcal{H})$ taki, że

$$(\phi|A\phi) \geqslant 0$$

to A nazywamy operatorem dodatnim.

Jak wynika z Twierdzenia 2.40, operatory dodatnie są samosprzężone.

Twierdzenie 2.42 *Niech A będzie samosprzężony. Wtedy $\sigma(A) \subset \mathbf{R}$.*

Dowód. Niech $\mu \neq 0$, $\mu, \lambda \in \mathbf{R}$. Mamy

$$\|(A - (\lambda + i\mu))\phi\|^2 = \|(A - \lambda)\phi\|^2 + \mu^2\|\phi\|^2 \geqslant \mu^2\|\phi\|^2.$$

Poza tym, $(A - (\lambda + i\mu))^* = A - (\lambda - i\mu)$. Zatem

$$\|(A - (\lambda + i\mu))^*\phi\|^2 = \|(A - \lambda)\phi\|^2 + \mu^2\|\phi\|^2 \geqslant \mu^2\|\phi\|^2.$$

Czyli $A - (\lambda + i\mu)$ jest odwracalny. □.

Lemat 2.43 *Niech A będzie samosprzężony. Wtedy*

$$\|A\| = \sup_{\|\phi\|\leqslant 1} |(\phi|A\phi)|.$$

Dowód. Niech $\psi, \phi \in \mathcal{H}$. Pokażemy najpierw, że

$$|(\psi|A\phi)| \leqslant (\|\psi\|^2 + \|\phi\|^2) \sup_{\|\eta\|\leqslant 1} (\eta|A\eta).$$

Zastępując ψ przez $\mathrm{e}^{i\alpha}\psi$ można założyć, że $(\psi|A\phi)$ jest liczbą dodatnią. Wtedy

$$\begin{aligned}
&(\psi|A\phi) = \tfrac{1}{2}((\psi|A\phi) + (\phi|A\psi)) \\
&= \tfrac{1}{4}\left((\psi+\phi|A(\psi+\phi) - (\psi-\phi|A(\psi-\phi))\right) \\
&\leqslant \tfrac{1}{4}\left(\|\phi+\psi\|^2 + \|\phi-\psi\|^2\right) \sup\nolimits_{\|\eta\|=1} |(\eta|A\eta)| \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\|\phi\|^2 + \|\psi\|^2\right) \sup\nolimits_{\|\eta\|=1} |(\eta|A\eta)|
\end{aligned}$$

Zatem jeśli $\|\psi\| = \|\phi\| = 1$, to

$$|(\psi|A\phi)| \leqslant \sup_{\|\eta\|=1} |(\eta|A\eta)|.$$

Ale

$$\|A\| = \sup_{\|\phi\|=\|\psi\|=1} |(\psi|A\phi)|.$$

□

Twierdzenie 2.44 *Operator A^*A jest dodatni i*

$$\|A^*A\| = \|A\|^2.$$

Dowód. A^*A jest dodatni, bo

$$(\phi|A^*A\phi) = \|A\phi\|^2.$$

Zatem A^*A jest samosprzężony i możemy zastosować Lemat 2.43:

$$\|A^*A\| = \sup_{\|\phi\|=1} (\phi|A^*A\phi) = \sup_{\|\phi\|=1} (A\phi|A\phi) = \|A\|^2.$$

□

Twierdzenie 2.45 *Jeśli A jest samosprzężony, to*

$$\|A\| = r(A).$$

Dowód. Korzystając z tego, że $\|A\|^2 = \|A^*A\| = \|A^2\|$ dostajemy

$$\|A^{2^n}\|^{1/2^n} = \|A\|.$$

Zatem

$$r(A) = \lim_{m\to\infty} \|A^m\|^{1/m} = \|A\|.$$

□

2.11 Twierdzenie spektralne

Definicja 2.46 *Dla I borelowskiego podzbioru* $\mathbf{R}$ *oznaczamy przez* $\mathcal{L}^\infty(I)$ *zbiór funkcji borelowskich ograniczonych na I.*

Twierdzenie 2.47 Twierdzenie spektralne dla operatorów samosprzężonych. *Niech A będzie operatorem samosprzężonym. Wtedy istnieje jedyne odwzorowanie*

$$\mathcal{L}^\infty(\sigma(A)) \ni f \mapsto f(A) \in B(\mathcal{H}),$$

które pokrywa się na $\mathcal{A}(\sigma(A))$ z odwzorowaniem zdefiniowanym poprzednio i spełnia
0) $f \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad f(A) \geqslant 0$,
Ma ono poza tym następujące własności

1) $f = 1 \Rightarrow f(A) = 1$,
2) $f(x) = x \Rightarrow f(A) = A$,
3) $fg(A) = f(A)g(A)$,
4) $(\lambda f)(A) = \lambda f(A)$,
5) $f(A)^* = \bar{f}(A)$,
6) $\|f(A)\| \leqslant \sup|f|$, *jeśli* $f \in C(\sigma(A))$, *to* $\|f(A)\| = \sup|f|$.
7) $A\psi = \lambda\psi \Rightarrow f(A)\psi = f(\lambda)\psi$,
8) $B \in B(\mathcal{H})$, $[B, A] = 0 \Rightarrow [B, f(A)] = 0$,
9) $\sigma(f(A)) \subset f(\sigma(A))$, *jeśli* $f \in C(\sigma(A))$, *to* $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$,
10) $g \in \mathcal{L}^\infty(f(\sigma(A)) \Rightarrow g \circ f(A) = g(f(A))$.

Dowód. Niech $f \in \mathcal{A}(\sigma(A))$ Określamy $f(A)$ przy użyciu całek konturowych. Wiemy, że

$$\sigma(f(A) = f(\sigma(A)).$$

Poza tym

$$\begin{aligned} \|f(A)\|^2 &= \|f(A)^* f(A)\| \\ &= \|(\bar{f}f)(A)\| \\ &= \sup\nolimits_{\lambda \in \sigma(\bar{f}f)(A))} |\lambda| \\ &= \sup\nolimits_{\lambda \in \sigma(A)} |(\bar{f})(\lambda)| \\ &= \left(\sup\nolimits_{\lambda \in \sigma(A)} |f(\lambda)|\right)^2 = \|f\|_\infty^2. \end{aligned}$$

Zatem odwzorowanie $\mathcal{A}(\sigma(A)) \ni f \mapsto f(A) \in B(\mathcal{H})$ jest izometrią. Ponieważ $\mathcal{A}(\sigma(A))$ w normę sup jest gęste w $C(\sigma(A))$, zatem odwzorowanie to można rozszerzyć na całe

$C(\sigma(A))$ z zachowaniem normy. Własności 1)-5), 7)-9) wynikają przez ciągłość z analogicznych własności dla holomorficznego rachunku funkcyjnego.

Pokażmy 0). Niech $f \geqslant 0$. Wtedy istnieje rzeczywista funkcja $g \in C(\sigma(A))$ taka, że $f = g^2$. Wtedy $g(A)$ jest samosprzężony i

$$f(A) = g^2(A)$$

jest dodatni.

Następnie przy pomocy Twierdzenia Riesza-Markowa rozszerzamy definicję $f(A)$ z $C(\sigma(A))$ na $\mathcal{L}^\infty(\sigma(A))$. □

Mówimy, że $A_1, \ldots, A_n$ wzajemnie komutują, gdy

$$[A_i, A_j] = 0, \ i, j = 1, \ldots, n.$$

Jeśli $A_1, \ldots, A_n$ są w dodatku samosprzężone, to wtedy z twierdzenia spektralnego 8) wynika, że $[f(A_i), f(A_j)] = 0$.

Definicja 2.48 *Wspólne spektrum rodziny wzajemnie komutujących operatorów samosprzężonych $A_1, \ldots, A_n$ zdefiniowane jest natępującym warunkiem. $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \notin \sigma(A_1, \ldots, A_n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\epsilon > 0$ taki, że dla każdej funkcji $f_1 \in C(\sigma(A_1)), \ldots, f_n \in C(\sigma(A_n))$ gdzie $\mathrm{supp} f_i \in [\lambda_i - \epsilon, \lambda_i + \epsilon]$ mamy*

$$f_1(A_1) \ldots f_n(A_n) = 0.$$

Twierdzenie 2.49 *(Twierdzenie spektralne dla komutującej rodziny operatorów samosprzężonych). Niech $(A_1, \ldots, A_n)$ będzie rodziną wzajemnie komutujących operatorów samosprzężonych.*

$$\mathcal{L}^\infty(\sigma(A_1, \ldots, A_n)) \ni f \mapsto f(A_1, \ldots, A_n) \in B(\mathcal{H}),$$

takie, że jeśli $f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)\Big|_{\sigma(A_1, \ldots, A_n)}$, to

$$f(A_1, \ldots, A_n) = f_1(A_1) \cdots f_n(A_n)$$

i spełnia
0) $f \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad f(A_1, \ldots, A_n) \geqslant 0,$

Ma ono poza tym następujące własności

1) $f = 1 \Rightarrow f(A_1, \ldots, A_n) = 1$,

2) $f(x_1, \ldots, x_n) = x_j \Rightarrow f(A_1, \ldots, A_n) = A_j$,

3) $fg(A_1, \ldots, A_n) = f(A_1, \ldots, A_n)g(A_1, \ldots, A_n)$,

4) $(\lambda f)(A_1, \ldots, A_n) = \lambda f(A_1, \ldots, A_n)$,

5) $f(A_1, \ldots, A_n)^* = \bar{f}(A_1, \ldots, A_n)$,

6) $\|f(A_1, \ldots, A_n)\| \leqslant \sup|f|$,

jeśli $f \in C(\sigma(A_1, \ldots, A_n))$, *to* $\|f(A_1, \ldots, A_n)\| = \sup|f|$.

7) $A_i\psi = \lambda_i\psi,\ i = 1, \ldots, n \Rightarrow f(A_1, \ldots, A_n)\psi = f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\psi$,

8) $B \in B(\mathcal{H}),\ [B, A_i] = 0,\ i = 1, \ldots, n, \Rightarrow [B, f(A_1, \ldots, A_n)] = 0$,

9) $\sigma(f(A_1, \ldots, A_n)) \subset f(\sigma(A_1, \ldots, A_n))$,

jeśli $f \in C(\sigma(A_1, \ldots, A_n)$, *to* $\sigma(f(A_1, \ldots, A_n)) = f(\sigma(A_1, \ldots, A_n))$,

10) $g \in \mathcal{L}^\infty(f(\sigma(A_1, \ldots, A_n)) \Rightarrow g \circ f(A_1, \ldots, A_n) \supset g(f(A_1, \ldots, A_n))$.

Definicja 2.50 *Operator A nazywamy normalnym, gdy*

$$A^*A = AA^*.$$

Każdy operator A można przedstawić jednoznacznie jako

$$A = A_R + iA_I,$$

gdzie A_R i A_I są samosprzężone. W rzeczy samej, kładziemy

$$A_R := \frac{A + A^*}{2},\ A_I := \frac{A - A^*}{2i}.$$

A jest normalny $\Leftrightarrow [A_R, A_I] = 0$.

Twierdzenie spektralne jest prawdziwe również dla opewratorów normalnych. Jedyną różnicą jest punkt 5), w którym w przypadku operatorów normalnych powinno być

$$f(A)^* = \bar{f}(A^*).$$

Dowód twierdzenia spektralnego dla operatorów normalnych Niech A będzie normalny i $A = A_R + iA_I$, gdzie A_R, A_I są samosprzężone. Stosujemy twierdzenie spektralne dla rodziny A_R, A_I, zauważając, że

$$\sigma(A) = \{x + iy\ :\ (x, y) \in \sigma(A_R, A_I)\}.$$

□

Twierdzenie 2.51 *1) Operator U jest unitarny $\Leftrightarrow$ U jest normalny i jego spektrum jest zawarte w $\{z \ : \ |z| = 1\}$.*
2) Operator A jest samosprzężony $\Leftrightarrow$ A jest normalny i jego spektrum jest zawarte w $\mathbf{R}$.
3) Operator A jest dodatni $\Leftrightarrow$ A jest normalny i jego spektrum jest zawarte w $\mathbf{R}_+$.

Dowód. Udowodnijmy 1) $\Rightarrow$. Niech U będzie unitarny. Zauważmy najpierw, że $\|U\| = 1$. Poza tym, ani U, ani U^* nie mają wartości własnych poza okręgiem jednostkowym.

Niech $|\lambda| \neq 1$

$$\begin{aligned}
&((U-\lambda)\phi|(U-\lambda)\phi) \\
&= (1+|\lambda|^2)\|\phi\|^2 - \lambda(U\phi|\phi) - \bar{\lambda}(\phi|U\phi) \\
&\geqslant (1+|\lambda|^2 - 2|\lambda|)\|\phi\|^2 \\
&= (1-|\lambda|)^2\|\phi\|^2
\end{aligned}$$

Jeśli $\phi \perp \mathrm{Ran}(U-\lambda)$, to $U^*\phi = \bar{\lambda}\phi$, co jest niemożliwe. Zatem $U-\lambda$ jest odwracalny. $\square$

Twierdzenie 2.52 *Niech A będzie operatorem. Wtedy istnieją i są określone jednoznacznie operator dodatni $|A|$ i częściowa izometria U takie, że* $\mathrm{Ker}U = \mathrm{Ker}A$ *i*

$$A = U|A|.$$

Poza tym $\mathrm{Ran}U = (\mathrm{Ran}A)^{\mathrm{cl}}$.

Dowód. Operator A^*A jest dodatni. Można więc zdefiniować

$$|A| := \sqrt{A^*A}.$$

Operator U definiujemy najpierw na $\mathrm{Ran}|A|$ warunkiem

$$U(|A|\phi) = A\phi.$$

Jest on izometryczny, bo

$$\||A|\phi\|^2 = (\phi||A|^2\phi) = (\phi|A^*A\phi) = \|A\phi\|^2$$

i prawidłowo określony. Można go przedłużyć do izometrii na $(\mathrm{Ran}A)^{\mathrm{cl}}$. Na $\mathrm{Ker}|A| = \mathrm{Ran}|A|^\perp$ przedłużamy U kładąc $U\phi = 0$. $\square$

3 Operatory nieograniczone

3.1 Sprzężenie hilbertowskie dla operatorów nieograniczonych

$(A, \mathcal{D}(A))$ nazywamy operatorem z $\mathcal{H}$ w $\mathcal{K}$, gdy $\mathcal{D}(A)$ jest podprzestrznią liniową w $\mathcal{H}$ i $A : \mathcal{D} \to \mathcal{K}$ jest transformacją liniową. Definiujemy $A_1 \subset A_2$.

Definiujemy iloczyn skalarny na $\mathcal{D}(A)$:

$$(\psi|\phi)_A := (\psi|\phi) + (A\psi|A\phi).$$

Mówimy, że A jest domknięty, gdy $\mathcal{D}(A)$ z tym iloczynem jest przestrzenią Hilberta.

Mówimy, że A jest domykalny, jeśli istnieje operator domknięty A_1 taki, że $A \subset A_1$. Jeśli A jest domykalny, to istnieje najmniejszy domknięty operator zawierający A, nazywamy go domknięciem A i oznaczamy A^{cl}.

Definicja 3.1 *Niech $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ będą przestrzeniami Hilberta i niech $A : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ będzie gęsto określony. Wtedy $\psi \in \mathcal{D}(A^*)$, gdy funkcjonał*

$$\mathcal{D}(A) \ni \phi \mapsto (\psi|A\phi)$$

jest ograniczony. Zatem istnieje $\eta \in \mathcal{H}$ taki, że

$$(\psi|A\phi) = (\eta|\phi).$$

Kładziemy

$$A^*\psi = \eta.$$

Mamy związek

$$A^* = C_{\mathcal{H}}^{-1} A' C_{\mathcal{K}}.$$

Twierdzenie 3.2 *Niech $A : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ będzie domkniętym operatorem z gęstą dziedziną. Wtedy:*
1) $A \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}) \Leftrightarrow A^* \in B(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ i $\|A^*\| = \|A\|$.
2) A^* jest domknięty i ma gęstą dziedzinę,
3) $(\mathrm{Ran}A)^\perp = \mathrm{Ker}A^*$,
4) $(\mathrm{Ran}A^*)^\perp = \mathrm{Ker}A$
5) $(A^*)^* = A$
6) Jeśli A lub B są ograniczone, to $(AB)^* = B^*A^*$,
7) A jest odwracalny $\Leftrightarrow$ to A^* jest odwracalny i zachodzi $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$
8) $\sigma(A) = \overline{\sigma(A^*)}$, (gdzie kreska oznacza sprzężenie zespolone).

Twierdzenie 3.3 *Niech A ma gęstą dziedzinę. Wtedy*
1) A^* jest domknięty
2) $(\mathrm{Ran}A)^\perp = \mathrm{Ker}A^*$,

3) $\mathcal{D}(A) \cap (\mathrm{Ran}A^*)^\perp \supset \mathrm{Ker}A$.
4) $\mathcal{D}(A^*)$ *jest gęsty w* $\mathcal{K}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* A *jest domykalny.*
5) Załóżmy, że A *jest domykalny. Wtedy*

$$(A^*)^* = A^{\mathrm{cl}} \quad i \quad A^{\mathrm{cl}*} = A^*.$$

3.2 Nieograniczone operatory samosprzężone

Twierdzenie 3.4 *1)* T *jest symetryczny, gdy* $T^* \supset T$, *czyli*

$$(T\psi|\phi) = (\psi|T\phi), \ \ \psi, \phi \in \mathcal{D}(T).$$

2) T *jest samosprzężony, gdy* $T^* = T$, *czyli jeśli dla* $\psi \in \mathcal{K}$ *istnieje* $\eta \in \mathcal{H}$ *takie, że*

$$(\eta|\phi) = (\psi|T\phi), \ \ \phi \in \mathcal{D}(T),$$

to $\psi \in \mathcal{D}(T)$ *i* $T\psi = \eta$.

Twierdzenie 3.5 *Każdy operator samosprzężony jest symetryczny. Każdy samosprzężony jest domknięty. Każdy symetryczny jest domykalny. Jeśli* A *jest ograniczony, to jest samosprzężony* $\Leftrightarrow$ *jest symetryczny.*

Lemat 3.6 *Niech* A *będzie symetryczny. Wtedy zachodzi jedna z następujących możliwości*

$$\begin{aligned} &1)\ \sigma(A) \subset \mathbf{R}, \\ &2)\ \sigma(A) = \mathbf{C}_+^{\mathrm{cl}}, \\ &3)\ \sigma(A) = \mathbf{C}_-^{\mathrm{cl}} \\ &4)\ \sigma(A) = \mathbf{C}. \end{aligned}$$

Dowód. Niech $\lambda = \mu + i\nu$, $\mu, \nu \in \mathbf{R}$. Załóżmy, że $\lambda \in \rho(A)$. Niech $\phi \in \mathcal{D}(A) = \mathrm{Ran}(\lambda - A)^{-1}$. Wtedy

$$\|(\lambda - A)\phi\|^2 = \|(\mu - A)\phi\|^2 + \nu^2\|\phi\|^2 \geqslant \nu^2\|\phi\|^2.$$

Zatem

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leqslant |\nu|^{-1}.$$

Stąd

$$\{z \ : \ |z - \lambda| < |\nu|\} \subset \rho(A).$$

Prosty geometryczny argument pokazuje, że jedynymi otwartymi podzbiorami $\mathbf{C}$ o powyższej własności są $\emptyset$, $\mathbf{C}_\pm$ i dopełnienie domkniętego podzbioru $\mathbf{R}$. $\square$

Twierdzenie 3.7 *Niech A będzie symetryczny. Wtedy następujące warunki są równoważne*

1) A jest samosprzężony.
2) A jest domknięty i $\mathrm{Ker}(A^* \pm i) = \{0\}$.
3) $\mathrm{Ran}(A \pm i) = \mathcal{H}$.
4) $\sigma(A) \subset \mathbf{R}$.
5) $\pm i \notin \sigma(A)$
5') Istnieją $\lambda_\pm \in \mathbf{C}_\pm$ takie, że $\lambda_\pm \notin \sigma(A)$.
Poza tym, jeśli
6) $\lambda \in \mathbf{R}$ i $\lambda \notin \sigma(A)$, to A jest samosprzężony.

Dowód. 1) $\Rightarrow$ 2). Oczywiście A jest domknięty. Jeśli $\phi \in \mathrm{Ker}(A^* \pm i) = \mathrm{Ker}(A \pm i)$, to

$$0 = \|(A \pm i)\phi\|^2 = \|A\phi\|^2 + \|\phi\|^2.$$

Czyli $\phi = 0$.
2 $\Rightarrow$ 3).

$$\mathrm{Ran}(A \pm i)^{\mathrm{cl}} = (\mathrm{Ker}(A \pm i)^*)^\perp = \mathrm{Ker}(A^* \mp i)^\perp = \mathcal{H}.$$

Trzeba pokazać, że $\mathrm{Ran}(A \pm i)$ jest domknięty. Ale

$$\|(A \pm i)\phi\|^2 = \|A\phi\|^2 + \|\phi\|^2 \geqslant \|\phi\|^2.$$

3 $\Rightarrow$ 1). Niech $\phi \in \mathcal{D}(A^*)$. Ponieważ $\mathrm{Ran}(A - i) = \mathcal{H}$, zatem istnieje $\eta \in \mathcal{D}(A)$ takie, że

$$(A - i)\eta = (A^* - i)\phi.$$

Ale

$$\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^*).$$

Zatem $\phi - \eta \in \mathcal{D}(A^*)$ i $(A^* - i)(\phi - \eta) = 0$. Ale $\mathrm{Ran}(A + i) = \mathcal{H}$. Stąd $\mathrm{Ker}(A^* - i) = \{0\}$. Więc $\phi = \eta$. Zatem $\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A)$.

$1, 2, 3) \Rightarrow 5)$. 2) i 3) świadczą o tym, że $A \pm i$ są bijekcjami $\mathcal{D}(A)$ na $\mathcal{H}$. Nierówność

$$\|(A \pm i)\phi\|^2 \geqslant \|\phi\|^2$$

pokazuje, że $(A \pm i)^{-1}$ są ograniczone. Zatem $\pm i \notin \sigma(A)$

5) $\Rightarrow$ 3) jest oczywiste.

Równoważność 4), 5) i 5') i wynikanie 6) $\Rightarrow$ 4) wynika z Lematu 3.6. $\Box$

Definicja 3.8 *Operator $(A, \mathcal{D})$ jest istotnie samosprzężony, gdy jego domknięcie jest samosprzężone.*

Twierdzenie 3.9 *Niech A będzie symetryczny. Wtedy następujące warunki są równoważne.*

1) A jest istotnie samosprzężony.
2) A^* jest samosprzężony.
3) $\mathrm{Ker}(A^* \pm i) = \{0\}$
4) $\mathrm{Ran}(A \pm i)^{\mathrm{cl}} = \mathcal{H}$.

Dowód. 1) $\Rightarrow$ 2)

$$A^{**} = A^{\mathrm{cl}} = (A^*)^{\mathrm{cl}} = A^*.$$

Równoważność 3) i 4) wynika z tego, że

$$\mathrm{Ker}(A^* \pm i)^{\perp} = \mathrm{Ran}(A \mp i)^{\mathrm{cl}}.$$

Twierdzenie 3.10 *(Twierdzenie spektralne) Niech A będzie samosprzężony. Wtedy istnieje jeden i tylko jeden dodatni $*-$homomorfizm*

$$\mathcal{L}^{\infty}(\sigma(A)) \ni f \mapsto f(A) \mapsto B(\mathcal{H})$$

taki, że jeśli $\lambda \notin \sigma(A)$ i $f(x) = (\lambda - x)^{-1}$, to

$$f(A) = (\lambda - A)^{-1}.$$

Dowód. Niech $\lambda \notin \sigma(A)$ i $f(x) = (\lambda - x)^{-1}$. Jest to operator normalny i ograniczony. Możemy dla niego zatem zastosować twierdzenie spektralne. $\square$

3.3 Zaburzenia operatorów

Twierdzenie 3.11 *W przestrzeni Hilberta względna ograniczoność z A-normą c jest równoważna warunkowi*

$$\inf_{c>0} \|B(A^*A + c)^{-1/2}\| = a. \tag{3.6}$$

Jeśli A jest samosprzężony, to

$$\inf_{z \notin \sigma(A)} \|B(A - z)^{-1}\| = a. \tag{3.7}$$

Dowód. Równoważność (3.6) i

$$\inf_{c \geqslant 0} \sup_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|^2}{\|Ax\|^2 + c\|x\|^2} := a^2$$

jest oczywista.

Równoważność (3.6) i (3.7) dla operatorów samosprzężonych jest konsekwencją unitarności

$$B(A^2 + c)^{-1/2}(A - i\sqrt{c}).$$

$\square$

Twierdzenie 3.12 *(Kato-Rellich) Niech A będzie samosprzężony i B symetryczny z $A-$normą < 1. Wtedy $A + B$ jest samosprzężony na $\mathcal{D}(A)$.*

3.4 Operatory symetryczne

Twierdzenie 3.13 *Niech A będzie domknięty symetryczny. Wtedy*

$$n_{\pm} := \dim \operatorname{Ker}(\lambda - A^*), \ \ \lambda \in \mathbf{C}_{\pm}$$

nie zależy od λ. Zachodzi jedna z następujących możliwości

$$\begin{array}{lll} 1)\ \sigma(A) \subset \mathbf{R}, & n_{\pm} = 0, & A \text{ jest samosprzężony} \\ 2)\ \sigma(A) = \mathbf{C}_{+}^{\mathrm{cl}}, & n_{+} \neq 0, n_{-} = 0, & A \text{ nie jest samosprzężony,} \\ 3)\ \sigma(A) = \mathbf{C}_{-}^{\mathrm{cl}} & n_{+} = 0, n_{-} \neq 0, & A \text{ nie jest samosprzężony,} \\ 4)\ \sigma(A) = \mathbf{C} & n_{+} \neq 0, n_{-} \neq 0, & A \text{ nie jest samosprzężony,} \end{array}$$

Dowód. Niech $\lambda = \mu + i\nu$. Pokażmy, że

$$\operatorname{Ker}(\lambda + \alpha - A^*) \cap \operatorname{Ker}(\lambda - A^*)^{\perp} = \emptyset, \ \ |\alpha| \leqslant |\nu|. \tag{3.8}$$

Mamy

$$\|(\bar{\lambda} - A)\phi\|^2 = \|(\mu - A)\phi\|^2 + \nu^2 \|\phi\|^2.$$

Zatem $\operatorname{Ran}(\bar{\lambda} - A)$ jest domknięty i $(\bar{\lambda} - A)^{-1}$ jako operator $\operatorname{Ran}(\bar{\lambda} - A) \to \mathcal{H}$ ma normę ν^{-1}.

Z domkniętości $\bar{\lambda} - A$ i $\operatorname{Ran}(\bar{\lambda} - A)$ wynika

$$\operatorname{Ran}(\bar{\lambda} - A) = \operatorname{Ker}(\lambda - A^*)^{\perp}.$$

Więc jeśli $\psi \in \operatorname{Ker}(\lambda - A^*)^{\perp}$, to istnieje $\phi \in \mathcal{D}(A)$ takie, że

$$\psi = (\bar{\lambda} - A)\phi$$

i $\|\phi\| \leqslant \frac{\|\psi\|}{|\nu|}$. Jeśli poza tym $\psi \in \operatorname{Ker}(\lambda + \alpha - A^*)$, to

$$\begin{aligned} 0 &= ((\lambda + \alpha - A^*)\psi|\phi) \\ &= (\psi|(\bar{\lambda} - A)\phi) + \bar{\alpha}(\psi|\phi) \\ &= \|\psi\|^2 + \bar{\alpha}(\psi|\phi). \end{aligned}$$

Ale

$$|\|\psi\|^2 + \bar{\alpha}(\psi|\phi)| > (1 - |\alpha|/|\nu|)\|\psi\|^2 > 0,$$

co jest sprzecznością i kończy dowód (3.8).

Z (3.8) wynika, że

$$\dim(\operatorname{Ker}(\lambda + \alpha - A^*)) \leqslant \dim(\operatorname{Ker}(\lambda - A^*))$$

□

Twierdzenie 3.14 *Jeśli dla pewnego $M \in \mathbf{R}$ $A > M$, to*

$$\dim \operatorname{Ker}(\lambda - A^*)$$

jest stały dla $\lambda \in \mathbf{C} \backslash [M, \infty[$.

Dowód. Można przyjąć, że $M = 0$. Niech $\lambda = \mu + i\nu$ i $\mu < 0$.

$$\begin{aligned}
&\|(\lambda - A)\phi\|^2 \\
&= \|A\phi\|^2 + \mu^2\|\phi\|^2 + \nu^2\|\phi\|^2 - 2\mu(\phi|A\phi) \\
&\geqslant \mu^2\|\phi\|^2 + \nu^2\|\phi\|^2.
\end{aligned}$$

Dalej rozumujemy tak jak w dowodzie poprzedniego twierdzenia. □

Definicja 3.15 *Niech A będzie symetryczny i domknięty. Zdefiniujmy na $\mathcal{D}(A^*)$ następujący iloczyn skalarny:*

$$(\phi|\psi)_A := (\phi|\psi) + (A^*\phi|A^*\psi)$$

i formę antysymetryczną

$$[\phi|\psi]_A := (A^*\phi|\psi) - (\phi|A^*\psi).$$

Będziemy mówili o $A-$domkniętości i $A-$ortogonalności mając na myśli iloczyn skalarny $(\cdot|\cdot)_A$. Przestrzeń jest $A-$symetryczna, gdy $[\cdot|\cdot]_A$ się zeruje na tej podprzestrzeni.

Twierdzenie 3.16 *Niech A będzie domknięty symetryczny.*
1) Każde domknięte rozszerzenie A jest obcięciem A^* na $A-$domkniętą podprzestrzeń w $\mathcal{D}(A^*)$ zawierającą $\mathcal{D}(A)$.
2)

$$\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A) \oplus \operatorname{Ker}(A^* + i) \oplus \operatorname{Ker}(A^* - i)$$

składniki w powyższej sumie prostej są $A-$ortogonalne i

$$(\psi \oplus \psi_+ \oplus \psi_- | \phi \oplus \phi_+ \oplus \phi_-)_A = (\psi|\phi) + (A\psi|A\phi) + 2(\psi_+|\phi_+) + 2(\psi_-|\phi_-),$$

$$[\psi \oplus \psi_+ \oplus \psi_- | \phi \oplus \phi_+ \oplus \phi_-]_A = 2i(\psi_+|\phi_+) - 2i(\psi_-|\phi_-).$$

Dowód. 1) jest oczywiste. W 2) łatwe są $A-$ortogonalność i $A-$domkniętość.
Niech $\psi \in \mathcal{D}(A^*)$ i

$$\psi \perp \mathcal{D}(A) \oplus \operatorname{Ker}(A^* - i) \oplus \operatorname{Ker}(A^* - i)$$

w sensie iloczynu $(\cdot|\cdot)_A$. W szczególności, dla $\phi \in \mathcal{D}(A)$ mamy

$$0 = (A^*\psi|A^*\phi) + (\psi|\phi) = (A^*\psi|A\phi) + (\psi|\phi).$$

Zatem $A^*\psi \in \mathcal{D}(A^*)$ i

$$A^*A^*\psi = -\psi.$$

Zatem

$$(A^* + i)(A^* - i)\psi = 0.$$

Więc

$$(A^* - i)\psi \in \mathrm{Ker}(A^* + i). \tag{3.9}$$

Jeśli $\eta \in \mathrm{Ker}(A^* + i)$, to

$$i(\eta|(A^* - i)\psi) = (A^*\eta|A^*\psi) + (\eta|\psi) = (\eta|\psi)_A = 0$$

W szczególności, podstawiając $\eta = (A^* - i)\psi$ i korzystając z (3.9), dostajemy

$$\psi \in \mathrm{Ker}(A^* - i).$$

Ponieważ $\psi \perp \mathrm{Ker}(A^* - i)$, więc $\psi = 0$. □

Każda podprzestrzeń $A-$domknięta zawierająca $\mathcal{D}(A)$ jest postaci $\mathcal{D}(A) \oplus W$, gdzie

$$W \subset \mathrm{Ker}(A^* + i) \oplus \mathrm{Ker}(A^* - i).$$

Jeśli

$$A \subset B \subset A^*,$$

to podprzestrzeń W odpowiadającą B oznaczmy przez W_B. Będziemy pisali

$$W^{\mathrm{per}} := \{v \in \mathrm{Ker}(A^* - i) \oplus \mathrm{Ker}(A^* - i) \ : \ [w, v]_A = 0, \ w \in W\}.$$

Przestrzeń W jest $A-$symetryczna, gdy

$$W^{\mathrm{per}} \supset W.$$

Twierdzenie 3.17 *Mamy*

$$W_{B^*} = (W_B)^{\mathrm{per}}.$$

W szczególności B jest symetryczny, gdy W jest $A-$symetryczna. Każda podprzestrzeń $A-$symetryczna odpowiada częściowej izometrii $U : \mathrm{Ker}(A^* + i) \to \mathrm{Ker}(A^* - i)$. Wtedy

$$W := \{w \oplus Uw \ : \ w \in \mathrm{Ran}U^*U\}.$$

B jest samosprzężony, gdy U jest unitarny.

4 Formy kwadratowe

4.1 Formy kwadratowe

Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta.

Definicja 4.1 *Parę* $(\mathbf{t}, \mathcal{D}(\mathbf{t}))$ *nazywamy formą półtoraliniową, jeśli* $\mathcal{D}(\mathbf{t})$ *jest podprzestrzenią liniową w* $\mathcal{H}$ *i* $\mathbf{t}$ *jest odwzorowaniem*

$$\mathcal{D}(\mathbf{t}) \times \mathcal{D}(\mathbf{t}) \ni (x, y) \mapsto \mathbf{t}(x, y) \in \mathbf{C}$$

antyliniowym ze względu na pierwszy i liniowym ze względu na drugi argument.

Niech $\lambda \in \mathbf{C}$. Wtedy definiujemy formę λ z dziedziną $\mathcal{H}$ wzorem $\lambda(x, y) := \lambda(x|y)$. Jeśli $\mathbf{t}$ jest formą, to definiujemy formę $\lambda\mathbf{t}$ z dziedziną $\mathcal{D}(\lambda\mathbf{t}) := \mathcal{D}(\mathbf{t})$ wzorem $(\lambda\mathbf{t})(x, y) := \lambda\mathbf{t}(x, y)$. Definiujemy też formę $\mathbf{t}^*$ z dziedziną $\mathcal{D}(\mathbf{t}^*) := \mathcal{D}(\mathbf{t})$ wzorem $\mathbf{t}^*(x, y) := \overline{\mathbf{t}(y, x)}$. Jeśli $\mathbf{t}_1$ i $\mathbf{t}_2$ są formami, to definiujemy $\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2$ z dziedziną $\mathcal{D}(\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2) := \mathcal{D}(\mathbf{t}_1) \cap \mathcal{D}(\mathbf{t}_1)$ wzorem $(\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2)(x, y) := \mathbf{t}_1(x, y) + \mathbf{t}_2(x, y)$. Piszemy $\mathbf{t}_1 \subset \mathbf{t}_2$ jeśli $\mathcal{D}(\mathbf{t}_1) \subset (\mathbf{t}_2)$ i $\mathbf{t}_1(x, y) = \mathbf{t}_2(x, y)$ $x, y \in \mathcal{D}(\mathbf{t}_1)$.

Będziemy pisać $\mathbf{t}(x) := \mathbf{t}(x, x)$. Znajomość $\mathbf{t}(x)$ determinuje $\mathbf{t}(x, y)$:

$$\mathbf{t}(x, y) = \frac{1}{4} \left(\mathbf{t}(x + y) + \mathrm{i}\mathbf{t}(x + \mathrm{i}y) - \mathbf{t}(x - y) - \mathrm{i}\mathbf{t}(x - \mathrm{i}y) \right).$$

Definicja 4.2 *Liczbowym zasięgiem formy* $\mathbf{t}$ *nazywamy*

$$\Theta(\mathbf{t}) := \{\mathbf{t}(x) \ : \ x \in \mathcal{D}(\mathbf{t}),\ \|x\| = 1\}.$$

Twierdzenie 4.3 $\Theta(\mathbf{t})$ *jest zbiorem wypukłym.*

Dowód. Trzeba pokazać, że jeśli $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(\mathbf{t})$, $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$, to $[\mathbf{t}(x_1), \mathbf{t}(x_2)] \subset \Theta(\mathbf{t})$. Czyli wystarczy udowodnić twierdzwnie w 2-wymiarowych przestrzeniach. □

Forma $\mathbf{t}$ jest ograniczona, jeśli $\Theta(\mathbf{t})$ jest ograniczone. Równoważny warunek: $|\mathbf{t}(x)| \leqslant C\|x\|^2$.

Forma $\mathbf{t}$ jest sektorialna, jeśli istnieje $a \in \mathbf{C}$ i $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ takie, że

$$\Theta(\mathbf{t}) \subset \{a + z \ : \ |\mathrm{arg} z| < \theta\}.$$

Mówimy wtedy, że a jest wierzchołkiem a θ kątem formy $\mathbf{t}$.

Forma $\mathbf{t}$ jest ograniczona od dołu, jeśli istnieje c takie, że

$$\Theta(\mathbf{t}) \subset \{z \ : \ \mathrm{Re} z > c\}.$$

Forma $\mathbf{t}$ jest symetryczna, jeśli $\Theta(\mathbf{t}) \subset \mathbf{R}$. Równoważny warunek: $\mathbf{t}(x, y) = \overline{\mathbf{t}(y, x)}$.

Lemat 4.4 *Niech* $\mathbf{t}$ *będzie formą sektorialną z wierzchołkiem* a *i kątem* θ*. Wtedy*

$$|(\mathbf{t} - a)(x, y) \leqslant (1 + \mathrm{tg}\,\theta) \mathrm{Re}(\mathbf{t} - a)(x)^{\frac{1}{2}} \mathrm{Re}(\mathbf{t} - a)(y)^{\frac{1}{2}}.$$

4.2 Formy domknięte

Niech $\mathbf{t}$ będzie formą sektorialną z wierzchołkiem a. Niech $\mathbf{s} := \mathrm{Re}(\mathbf{t} - a)$.

Definicja 4.5 *Mówimy, że $\mathbf{t}$ jest formą domkniętą, jeśli $\mathcal{D}(\mathbf{t})$ z iloczynem skalarnym*

$$(x, y)_{\mathbf{s}} := (\mathbf{s} + 1)(x, y), \quad x, y \in \mathcal{D}(\mathbf{t}),$$

jest przestrzenią Hilberta.

Twierdzenie 4.6 *Forma $\mathbf{t}$ jest domknięta, jeśli dla każdego ciągu $x_n \in \mathcal{D}(\mathbf{t})$, jeśli $x_n \to x$ i $\mathbf{t}(x_n - x_m) \to 0$, to $x \in \mathcal{D}(\mathbf{t})$ i $\mathbf{t}(x_n - x) \to 0$.*

Przykład 4.7 *Niech A będzie operatorem domkniętym. Wtedy $(Ax|Ay)$ z dziedziną $\mathcal{D}(A)$ jest formą domkniętą dodatnią.*

Definicja 4.8 *Mówimy, że $\mathbf{t}$ jest formą domykalną, jeśli istnieje forma domknięta $\mathbf{t}_1$ taka, że $\mathbf{t} \subset \mathbf{t}_1$.*

Twierdzenie 4.9 *1) Forma $\mathbf{t}$ jest domykalna, $\Leftrightarrow$ dla każdego ciągu $x_n \in \mathcal{D}(\mathbf{t})$, jeśli $x_n \to 0$ i $\mathbf{t}(x_n - x_m) \to 0$, to $\mathbf{t}(x_n) \to 0$.*
2) Jeśli $\mathbf{t}$ jest domykalna, to istnieje najmniejsza forma domknięta $\mathbf{t}_1$ taka, że $\mathbf{t} \subset \mathbf{t}_1$. Będziemy ją oznaczać $\mathbf{t}^{\mathrm{cl}}$
3) $\Theta(\mathbf{t})$ jest gęste w $\Theta(\mathbf{t}^{\mathrm{cl}})$

Dowód. Aby dowieść 1) $\Leftarrow$, zdefiniujmy $\mathbf{t}_1$ następująco: $x \in \mathcal{D}(\mathbf{t}_1)$, jeśli istnieje ciąg $x_n \in \mathcal{D}(\mathbf{t})$ taki, że jeśli $x_n \to x$ i $\mathbf{t}(x_n - x_m) \to 0$. Kładziemy wtedy $\mathbf{t}_1(x) := \lim_{n\to\infty} \mathbf{t}(x_n)$ (granica ta istnieje, bo $\mathbf{t}(x_n)$ jest ciągiem Cauchy'ego).

Aby pokazać, że definicja ta jest poprawna, załóżmy, że $y_n \in \mathcal{D}(\mathbf{t})$, $y_n \to x$ i $\mathbf{t}(y_n - y_m) \to 0$. Wtedy $x_n - y_n - (x_m - y_m) \to 0$ i $x_n - y_n \to 0$. Z założenia dostajemy $\mathbf{t}(x_n - y_n) \to 0$. Zatem $\lim_{n\to\infty} \mathbf{t}(x_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{t}(y_n)$. Czyli definicja $\mathbf{t}_1$ nie zależy od wyboru ciągu x_n. Jasne jest też, że $\mathbf{t}_1$ jest formą domkniętą i najmniejszą możliwą zawierającą $\mathbf{t}$. Zatem $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}^{\mathrm{cl}}$. □

Przykład 4.10 *Niech A będzie operatorem. Wtedy $(Ax|Ay)$ z dziedziną $\mathcal{D}(A)$ jest formą domykalną wtedy i tylko wtedy, gdy A jest operatorem domykalnym, i wtedy $(A^{\mathrm{cl}}x|A^{\mathrm{cl}}y)$ z dziedziną $\mathcal{D}(A^{\mathrm{cl}})$ jest jej domknięciem.*

4.3 Zasięg liczbowy operatora

Jeśli T jest operatorem, to (x, Ty) z dziedziną $\mathcal{D}(T)$ jest formą, nazywaną formą stowarzyszoną z operatorem T.

Definicja 4.11 *Zasięgiem liczbowym operatora T nazywamy zasięg liczbowy stowarzyszonej z nim formy. Oznaczamy go przez $\Theta(T)$.*

Oczywiście, operator T jest symetryczny, jeśli $\Theta(T) \subset \mathbf{R}$, dodatni jeśli $\Theta(T) \subset \mathbf{R}_+$.

Definicja 4.12 *Operator T nazywamy sektorialnym jeśli $i\Theta(T) \subset \{a + z \ : \ |\arg z| < \theta\}$.*

Twierdzenie 4.13 *1) $\|(z - T)\phi\| \geqslant \operatorname{dist}(z, \Theta(T))\|\phi\|$.*
2) Jeśli T jest operatorem domkniętym, i $z \in \mathbf{C}\backslash\Theta(T)^{\mathrm{cl}}$, to $z - T$ ma domknięty obraz.
3) Wymiar $\operatorname{Ran}(z - T)^\perp = \operatorname{Ker}(\bar{z} - T^*)$ jest funkcją stałą na spójnych składowych $\mathbf{C}\backslash\Theta(T)^{\mathrm{cl}}$.

Definicja 4.14 *Operator T nazywamy maksymalnym, jeśli $\sigma(T) \subset \Theta(T)^{\mathrm{cl}}$. Symetryczny operator maksymalny nazywamy samosprzężonym. Operator maksymalny sektorialny nazywany jest w skrócie m-sektorialny.*

Twierdzenie 4.15 *1) Jeśli Δ_i jest spójną składową $\mathbf{C}\backslash\Theta(T)^{\mathrm{cl}}$, $z_i \in \Delta_i$ i $\mathcal{H} = \operatorname{Ran}(z_i - T)$, to T jest maksymalny*
2) Jeśli T jest ograniczony, to T jest maksymalny.
3) Jeśli T jest operatorem maksymalnym i $z \notin \Theta(T)^{\mathrm{cl}}$, to

$$\|(z - T)^{-1}\| \leqslant (\operatorname{dist}(z, \Theta(T)))^{-1}.$$

4.4 Operator stowarzyszony z formą sektorialną

Twierdzenie 4.16 *1) Niech $\mathbf{s}$ będzie formą symetryczną ograniczoną od dołu. Wtedy istnieje dokładnie jeden operator samosprzężony ograniczony od dołu S taki, że $\mathcal{D}(S) \subset \mathcal{D}(\mathbf{s})$ i*

$$\mathbf{s}(x, y) = (x|Sy), \quad y \in \mathcal{D}(S), \ x \in \mathcal{D}(\mathbf{s}).$$

Operator S nazywamy stowarzyszonym z formą $\mathbf{s}$.
2) $\mathcal{D}(S)$ jest dziedziną istotną dla $\mathbf{s}$.
3) $\Theta(S)$ jest gęsty w $\Theta(s)$.

Dowód. Wystarczy założyć, że s ma wierzchołek 0. Dla $x \in \mathcal{H}$, $y \in \mathcal{D}(\mathbf{s})$ mamy

$$|(x|y)| \leqslant \|x\|\|y\| \leqslant \|x\|\|y\|_{\mathbf{s}}.$$

Zatem z lematu Riesza wynika istnienie elementu $\in \mathcal{D}(\mathbf{s})$, który będziemy oznaczać Ax, takiego, że $\|Ax\|_{\mathbf{s}} \leqslant \|x\|$ i

$$(x|y) = (Ax|y)_{\mathbf{s}}. \tag{4.10}$$

Oczywiście, A jest operatorem liniowym na $\mathcal{H}$ i $\|A\| \leqslant 1$, bo

$$\|Ax\| \leqslant \|Ax\|_{\mathbf{s}} \leqslant \|x\|.$$

Z (4.10) wynika też

$$\mathbf{s}(y, Ax) = (y|x - Ax), \quad x \in \mathcal{H}, \quad y \in \mathcal{D}(\mathbf{s}).$$

Stąd $\mathrm{Ker}A = \{0\}$, bo $Ax = 0$ implikuje $(y|x) = 0$ dla $y \in \mathcal{D}(\mathbf{s})$, a $\mathcal{D}(\mathbf{s})$ jest gęste w $\mathcal{H}$. Kładąc

$$S := A^{-1} - 1$$

dostajemy

$$\mathbf{s}(y, z) = (y|Sz), \quad y \in \mathcal{D}(\mathbf{s}), \quad z \in \mathcal{D}(S) = \mathrm{Ran}A.$$

S jest domknięty, bo A jest ograniczony. S jest symetryczny, bo $\Theta(S) \subset \Theta(\mathbf{s})$. S jest samosprzężony, bo

$$\mathrm{Ran}(S + 1) = \mathrm{Ran}A^{-1} = \mathcal{H}.$$

Aby pokazać 2) zauważmy, że jeśli $y \in \mathcal{D}(\mathbf{s})$ jest $\mathbf{s}$-ortogonalny do $\mathrm{Ran}A = \mathcal{D}(S)$, to $x = 0$ – patrz (4.10). □

Twierdzenie 4.17 *1) Niech $\mathbf{t}$ będzie formą sektorialną. Wtedy istnieje dokładnie jeden operator m-sektorialny T taki, że $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(\mathbf{t})$ i*

$$\mathbf{t}(x, y) = (x|Ty), \quad y \in \mathcal{D}(T), \ x \in \mathcal{D}(\mathbf{t}).$$

Operator T nazywamy stowarzyszonym z formą $\mathbf{t}$ i oznaczamy przez $T_{\mathbf{t}}$
2) $\mathcal{D}(T)$ jest dziedziną istotną dla $\mathbf{t}$.
3) $\Theta(T)$ jest gęsty w $\Theta(\mathbf{t})$.
4) Jeśli $\mathbf{t}$ jest ograniczona, to T też.

Będziemy zakładali, że forma $\mathbf{t}$ ma wierzchołek 0. Będziemy oznaczać $\mathbf{s} := \mathrm{Re}\mathbf{t}$.

Lemat 4.18 *Istnieje operator $B \in B(\mathcal{D}(\mathbf{t}))$ taki, że B^{-1} istnieje, należy do $B(\mathcal{D}(\mathbf{t}))$ i*

$$(\mathbf{t} + 1)(x, y) = \mathbf{s}(x, By).$$

Dowód. Forma $\mathbf{t}+1$ jest ograniczona w przestrzeni Hilberta $\mathcal{D}(\mathbf{t})$. Zatem istnieje $B \in B(\mathcal{D}(\mathbf{t}))$ taki, że

$$(\mathbf{t}+1)(x,y) = (x|By)_{\mathbf{s}} = (x|y) + \mathbf{s}(x,y).$$

Mamy

$$\|x\|_{\mathbf{s}}^2 = \mathrm{Re}(\mathbf{t}+1)(x) = \mathrm{Re}(x|Bx)_{\mathbf{t}} \leqslant \|Bx\|_{\mathbf{t}}\|x\|_{\mathbf{t}}.$$

Zatem $\|x\|_{\mathbf{s}} \leqslant \|Bx\|_{\mathbf{s}}$. Więc $\mathrm{Ran}B$ jest domknięty.

Jeśli x jest prostopadły w $\mathcal{D}(\mathbf{t})$ do $\mathrm{Ran}B$, to

$$\|x\|_{\mathbf{s}}^2 = \mathrm{Re}(x|Bx)_{\mathbf{s}} = 0.$$

Zatem B jest odwracalny i $\|B\| \leqslant 1$. □

Dowód Twierdzenia 4.17. Niech S oznacza operator stowarzyszony z $\mathbf{s}$. Wtedy $T := BS$ z dziedziną $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(S)$ spełnia warunki twierdzenia. □

Twierdzenie 4.19 *Niech* $\mathbf{s}$ *będzie gęsto określoną dodatnią formą domkniętą. Niech* S *oznacza odpowiadający jej operator (który jest dodatni i samosprzężony). Wtedy* $\mathcal{D}(\mathbf{s}) = \mathcal{D}(S^{\frac{1}{2}})$ *i* $\mathbf{s}(x) = \|S^{\frac{1}{2}}x\|^2$.

Dowód. Określmy formę $\mathbf{s}_1$ wzorem $\mathcal{D}(\mathbf{s}_1) = \mathcal{D}(S^{\frac{1}{2}})$ i $\mathbf{s}_1(x) = \|S^{\frac{1}{2}}x\|^2$. Forma $\mathbf{s}$ i $\mathbf{s}_1$ pokrywają się na $\mathcal{D}(S) \subset \mathcal{D}(S^{\frac{1}{2}}) \cap \mathcal{D}(\mathbf{s})$. Z twierdzenia 4.16 wynika, że $\mathcal{D}(S)$ jest dziedziną istotną dla $\mathbf{s}$. Forma $\mathbf{s}_1$ jest oczywiście domknięta (patrz przykład). Z twierdzenia spektralnego wynika, że $\mathcal{D}(\mathbf{s}_1)$ jest dziedziną istotną dla $\mathbf{s}_1$. Zatem $\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}$. □

4.5 Zaburzenia form

Twierdzenie 4.20 *Niech* $\mathbf{t}_1$ *i* $\mathbf{t}_2$ *będą formami sektorialnymi.*
1) $\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2$ *jest też formą sektorialną.*
2) Jeśli $\mathbf{t}_1$ *i* $\mathbf{t}_2$ *są domknięte, to* $\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2$ *jest też domknięta.*
3) Jeśli $\mathbf{t}_1$ *i* $\mathbf{t}_2$ *są domykalne, to* $\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2$ *jest też domykalna i* $(\mathbf{t}_1+\mathbf{t}_2)^{\mathrm{cl}} \subset \mathbf{t}_1^{\mathrm{cl}} + \mathbf{t}_2^{\mathrm{cl}}$.

Definicja 4.21 *Niech* $\mathbf{p}$, $\mathbf{s}$ *będą formami i* $\mathbf{s}$ *niech będzie dodatnia. Mówimy, że* $\mathbf{p}$ *jest* $\mathbf{s}$*-ograniczona, z* $\mathbf{s}$*-normą* $\leqslant b$, *gdy* $\mathcal{D}(\mathbf{s}) \subset \mathcal{D}(\mathbf{p})$ *i istnieje* c *takie, że*

$$|\mathbf{p}(x)| \leqslant b\mathbf{s}(x) + c\|x\|^2.$$

Twierdzenie 4.22 *Niech* $\mathbf{t}$ *będzie sektorialna i* $\mathbf{p}$ *będzie* $\mathrm{Re}\mathbf{t}$*-ograniczona z* $\mathrm{Re}\mathbf{t}$*-normą* < 1.
1) Forma $\mathbf{t}+\mathbf{p}$ *(z dziedziną* $\mathcal{D}(\mathbf{t})$*) jest też sektorialna.*
2) $\mathbf{t}$ *jest domknięta* $\Leftrightarrow$ $\mathbf{t}+\mathbf{p}$ *jest domknięta.*
3) $\mathbf{t}$ *jest domykalna* $\Leftrightarrow$ $\mathbf{t}+\mathbf{p}$ *jest domykalna i wtedy* $\mathcal{D}((\mathbf{t}+\mathbf{p})^{\mathrm{cl}}) = \mathcal{D}(\mathbf{t}^{\mathrm{cl}})$.

Dowód. Mamy

$$\mathrm{Im}(\mathbf{t}+\mathbf{p})(x) \leqslant |\mathrm{Im}\mathbf{t}(x)| + |\mathrm{Im}\mathbf{p}(x)| \leqslant (\mathrm{tg}\,\theta + b)\mathrm{Re}\mathbf{t}(x) + c\|x\|^2,$$

$$\mathrm{Re}(\mathbf{t}+\mathbf{p})(x) \geqslant \mathrm{Re}\mathbf{t}(x) - |\mathrm{Im}\mathbf{p}(x)| \geqslant (1-b)\mathrm{Re}\mathbf{t}(x) - c\|x\|^2. \tag{4.11}$$

Dlatego

$$|\mathrm{Im}(\mathbf{t}+\mathbf{p})(x)| \leqslant (1-b)^{-1}(\mathrm{tg}\,\theta + b)\left(\mathrm{Re}(\mathbf{t}+\mathbf{p})(x) + c\|x\|^2\right) + c\|x\|^2.$$

To dowodzi sektorialności formy $\mathbf{t}+\mathbf{p}$.

(4.11) i

$$(1+b)\mathrm{Re}\mathbf{t}(x) + c\|x\|^2 \geqslant \mathrm{Re}(\mathbf{t}+\mathbf{p})(x)$$

dowodzą równoważności norm $\|\cdot\|_{\mathbf{t}}$ i $\|\cdot\|_{\mathbf{t}+\mathbf{p}}$. □

4.6 Forma stowarzyszona z operatorem sektorialnym

Twierdzenie 4.23 *Niech T będzie operatorem sektorialnym. Wtedy forma $\mathbf{t}(x,y) := (x|Ty)$ jest domykalna.*

Dowód. Wystarczy założyć, że forma $\mathbf{t}$ ma wierzchołek 0. Załóżmy, że $x_n \in \mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(\mathbf{t})$, $x_n \to 0$, $\mathbf{t}(x_n - x_m) \to 0$. Wtedy

$$\begin{aligned} |\mathbf{t}(x_n)| &\leqslant |\mathbf{t}(x_n - x_m, x_n)| + |\mathbf{t}(x_m, x_n)| \\ &\leqslant (1+\mathrm{tg}\,\theta)(\mathrm{Re}\mathbf{t}(x_n))^{\frac{1}{2}}(\mathrm{Re}\mathbf{t}(x_n - x_m))^{\frac{1}{2}} + (x_m|Tx_n). \end{aligned}$$

Dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje N takie, że dla $n, m > N$ mamy $\mathrm{Re}\mathbf{t}(x_n - x_m) \leqslant \epsilon^2$. Poza tym, $\lim_{m\to\infty}(x_m|Tx_n) = 0$. Dlatego, $\mathbf{t}(x_n) \to 0$. □

5 Spektrum dyskretne, istotne i operatory zwarte

5.1 Spektrum dyskretne i istotne

Niech X będzie przestrzenią Banacha a A domkniętym operatorem na X. Mówimy, że $e \in \sigma(A)$ należy do spektrum dyskretnego, gdy e jest izolowanym punktem $\sigma(A)$ i $\dim \mathbf{1}_{\{e\}}(A) < \infty$. Spektrum dyskretne oznaczamy przez $\sigma_{\mathrm{d}}(A)$. Spektrum istotne definiujemy jako

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(A) := \sigma(A)\backslash\sigma_{\mathrm{d}}(A).$$

Twierdzenie 5.1 *Niech $z_0 \in \rho(A)$. Wtedy $\sigma_{\mathrm{ess}}(z_0 - A)^{-1} = (z_0 - \sigma_{\mathrm{ess}}(A))^{-1}$, $\sigma_{\mathrm{d}}(z_0 - A)^{-1} = (z_0 - \sigma_{\mathrm{d}}(A))^{-1}$.*

Załóżmy teraz, że $\mathcal{H}$ jest przestrznią Hilberta i A jest operatorem na $\mathcal{H}$. Mamy wtedy:

Twierdzenie 5.2 *Niech A będzie samosprzęrzony i $\lambda \in \sigma(A)$.*
1) $\lambda \in \sigma_{\mathrm{d}}(A)$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje $\epsilon > 0$ taki, że $\dim \mathbf{1}_{[\lambda-\epsilon,\lambda+\epsilon]}(A) < \infty$.
2) $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$ wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $\epsilon > 0$ mamy $\dim \mathbf{1}_{[\lambda-\epsilon,\lambda+\epsilon]}(A) = \infty$.

Twierdzenie 5.3 *Niech A będzie normalny i $\lambda \in \sigma(A)$.*
1) $\lambda \in \sigma_{\mathrm{d}}(A)$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje $\epsilon > 0$ taki, że $\dim \mathbf{1}_{B(\lambda,\epsilon)}(A) < \infty$.
2) $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$ wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $\epsilon > 0$ mamy $\dim \mathbf{1}_{B(\lambda,\epsilon)}(A) = \infty$.

5.2 Operatory skończonego rzędu

W niniejszy podrozdział możemy traktować jako elementarne wprowadzenie do operatorów zwartych.

Definicja 5.4 *Operator $K \in B(X,Y)$ nazywamy operatorem skończonego rzędu, gdy $\dim \mathrm{Ran} K < \infty$.*

Twierdzenie 5.5 *Niech $K \in B(X,Y)$ będzie operatorem skończonego rzędu. Wtedy*

$$\dim \mathrm{Ran} K = \dim X/\mathrm{Ker} K.$$

Dowód. Niech $y_1, \dots, y_n$ będzie bazą w $\mathrm{Ran}K$. Niech będą $x_1, \dots, x_n \in X$ takie, że $Kx_i = y_i$. Wtedy $\mathrm{Span}\{x_1, \dots, x_n\} \cap \mathrm{Ker}K = \{0\}$. Załóżmy, że $z \in X$. Wtedy $Kz = \sum c_i y_i$. Zatem $z - \sum c_i x_i \in \mathrm{Ker}K$. Czyli $z \in \mathrm{Span}\{x_1, \dots, x_n\} + \mathrm{Ker}K$. □

Twierdzenie 5.6 *Niech $K \in B(X)$ będzie operatorem skończonego rzędu. Wtedy $\sigma(K) = \sigma_{\mathrm{pp}}(K)$. Mamy też $\sigma_{\mathrm{ess}}(K) = \emptyset$ jeśli $\dim X < \infty$, w przeciwnym razie $\sigma_{\mathrm{ess}}(K) = \{0\}$.*

Dowód. Korzystając z tego, że $\dim X/\mathrm{Ker}K$ jest skończonego wymiaru, znajdziemy skończenie wymiarową podprzestrzeń Z taką, że $X = \mathrm{Ker}K \oplus Z$. $Z_1 := Z + \mathrm{Ran}K$ jest również skończonego wymiaru. Mamy $KZ_1 \subset Z_1$. Znajdziemy podprzestrzeń Z_2 taką, że $Z_1 \oplus Z_2 = X$. Oczywiście, $Z_2 \subset \mathrm{Ker}K$. □

5.3 Operatory zwarte

Niech X, Y będą przestrzeniami Banacha.

Definicja 5.7 *Operator $K \in B(X,Y)$ nazywamy operatorem zwartym, gdy dla każdego ograniczonego ciągu wektorów $\phi_1, \phi_2, \ldots \in X$ można wybrać podciąg zbieżny z ciągu $K\phi_1, K\phi_2, \ldots \in Y$.*

Równoważna definicja: Jeśli B oznacza kulę jednostkową w X, to $(KB)^{\mathrm{cl}}$ jest zbiorem zwartym.

Definicja 5.8 *Niech* (M, d) *będzie przestrzenią metryczną. Zbiór* $\mathcal{F} \subset C(M)$ *jest rodziną równociągłą gdy*

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \forall m_1, m_2 \in M, \ f \in \mathcal{F} \left(\mathrm{d}(m_1, m_2) < \delta \Rightarrow |f(m_1) - f(m_2)| < \epsilon \right).$$

Bez dowodu podajemy znany twierdzenie:

Twierdzenie 5.9 (Arzela-Ascoli) *Niech* (M, d) *będzie zwartą przestrzenią metryczną a* $\mathcal{F} \subset C(M)$ *ograniczoną rodziną równociągłą. Wtedy każdy ciąg w* $\mathcal{F}$ *zawiera podciąg zbieżny.*

Twierdzenie 5.10 *1) Niech* K *będzie operatorem zwartym. Niech* $\mathrm{w-}\lim_{n\to\infty} \phi_n = \phi$. *Wtedy* $\lim_{n\to\infty} K\phi_n = \phi$.
2) Jeśli A *jest ograniczony,* K *zwarty, to* AK *i* KA *są zwarte.*
3) Jeśli K_n *są zwarte i* $\lim_{n\to\infty} K_n = K$*, to* K *też zwarty.*
4) Jeśli K *jest skończonego rzędu, to* K *jest zwarty.*
5) Jeśli K *jest zwarty, to* K' *jest też zwarty.*

Dowód. 1) Niech $\mathrm{w-}\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Wtedy z Twierdzenia Banacha-Steinhausa mamy $\|x_n\| \leqslant C$. Poza tym, $\mathrm{w-}\lim_{n\to\infty} Kx_n = Kx$ (bo K jest ograniczony). Więc jeśli Kx_n jest zbieżny normowo, to tylko do Kx.

Załóżmy, że Kx_n nie jest zbieżny. Wtedy istnieje podciąg x_{n_j} taki, że $\|Kx_{n_j} - Kx\| > \epsilon > 0$. Możemy wybrać z niego podpodciąg $x_{n_{j_m}}$ taki, że $Kx_{n_{j_m}}$ jest zbieżny. Ale może być zbieżny tylko do Kx, co jest niemożliwe.

2) jest oczywiste.

3) Niech x_n będzie ciągiem ograniczonym. Poniżej skonstruujemy ciąg podciągów $x_{n,k}$ taki, że

$$\|Kx_{n,m} - Kx_{n,k}\| < (\min(m, k, n))^{-1}.$$

Ostatecznie, ciąg $x_{n,n}$ jest podciągiem x_n takim, że $Kx_{n,n}$ spełnia warunek Cauchy'ego.

Załóżmy, że mamy skonstruowany $x_{n,m}$ do indeksu n. Znajdziemy N taki, że $\|K - K_N\| < \frac{1}{3C(n+1)}$. Kładziemy $x_{n+1,m} = x_{n,m}$ dla $m = 1, \dots n$. Natomiast $x_{n+1,m}$ dla $m > n$ wybieramy jako podciąg ciągu $x_{n,m}$ tak, żeby $\|K_N x_{n+1,m} - K_N x_{n+1,k}\| < \frac{1}{3(n+1)}$ dla $k, m > n$. Wtedy dla $m > n$

$$\begin{aligned} \|Kx_{n+1,m} - Kx_{n+1,k}\| &\leqslant \|Kx_{n+1,m} - K_N x_{n,m}\| + \|K_N x_{n+1,m} - K_N x_{n,k}\| \\ &+ \|K_N x_{n+1,m} - Kx_{n+1,m}\| \leqslant \tfrac{2C}{C3(n+1)} + \tfrac{1}{3(n+1)} = (n+1)^{-1}. \end{aligned}$$

4) Wynika ze zwartości kuli w skończenie wymiarowej przestrzeni $\mathrm{Ran}K$.

5) Niech $K \in B(X, Y)$ będzie zwarty. Niech B będzie kulą jednostkową w X a B' kulą jednostkową w Y'. Traktujemy B' jako rodzinę funkcji ciągłych na przestrzeni metrycznej Y. Jest ona równociągła na Y i ograniczona na B. Tym bardziej, B' jest ograniczona

i równociągła na zwartej przestrzeni metrycznej $(KB)^{\rm cl}$. Zatem na mocy Twierdzenia Arzela-Ascoliego z każdego ciągu $y_n' \in B'$ można wybrać podciąg y_{n_k} zbieżny jednostajnie na $(KB)^{\rm cl}$. Zatem $\langle K'y_{n_k}, x\rangle$ zbiega jednostajnie dla $x \in B$. Więc $K'y_{n_k}$ zbiega normowo w X'. □

Twierdzenie 5.11 (Riesza-Schaudera) *Niech K będzie operatorem zwartym w przestrzeni nieskończenie wymiarowej. Wtedy $\sigma_{\rm ess}(K) = \{0\}$. Mamy więc $\sigma_{\rm ess}(K)\backslash\{0\} = \sigma_{\rm pp}(K)\backslash\{0\} = \sigma_{\rm d}(K)$.*

Lemat 5.12 *$\sigma_{\rm pp}(K)\backslash\{0\}$ jest zbiorem dyskretnym.*

Dowód. Niech $\lambda_n \in \sigma_{\rm pp}(K)$, $n = 1, 2, \dots$, $\lambda_n \to \lambda \neq 0$, $x_n \in X$, $Kx_n = \lambda_n x_n$. Niech $M_n = \mathrm{Span}\{x_1, \dots, x_n\}$. Zauważmy, zę M_n jest ściśle rosnącym ciągiem przestrzeni niezmienniczych dla K. Znajdziemy ciąg wektorów $v_1, v_2, \dots$ taki, że $v_n \in M_n$, $\mathrm{dist}(v_n, M_{n-1}) \geqslant \frac{1}{2}$ i $\|v_n\| = 1$. Napiszmy dla $m < n$

$$\lambda_n^{-1}Kv_n - \lambda_m^{-1}Kv_m = v_n - \left(\lambda_m^{-1}Kv_m - \lambda_n^{-1}(K-\lambda_n)v_n\right). \tag{5.12}$$

Mamy $Kv_n \in M_m \subset M_{n-1}$ i $(K-\lambda_n)v_n \in M_{n-1}$. Zatem drugi wyraz z prawej (5.12) ma normę $\geqslant \frac{1}{2}$. Zatem $\lambda_n^{-1}Kv_n$ nie zawiera podciągu Cauchy'ego. Ale jest to ciąg ograniczony. Więc K nie jest zwarty. □

Lemat 5.13 *Jeśli $z \notin \sigma_{\rm pp}(K)\backslash\{0\}$, to istnieje $C > 0$ takie, że*

$$\|(z-K)x\| \geqslant C\|x\|.$$

Dowód. Niech ciąg x_n spełnia $\|x_n\| = 1$, $(z-K)x_n \to 0$. Wtedy przechodząc do podciągu możemy założyć, że $Kx_n \to y$. Mamy wtedy $zx_n \to y$. Mamy 2 możliwości.

1) $y \neq 0$. Wtedy $Ky = zy$. Ale jest to sprzeczne z założeniem, że $z \notin \sigma_{\rm pp}(K)$.

2) $y = 0$. Wtedy $x_n \to 0$, co jest sprzeczne z $\|x_n\| = 1$. □

Lemat 5.14 *$\sigma(K) = \sigma_{\rm pp}(K) \cup \sigma_{\rm pp}(K') \cup \{0\}$.*

Dowód. Niech $z \notin \sigma_{\rm pp}(K) \cup \sigma_p(K') \cup \{0\}$. Korzystając z Lematu 5.13 i faktu, że K' jest zwarty dostajemy

$$\mathrm{Ker}(z-K) = \mathrm{Ker}(z-K') = \{0\}.$$

Więc $(\mathrm{Ran}(z-K))^{\rm cl} = (\mathrm{Ker}(z-K'))^{\rm an} = X$. Z Lematu 5.13 wynika również, że $\mathrm{Ran}(z-K)$ jest domknięty, więc $\mathrm{Ran}(z-K) = X$. Zatem z Lematu 5.13 wynika, że $(z-K)$ ma ograniczoną odwrotność. □

Dowód Twierdzenia 5.11 Niech $\lambda \in \sigma(K)\backslash\{0\}$. Wtedy λ jest izolowanym punktem $\sigma(K)$. Niech γ będzie zamkniętą krzywą wokół λ. Wtedy

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{\{\lambda\}}(K) &= (2\pi\mathrm{i})^{-1}\int_\gamma (z-K)^{-1}\mathrm{d}z = (2\pi\mathrm{i})^{-1}\int_\gamma \Big((z-K)^{-1} - z^{-1}\Big)\mathrm{d}z \\ &= (2\pi\mathrm{i})^{-1}\int_\gamma (z-K)^{-1}Kz^{-1}\mathrm{d}z\end{aligned}$$

jest zwarty. Ale rzut jest zwarty tylko wtedy, gdy jest skończenie wymiarowy. □

5.4 Operatory zwarte w przestrzeni Hilberta

Twierdzenie 5.15 (Hilberta-Schmidta) . *1) Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzeniaą Hilberta i $A \in B(\mathcal{H})$ będzie operatorem zwartym samosprzężonym. Wtedy istnieje układ ortonormalny wektorów własnych operatora A $\phi_1, \phi_2 \dots$ i ciąg liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \dots$ zbieżny do zera taki, że*

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n (\phi_n|\cdot).$$

I na odwrót, dowolny operator tej postaci jest zwarty samosprzężony.
2) Niech $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ będą przestrzeniami Hilberta i $K \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ będzie dowolnym operatorem zwartym z przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ w przestrzeń Hilberta $\mathcal{K}$. Wtedy istnieją układy ortonormalne $\phi_1, \phi_2, \dots \in \mathcal{H}$ i $\psi_1, \psi_2, \dots \in \mathcal{K}$ i ciąg liczb dodatnich $k_1, k_2, \dots$ zbieżny do zera taki, że

$$K = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \psi_n (\phi_n|\cdot).$$

I na odwrót, dowolny operator tej postaci jest zwarty.

Dowód. 1) Ustawmy wartości własne w ciąg $a_1, a_2, \dots$. Połóżmy

$$A_n := \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbf{1}_{\{a_j\}}(A).$$

Wtedy A_n jest samosprzężony i

$$\sigma(A - A_n) = \{a_j \ : \ j > n\}^{\mathrm{cl}}.$$

Zatem

$$\|A - A_n\| = \sup\{|a_j| \ : \ j > n\}.$$

2) Niech $\phi_1, \phi_2 \dots$ będzie układem ortonormalnym złożonym z wektorów własnych samosprzężonego zwartego operatora K^*K z niezerowymi wartościami własnymi $a_1, a_2, \dots$. Połóżmy $\psi_j = \frac{1}{\sqrt{a_j}} K\phi_j$. Wtedy

$$K = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n} \psi_n (\phi_n|\cdot).$$

□

Wniosek 5.16 *Niech $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ będą przestrzeniami Hilberta, niech $K \in B(\mathcal{H},\mathcal{K})$ będzie operatorem zwartym. Wtedy istnieje ciąg $K_n \in B(\mathcal{H},\mathcal{K})$ operatorów skończonego rzędu taki, że $\lim_{n\to\infty} K_n = K$.*

Dowód. Wystarczy położyć

$$K_n = \sum_{j=1}^{n} \sqrt{a_n}\psi_n(\phi_n|\cdot).$$

Wtedy

$$\|K - K_n\|^2 = \|(K - K_n)^*(K - K_n)\| = \sup\{a_j \ : \ j > n\} \to 0.$$

5.5 Ślad i operatory Hilberta-Schmidta

Niech $\{\phi_i\}_{i\in I}$ będzie bazą przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Niech $A \in B(\mathcal{H})$ i $A \geqslant 0$. Definiujemy

$$\mathrm{Tr}A := \sum_{i\in I}(\phi_n|A\phi_n). \tag{5.13}$$

Twierdzenie 5.17 *(5.13) nie zależy od wyboru bazy.*

Dowód.

$$\sum_{i\in I}(\phi_n|A\phi_i) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in I}\sum_{k\in I}(\phi_i|\psi_j)(\psi_j|A\psi_k)(\psi_k|\phi_i) = \sum_{j\in I}(\phi_j|A\phi_j),$$

gdzie skorzystaliśmy z

$$\sum_{i\in I}(\phi_i|\psi_j)(\psi_k|\phi_i) = \delta_{j,k}.$$

□

Twierdzenie 5.18 *Jeśli $A \in B(\mathcal{H})$ spełnia $A \geqslant 0$ i $\mathrm{Tr}A < \infty$, to A jest zwarty.*

Dowód. Jeśli A ma spektrum ciągłe, to istnieje nieskończony rzut P i $\epsilon > 0$ takie, że $A \geqslant \epsilon P$. Wtedy $\mathrm{Tr}A \geqslant \epsilon \mathrm{Tr}P = \infty$.

Zatem A ma wyłącznie spektrum punktowe. Mamy $\mathrm{Tr}A = \sum_{i\in I} a_i$, gdzie a_i są wartościami własnymi A (z uwzględnieniem krotności). □

Dla $A \in B(\mathcal{H},\mathcal{K})$ kładziemy

$$\|A\|_{HS} := (\mathrm{Tr}A^*A)^{\frac{1}{2}}.$$

$HS(\mathcal{H},\mathcal{K})$ oznacza zbiór operatorów ze skończoną normą $\|A\|_{HS}$. $HS(\mathcal{H},\mathcal{K})$ wyposażamy w iloczyn skalarny

$$(A|B)_{HS} := \mathrm{Tr}A^*B = \sum_{i\in I}(A\phi_i|B\phi_i),$$

gdzie $\{\phi_i\}_{i\in I}$ jest dowolną bazą.

Twierdzenie 5.19 *0) Jeśli $B \in HS(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, to B jest zwarty.*
1) $HS(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ jest przestrzenią Hilberta.
2) Jeśli $\{\phi_i\}_{i \in I}$ jest bazą w $\mathcal{H}$ a $\{\psi_i\}_{i \in I}$ jest bazą w $\mathcal{K}$, to $\psi_j(\phi_i|\cdot)$ jest bazą w $HS(\mathcal{H}, \mathcal{K})$.
3) Jeśli $\mathcal{H} = L^2(X, \mu)$, $\mathcal{K} = L^2(Y, \nu)$, to każdy operator $A \in HS \in HS(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ ma jądro całkowe $A(\cdot, \cdot) \in L^2(Y \times X, \nu\mu)$, tzn.

$$(\psi|A\phi) = \int \int \overline{\psi(y)} A(y, x)\phi(x) \mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x)$$

Przyporządkowanie operatorowi $A \in HS(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ jego jądra całkowego $A(\cdot, \cdot) \in L^2(Y \times X, \nu \otimes \mu)$, jest operatorem unitarnym.

Dowód. 0) Operator A^*A ma skończony ślad, więc jest zwarty.

Pokażmy 1) i 2). Niech $e_{ji} := \psi_j(\phi_i|\cdot)$. Sprawdzamy najpierw, że jest to układ ortonormalny. Jeśli $A \in HS(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ jest ortogonalny do wszystkich e_{ji}, to znaczy, że wszystkie jego elementy macierzowe są zero, czyli $A = 0$.

Sprawdzamy również, że jeśli a_{ji} należy do $L^2(J \times I)$, to $\sum_{j \in J,\ i \in I} a_{ji} e_{ji}$ jest jądrem pewnego operatora z $HS(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Zatem $HS(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ jest izomorficzne z $L^2(J \times I)$. Więc jest przestrzenią Hilberta a (e_{ij}) jest bazą ortonormalną. To dowodzi 1) i 2). □

Twierdzenie 5.20 *Załóżmy, że $f, g \in L^\infty(\mathbf{R}^d)$ zbiegają do zera w nieskończoności. Wtedy operator $g(D)f(x)$ jest zwarty.*

Dowód. Niech

$$f_n(x) := \begin{cases} f(x), & |x| < n \\ 0 & |x| \geqslant n, \end{cases}$$

$$g_n(x) := \begin{cases} g(\xi), & |\xi| < n \\ 0 & |\xi| \geqslant n, \end{cases}$$

$$g(D)f(x) = \mathcal{F}^* g(x) \mathcal{F} f(x).$$

$$\begin{aligned} \|g(x)\mathcal{F}f(x) - g_n(x)\mathcal{F}f_n(x)\| &\leqslant \|(g(x) - g_n(x))\mathcal{F}f(x)\| \\ &+ \|g_n(x)\mathcal{F}(f(x) - f_n(x)\| \to 0. \end{aligned}$$

Czyli wystarczy pokazać zwartość $g_n(x)\mathcal{F}f_n(x)$. Ale jego jądro całkowe, równe

$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}d} g_n(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy} f_n(y)$$

jest oczywiście całkowalne z kwadratem. □

5.6 Stabilność spektrum istotnego

Twierdzenie 5.21 *Niech $A \in B(\mathcal{H})$ będzie normalny. Wtedy $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje ciąg wektorów ϕ_n taki, że*

$$\|\phi_n\| = 1, \quad \mathrm{w-}\lim_{n\to\infty} \phi_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty}(A-\lambda)\phi_n = 0. \tag{5.14}$$

Dowód. $\Rightarrow$ Wiemy, że dla każdego n $\dim \mathbf{1}_{B(\lambda,\frac{1}{n})}(A) = \infty$. Znajdziemy więc układ ortonormalny $\phi_1, \phi_2 \dots$ taki, że $\phi_n \in \mathrm{Ran}\mathbf{1}_{B(\lambda,\frac{1}{n})}(A)$. Ciąg $\phi_1, \phi_2, \dots$ spełnia wtedy (5.14).

$\Leftarrow$ Niech $\epsilon > 0$. Mamy

$$(1 - \mathbf{1}_{B(\lambda,\epsilon)}(A))\phi_n = (1 - \mathbf{1}_{B(\lambda,\epsilon)}(A))(A-\lambda)^{-1}(A-\lambda)\phi_n \to 0.$$

Zatem

$$c_n := \|\mathbf{1}_{B(\lambda,\epsilon)}(A)\phi_n\| \to 1.$$

Niech

$$\tilde{\phi}_n := \frac{1}{c_n}\mathbf{1}_{B(\lambda,\epsilon)}(A)\phi_n.$$

Wtedy $\|\tilde{\phi}_n\| = 1$, $\mathrm{w-}\lim_{n\to\infty} \tilde{\phi}_n = 0$ i $\tilde{\phi}_n \in \mathrm{Ran}\mathbf{1}_{B(\lambda,\epsilon)}(A)$. Więc $\mathrm{Span}\{\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2, \dots\}$ jest nieskończenie wymiarowe. Czyli $\mathbf{1}_{B(\lambda,\epsilon)}(A)$ jest nieskończenie wymiarowe. $\square$

Definicja 5.22 *Ciąg wektorów ϕ_n spełniający warunki powyższego twierdzenia nazywamy ciągiem Weyla dla λ i operatora A.*

Twierdzenie 5.23 (Weyl) *Niech $A, B \in B(\mathcal{H})$ będą normalne i $B - A$ niech będzie zwarty. Wtedy $\sigma_{\mathrm{ess}}(A) = \sigma_{\mathrm{ess}}(B)$.*

Dowód. Załóżmy, że $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$. Wtedy istnieje ciąg Weyla $\phi_1, \phi_2, \dots$ dla λ i operatora A. Mamy $\lim_{n\to\infty}(B-A)\phi_n = 0$. Zatem $\phi_1, \phi_2, \dots$ jest ciągiem Weyla dla λ i operatora B. $\square$

Twierdzenie 5.24 *Załóżmy, że A, B są operatorami normalnymi takimi, że dla pewnego $z_0 \notin \sigma(A) \cup \sigma(B)$ operator $(z_0 - A)^{-1} - (z_0 - B)^{-1}$ jest zwarty. Wtedy*

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(A) = \sigma_{\mathrm{ess}}(B).$$

Dowód. Z twierdzenia Weyla $\sigma_{\mathrm{ess}}((z_0 - A)^{-1}) = \sigma_{\mathrm{ess}}((z_0 - B)^{-1})$. Stosujemy następnie Twierdzenie 5.21 dla normalnych ograniczonych operatorów $(z_0 - A)^{-1}$ i $(z_0 - B)^{-1}$. $\square$

Twierdzenie 5.25 *Niech* $f \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$, $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = \infty$ *i* $g \in L^\infty(\mathbf{R}^d)$, $\lim_{|x|\to\infty} g(x) = 0$. *Wtedy*

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(f(D) + g(x)) = \sigma_{\mathrm{ess}}(f(D)).$$

Dowód. Operator $g(x)(z_0 - f(D))^{-1}$ jest zwarty z Twierdzenia 5.20. Dlatego operator

$$(z_0 - f(D) - g(x))^{-1} - (z_0 - f(D))^{-1} = (z_0 - f(D) - g(x))^{-1} g(x)(z_0 - f(D))^{-1}$$

jest też zwarty. Możemy więc skorzystać z Twierdzenia 5.25. □

5.7 Zasada mini-maxu

Niech A będzie ograniczonym od dołu operatorem samosprzężonym. Jeśli ψ nie należy do dziedziny formowej A, to kładziemy $(\psi|A\psi) = \infty$. Definiujemy dla $n = 1, 2, \dots$

$$\mu_n(A) := \sup_{\mathcal{L}\ n\text{-wym. podprz } \mathcal{H}} \inf\{(\psi|A\psi)\ :\ \|\psi\| = 1,\ \psi \in \mathcal{L}^\perp\}.$$

$$\Sigma(A) := \inf \sigma_{\mathrm{ess}}(A).$$

Zauważmy, że jeśli $\mathcal{D}$ jest dziedziną istotną dla formy generowanej przez A, to

$$\mu_n(A) := \sup_{\mathcal{L}\ n\text{-wym. podprz } \mathcal{H}} \inf\{(\psi|A\psi)\ :\ \|\psi\| = 1,\ \psi \in \mathcal{L}^\perp \cap \mathcal{D}\}.$$

Twierdzenie 5.26 *Niech* $\dim \mathbf{1}_{]-\infty,\Sigma]}(A) = N$. *Wtedy dla* $n \leqslant N$, μ_n *jest* n*-tą wartością własną operatora* A *(licząc krotności), a dla* $n > N$, $\mu_n = \Sigma$. *Czyli* μ_n *jest ciągiem rosnącym i jeśli*

$$\dim \mathbf{1}_{]-\infty,a]}(A) = n, \tag{5.15}$$

to $\mu_n \leqslant a \leqslant \mu_{n+1}$. *(*$a = \mu_{n+1}$ *jedynie jeśli* $a = \Sigma$*).*

Dowód. Fakt, że ciąg μ_n jest rosnący jest oczywisty.

Niech (5.15) będzie spełnione. $\mathcal{L} := \mathrm{Ran}\mathbf{1}_{]-\infty,a]}$ ma wymiar n. Zatem

$$\inf\{(\psi|A\psi)\ :\ \|\psi\| = 1,\ \psi \in \mathcal{L}^\perp\} \geqslant a.$$

Stąd $\mu_{n+1} \geqslant a$.

Jeśli zaś $\mathcal{L}$ jest dowolną $n-1$ wymiarową podprzestrzenią, to

$$\dim(\mathcal{L}^\perp \cap \mathrm{Ran}\mathbf{1}_{]-\infty,a]}(A)) \geqslant 1.$$

Zatem

$$\inf\{(\psi|A\psi)\ :\ \|\psi\| = 1,\ \psi \in \mathcal{L}^\perp\} \leqslant a.$$

Więc $\mu_n \leqslant a$. □

Twierdzenie 5.27 (Metoda Reyleigha-Ritza) *Niech $\mathcal{K}$ będzie podprzestrzenią liniową. Połóżmy $A_{\mathcal{K}} := P_{\mathcal{K}} A P_{\mathcal{K}}|_{\mathcal{K}}$, gdzie $P_{\mathcal{K}}$ oznacza rzut ortogonalny na $\mathcal{K}$. Wtedy $A_{\mathcal{K}}$ jest ograniczonym od dołu operatorem samosprzężonym i*

$$\mu_n(A) \leqslant \mu_n(A_{\mathcal{K}}).$$

Dowód. Mamy

$$\begin{aligned}
\mu_n(A_{\mathcal{K}}) &= \sup_{\mathcal{L}\ n\text{-wym. podprz. } \mathcal{K}} \inf\{(\psi|A\psi)\ :\ \|\psi\| = 1,\ \psi \in \mathcal{L}^{\perp} \cap \mathcal{K}\} \\
&= \sup_{\mathcal{L}\ n\text{-wym. podprz. } \mathcal{H}} \inf\{(\psi|A\psi)\ :\ \|\psi\| = 1,\ \psi \in \mathcal{L}^{\perp} \cap \mathcal{K}\} \\
&= \sup_{\mathcal{L}\ n\text{-wym. podprz. } \mathcal{H}} \inf\{(\psi|A\psi)\ :\ \|\psi\| = 1,\ \psi \in \mathcal{L}^{\perp}\} = \mu_n(A).
\end{aligned}$$

□

Twierdzenie 5.28 *1) Niech $A \leqslant B$. Wtedy $\mu_n(A) \leqslant \mu_n(B)$.*
2) $|\mu_n(A) - \mu_n(B)| \leqslant \|A - B\|$.

5.8 Operatory o zwartej rezolwencie

Twierdzenie 5.29 *Niech A będzie operatorem o niepustym zbiorze rezolwentowym. Następujące warunki są równoważne:*
1) $(z_0 - A)^{-1}$ jest zwarty dla pewnego $z_0 \in \rho(A)$.
2) $(z - A)^{-1}$ jest zwarty dla każdego $z \in \rho(A)$.

Dowód. Stosujemy wzór rezolwentowy:

$$(z - A)^{-1} = (z_0 - A)^{-1}\left(1 - (z - z_0)(z - A)^{-1}\right).$$

□

Gdy spełnione są warunki Twierdzenia 5.29, mówimy, że operator A ma zwartą rezolwentę.

Twierdzenie 5.30 *1) Niech A będzie samosprzężony. Wtedy A ma zwartą rezolwentę $\Leftrightarrow\ \sigma(A) = \sigma_{\mathrm{d}}(A)$.*
2) Niech A będzie dodatkowo ograniczony od dołu. Wtedy A ma zwartą rezolwentę $\Leftrightarrow$ $\mu_n(A) \to \infty$.

Twierdzenie 5.31 *Niech $f, g \in L^{\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$, $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = \infty$ i $\lim_{|x|\to\infty} g(x) = \infty$. Wtedy*

$$H := f(x) + g(D)$$

ma zwartą rezolwentę.

Dowód. Oczywiście, funkcje f, g są ograniczone od dołu. Ustalmy $\epsilon > 0$. Dla $r > 0$ niech

$$H_r := f(x) + \min(g(D), r).$$

Wtedy dla $z \in \mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$ operator $(\min(g(D), r) - r)(z - f(x) - r)^{-1}$ jest zwarty. Więc również operator

$$(z - H_r)^{-1} - (z - f(x) - r)^{-1} = (z - H_r)^{-1}(\min(g(D), r) - r)(z - f(x) - r)^{-1}$$

jest zwarty. Zatem

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(H_r) = \sigma_{\mathrm{ess}}(f(x) + r) \subset [r + \inf f, \infty[.$$

Zatem istnieje N takie, że dla $n > N$

$$\mu_n(H_r) \geqslant r - \epsilon + \inf f.$$

Ale $H_r \leqslant H$. Stąd

$$\mu_n(H_r) \leqslant \mu_n(H).$$

Czyli dla $n > N$, $\mu_n(H) \geqslant R - \epsilon + \inf f$. Zatem $\mu_n(H) \to \infty$. □

6 Zastosowania

6.1 Transformacja Fouriera na okręgu

$[-\pi, \pi]$ utożsamiamy z okręgiem jednostkowym S^1 Bez dowodu przypomnijmy, że $C(S^1)$ jest gęste w $L^2(S^1)$.

Twierdzenie 6.1 *Układ*

$$u_n := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\phi}$$

stanowi bazę w $L^2([-\pi, \pi])$. Innymi słowy, odwzorowanie

$$(\mathcal{F}f)_n := (u_n|f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\phi} f(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}_n$$

jest odwzorowaniem unitarnym z $L^2([-\pi, \pi])$ na $L^2(\mathbf{Z})$.

Lemat 6.2 $\{u_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ *jest układem ortonormalnym.*

Zdefiniujmy

$$p_r(\phi) := \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbf{Z}} r^{-|n|} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\phi} = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\phi + r^2}.$$

Lemat 6.3 $\int p_r(\psi)\mathrm{d}\psi = 1$.

Dowód.

$$\int p_r(\psi)\mathrm{d}\psi = \int \tfrac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbf{Z}} r^{-|n|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\phi} = 1.$$

□Definiujemy

$$P_r f(\phi) := \int_{-\pi}^{\pi} p_r(\phi-\psi)f(\psi)\mathrm{d}\psi.$$

Lemat 6.4 $\|P_r\| = 1$ *i*

$$\lim_{r\to 1} P_r f = f.$$

Dowód. Układ ortonormalny u_n możemy uzupełnić do bazy. Sprawdzamy elementy macierzowe i dostajemy $\|P_r\| = 1$.

Mamy dla każdego $\epsilon > 0$

$$\lim_{r\to 1}\left(\sup_{|\psi|>\epsilon} p_r(\psi)\right) = 0.$$

Zatem jeśli $f \in C(S^1)$, to

$$\begin{aligned} f(\phi) - \int p_r(\phi-\psi)f(\psi)\mathrm{d}\psi &= \int p_r(\phi-\psi)(f(\psi)-f(\phi))\mathrm{d}\psi) \\ &= \int_{|\phi-\psi|<\epsilon} p_r(\phi-\psi)(f(\psi)-f(\phi))\mathrm{d}\psi) \\ &+ \int_{|\phi-\psi|>\epsilon} p_r(\phi-\psi)(f(\psi)-f(\phi))\mathrm{d}\psi) \end{aligned}$$

Jeśli $\delta > 0$, to znajdziemy $\epsilon > 0$ taki, że $|\psi-\phi| < \epsilon$ implikuje $f(\psi)-f(\phi)| < \delta$. Zatem pierwszy wyraz $\leqslant \delta$. Drugi wyraz $\leqslant 2\max|f|2\pi\sup_{|\phi|>\epsilon} p_r(\phi)$. To dowodzi lematu dla $f \in C(S^1)$. □

Dowód Twierdzenia Zauważmy, że

$$\mathrm{Ran}P_r \subset (\mathrm{Span}\{u_n \ : \ n\in\mathbf{Z}\})^{\mathrm{cl}}.$$

Z drugiej strony $\lim_{n\to\infty} P_n f = f$. Zatem $\left(\bigcup_{r<1}\mathrm{Ran}P_r\right)^{\mathrm{cl}} = L^2(S^1)$. Czyli

$$(\mathrm{Span}\{u_n \ : \ n\in\mathbf{Z}\})^{\mathrm{cl}} = L^2(S^1).$$

Niech $g \in L^1([-\pi,\pi])$, czyli

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g(\phi)|\mathrm{d}\phi < \infty.$$

Definiujemy T_g (zdefinowany przynajmniej na funkcjach ciągłych)

$$T_g f(\phi) := \int g(\phi-\psi)f(\psi)\mathrm{d}\psi.$$

Obliczmy jego macierz w bazie u_n:

$$(u_n|T_g u_m) = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}\phi\mathrm{d}\psi g(\phi-\psi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\phi+\mathrm{i}n\psi} = \delta_{n,m}\hat{g_n}.$$

Zatem T rozszerza się do operatora ograniczonego z normą $\|T\| = \sup_{n\in\mathbf{Z}}|\hat{g_n}|$. Mamy

$$T_g u_n(\phi) = \hat{g}_n u_n.$$

Czyli $\sigma^{\mathrm{pp}}(T_g) = \{\hat{g}_n \ : \ n\in\mathbf{Z}\}$.

Rzut na $\mathrm{Span}(u_N,\dots,u_M)$ ma jądro całkowe

$$\chi_{N,M}(p_0)(\phi,\psi) = \sum_{n=N}^{M}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\phi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\psi} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(M+\frac12)(\psi-\phi)}-\mathrm{e}^{(N-\frac12)(\psi-\phi)}}{\mathrm{e}^{\frac12(\psi-\phi)}-\mathrm{e}^{\frac12(\phi-\psi)}}$$

6.2 Zjawisko Gibbsa

Niech

$$D_n f := (2\pi)^{-1}\sum_{j=-n}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\phi}\hat{f}_j = (2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(n+\frac12)(\phi-\psi)}{\sin\frac12(\phi-\psi)}f(\psi)\mathrm{d}\psi.$$

Oczywiście $D_n f\to f$ w sensie L^2.

Twierdzenie 6.5 *Niech*

$$f(\phi) := \begin{cases} 0, & -\pi<\phi<0, \\ 1, & 0<\phi<\pi. \end{cases}, \quad \mathrm{si}(y) := \pi^{-1}\int\limits_{-\infty}^{y}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x.$$

Wtedy

$$D_n f\left(\tfrac{y}{n+\frac12}\right)\to\mathrm{si}(y).$$

Dowód.

$$\begin{aligned} D_n f(\phi) &= (2\pi)^{-1}\int\limits_{\phi-\pi}^{\phi}\tfrac{\sin(n+\frac12)\psi}{\sin\frac12\psi}\mathrm{d}\psi \\ &\sim \int\limits_{-\infty}^{y}\tfrac{\sin(n+\frac12)\psi}{\pi\psi}\mathrm{d}\psi = \pi^{-1}\int\limits^{\phi(n+\frac12)}\tfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{si}(\phi(n+\tfrac12)). \end{aligned}$$

□

6.3 “Magnetyczne” warunki brzegowe na okręgu

Ustalmy $\alpha \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Niech

$$u_{\alpha+n} := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+\alpha)\phi},$$

Stwierdzenie 6.6 *Wektory* $(u_{\alpha+n}),\ n \in \mathbf{Z}$ *tworzą bazę ortonormalną.*

Dowód. Operator

$$U_\alpha f(\phi) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\phi} f(\phi)$$

jest unitarny i spełnia

$$U_\alpha u_n = u_{\alpha,n}$$

□

Zauważmy, że

$$u_{\alpha+n}(\pi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha 2\pi} u_{\alpha+n}(-\pi).$$

6.4 Symetria ze względu na odbicia na okręgu

Operator

$$\epsilon f(\phi) := f(-\phi)$$

jest jednocześnie samosprzężony i unitarny. Spełnia $\epsilon^2 = 1$. Ma wartości własne ± 1. Definiujemy

$$L^2_\pm([-\pi,\pi]) := \{f \in L^2([-\pi,\pi]) \ :\ \epsilon f = \pm f\}.$$

Niech $P_\pm := \mathbf{1}_{\pm 1}(\epsilon)$. Wtedy

$$P_\pm f(\phi) := \frac{1}{2}(f(\phi) \pm f(-\phi)).$$

Wprowadźmy nową bazę

$$\begin{aligned}
u_0^+ &= u_0 &&= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \\
u_n^+ &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(u_n + u_{-n}) &&= \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \cos n\phi, \quad n = 1, 2, \dots \\
u_n^- &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(u_n - u_{-n}) &&= \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \sin n\phi, \quad n = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

Stwierdzenie 6.7 $(u_n^+),\ n = 0, 1, \dots$ *jest bazą* $L^2_+([-\pi,\pi])$ *a* $(u_n^-),\ n = 1, \dots$ *jest bazą* $L^2_-([-\pi,\pi])$

6.5 Operator różniczkowania

6.5.1 Różniczkowanie na prostej

Rozważmy przestrzeń $L^2(\mathbf{R})$ a w niej następujący operator nieograniczony:

$$\mathcal{D}(D) = \{\phi \in L^2(\mathbf{R}) \ : \ \phi' \in L^2(\mathbf{R})\},$$

$$D\phi(x) := \frac{1}{i}\partial_x\phi(x), \quad \phi \in \mathcal{D}(D).$$

Twierdzenie 6.8 *D jest operatorem domkniętym.*

$$\sigma^{\mathrm{pp}}(D) = \emptyset, \quad \sigma(D) = \mathbf{R},$$

Jądro całkowe operatora $(z-D)^{-1}$ jest równe

$$R(z,x,y) = \begin{cases} -\mathrm{i}\theta(x-y)\mathrm{e}^{iz(x-y)}, & \mathrm{Im}z > 0, \\ +\mathrm{i}\theta(y-x)\mathrm{e}^{iz(x-y)}, & \mathrm{Im}z < 0. \end{cases}$$

Operator D generuje grupę

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}tD}\phi(x) = \phi(x+t), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Dowód. Twierdzenie wynika z własności transformacji Fouriera na $\mathbf{R}$ i wzoru $D = \mathcal{F}^* x \mathcal{F}$. W szczególności

$$R(z,x,y) = (2\pi)^{-1}\int (z-\xi)^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-y)\xi}\mathrm{d}\xi.$$

□

Wprowadźmy przy okazji podprzestrzeń $L^2_+(\mathbf{R})$ parzystych i $L^2_-(\mathbf{R})$ nieparzystych funkcji na $\mathbf{R}$. Oczywiście, są to domknięte, wzajemnie ortogonalne podprzestrzenie $L^2(\mathbf{R})$. Podobnie

$$\mathcal{D}_\pm(D) := \mathcal{D}(D) \cap L^2_\pm(\mathbf{R})$$

są domkniętymi, wzajemnie ortogonalnymi podprzestrzeniami w $\mathcal{D}(D)$. Ze względu na sumę prostą $L^2(\mathbf{R}) = L^2_+(\mathbf{R}) \oplus L^2_-(\mathbf{R})$ mamy

$$D = \begin{bmatrix} 0 & D_{-+} \\ D_{+-} & 0 \end{bmatrix}.$$

Oczywiście, D_{-+} i D_{+-} są domknięte, mają dziedziny $\mathcal{D}_+(D)$, $\mathcal{D}_-(D)$ i $D^*_{-+} = D_{+-}$.

6.5.2 Różniczkowanie na półprostej

Rozważmy przestrzeń $L^2(\mathbf{R}_+)$ a w niej następujące operatory nieograniczone:

$$\mathcal{D}(D_{\max}) = \{\phi \in L^2(\mathbf{R}_+) \ : \ \phi' \in L^2(\mathbf{R}_+)\},$$

$$D_{\max}\phi(x) := \frac{1}{i}\partial_x\phi(x), \quad \phi \in \mathcal{D}(D_{\max}),$$

$$\mathcal{D}(D_{\min}) = \{\phi \in L^2(\mathbf{R}_+) \ : \ \phi' \in L^2(\mathbf{R}_+), \ \phi(0) = 0\},$$

$$D_{\min}\phi(x) := \frac{1}{\mathrm{i}}\partial_x\phi(x), \quad \phi \in \mathcal{D}(D_{\min}).$$

Definicja $\mathcal{D}(D_{\min})$ jest prawidłowa, bo $L^2 \subset L^1_{\mathrm{loc}}$, a jeśli $\phi \in L^1_{\mathrm{loc}}$, to ϕ jest ciągłe, więc $\phi(0)$ ma sens.

Twierdzenie 6.9 *Operatory $D_{\max}$ i $D_{\min}$ są domknięte, operator $D_{\min}$ jest symetryczny i*

$$D_{\min} \subset D_{\max}, \ D^*_{\min} = D_{\max}.$$

Mamy

$$\begin{aligned} \sigma^{\mathrm{pp}}(D_{\max}) &= \mathbf{C}_+, \quad \sigma(D_{\max}) = \mathbf{C}^{\mathrm{cl}}_+, \\ D_{\max}\mathrm{e}^{\mathrm{i}zx} &= z\mathrm{e}^{\mathrm{i}zx}, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}zx} \in \mathcal{D}(D_{\max}), \quad \mathrm{Im}z > 0, \\ \sigma^{\mathrm{pp}}(D_{\min}) &= \emptyset, \quad \sigma(D_{\min}) = \mathbf{C}^{\mathrm{cl}}_-, \end{aligned} \tag{6.16}$$

Jądra całkowe $(z - D_{\max})^{-1}$ i $(z - D_{\min})^{-1}$ są równe

$$R_{\max}(z, x, y) = \mathrm{i}\theta(y - x)\mathrm{e}^{iz(x-y)}, \ \mathrm{Im}z < 0.$$

$$R_{\min}(z, x, y) = -\mathrm{i}\theta(x - y)\mathrm{e}^{iz(x-y)}, \ \mathrm{Im}z > 0.$$

Operatory te generują półgrupy

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}tD_{\max}}\phi(x) = \phi(x + t), \quad t \geqslant 0.$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}tD_{\min}}\phi(x) = \phi(x + t), \quad t \leqslant 0.$$

Dowód. Niech

$$L_\pm(\mathbf{R}) \ni \phi \mapsto J_\pm\phi := \sqrt{2}\phi\Big|_{\mathbf{R}_+} \in L^2(\mathbf{R}_+).$$

Wtedy $J_\pm$ są operatorami unitarnymi. Po obcięciu do $\mathcal{D}_\pm(D)$ mają swe obrazy w $\mathcal{D}(D_{\max})$ i $\mathcal{D}(D_{\min})$, i wtedy też są unitarne. Mamy

$$D_{\min} = \frac{1}{2}J_+D_{+-}J^*_-,$$

$$D_{\max} = \frac{1}{2} J_- D_{-+} J_+^*.$$

Stąd wynika domkniętość $D_{\min}$ i $D_{\max}$ oraz to, że jeden jest sprzężeniem drugiego.

Wiemy, z Twierdzenia 6.8, że operator $R(z)$ na $L^2(\mathbf{R})$ z jądrem $R(z,x,y)$ jest ograniczony. Przestrzeń $L^2(\mathbf{R}_+)$ traktujmy jako podprzestrzeń $L^2(\mathbf{R})$. Operator $R_{\min}(z)$ jest wtedy równy

$$R_{\min}(z) = \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}(x) R(z) \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}(x),$$

zatem też jest ograniczony. Niech $\phi \in \mathcal{D}(D_{\min})$. Wtedy

$$\begin{aligned} R_{\min}(z)(z - D_{\min})\phi &= \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+} R(z) \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}(x)(z - D)\phi \\ &= \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+} R(z)(z - D)\phi \\ &= \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}\phi = \phi. \end{aligned}$$

Sprawdzamy, że jeśli $\phi \in L^2(\mathbf{R}_+)$, $\mathrm{Im} z > 0$, to $R(z)\phi \in \mathcal{D}(D_{\min})$. Więc

$$R(z)\phi = \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}(x) R(z) \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}(x)\phi = R_{\min}(z)\phi,$$

$$\phi = (z - D)R(z)\phi = (z - D_{\min})R_{\min}(z)\phi.$$

Czyli $R_{\min}(z)$ jest operatorem odwrotnym do $z - D_{\min}$. Stąd $\rho(D_{\min}) \supset \mathbf{C}_+$. Zatem $\rho(D_{\max}) \supset \mathbf{C}_-$. Ale z (6.16) wynika, że $\sigma_{\mathrm{pp}}(D)_{\max} \supset \mathbf{C}_+$. Więc $\sigma(D_{\max}) = \mathbf{C}_+^{\mathrm{cl}}$. Zatem $\sigma(D_{\min}) = \mathbf{C}_-^{\mathrm{cl}}$. Ponieważ $R_{\max}(z) = R_{\min}(\bar{z})^*$, więc

$$R_{\max}(z,x,y) = \overline{R_{\min}(\bar{z},y,x)}.$$

□

6.5.3 Różniczkowanie na odcinku I

Rozważamy przestrzeń $L^2([-\pi,\pi])$. Niech $\kappa \in \mathbf{C}$.

$$\mathcal{D}(D_\kappa) = \{\phi \in L^2([-\pi,\pi]) \ : \ \phi' \in L^2([-\pi,\pi]),\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\kappa}\phi(-\pi) = \phi(\pi)\}.$$

$$D_\kappa \phi(x) := \frac{1}{i}\partial_x \phi(x), \qquad \phi \in \mathcal{D}(D_\kappa).$$

Twierdzenie 6.10 *Operatory D_κ są domknięte a dla $\kappa \in \mathbf{R}$ samosprzężone. Mamy*

$$D_\kappa^* = D_{\bar{\kappa}}, \qquad D_\kappa = D_{\kappa+2\pi},$$

$$\sigma(D_\kappa) = \sigma_{\mathrm{pp}}(D_\kappa) = \mathbf{Z} + \kappa, \quad D_\kappa \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+\kappa)x} = (n+\kappa)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+\kappa)x},\ n \in \mathbf{Z}.$$

Jądro całkowe $(z - D_\kappa)^{-1}$ jest równe

$$R_\kappa(z,x,y) = \frac{1}{2\sin\pi(z-\kappa)}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z-\kappa)\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z(x-y)}\theta(x-y) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(z-\kappa)\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z(x-y)}\theta(y-x)\right).$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}tD_\kappa}\phi(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi n\kappa}\phi(x+t), \quad (2n-1)\pi < x+t < (2n+1)\pi.$$

Wszystkie operatory D_κ są do siebie podobne z dokładnością do addytywnej stałej:

$$\mathcal{D}(D_\kappa) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa x}\mathcal{D}(D_0), \qquad D_\kappa = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa x}D_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\kappa x} + \kappa. \tag{6.17}$$

Dowód. Własności D_0 wynikają z zastosowania transformacji Fouriera. Własności D_κ wynikają z (6.17). □

6.5.4 Różniczkowanie na odcinku II

$$\mathcal{D}(D_{\pm\mathrm{i}\infty}) = \{\phi \in L^2([-\pi,\pi]) \ : \ \phi' \in L^2([-\pi,\pi]), \ \ \phi(\pm\pi) = 0\}.$$

$$D_{\pm\mathrm{i}\infty}\phi(x) := \frac{1}{i}\partial_x\phi(x), \qquad \phi \in \mathcal{D}(D_{\pm\mathrm{i}\infty}).$$

Twierdzenie 6.11 *Operatory $D_{\pm\mathrm{i}\infty}$ są domknięte. -Mamy*

$$D^*_{\pm\mathrm{i}\infty} = D_{\mp\mathrm{i}\infty}.$$

$$\sigma(D_{\pm\mathrm{i}\infty}) = \emptyset.$$

Jądro całkowe $(z - D_{\mathrm{i}\infty})^{-1}$ jest równe

$$R_{\mathrm{i}\infty}(z,x,y) = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z(x-y+\pi)}\theta(y-x), \quad z \in \mathbf{C}.$$

$D_{\mathrm{i}\infty}$ generuje półgrupę kontrakcji dla $t \geqslant 0$:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}tD_{\mathrm{i}\infty}}\phi(x) = \begin{cases} \phi(x+t), & -\pi < x+t < \pi \\ 0 & \pi < x+t \end{cases}$$

6.5.5 Różniczkowanie na odcinku III

$$\mathcal{D}(D_{\max}) = \{\phi \in L^2([0,1]) \ : \ \phi' \in L^2([0,1])\},$$

$$\mathcal{D}(D_{\min}) = \{\phi \in L^2([0,1]) \ : \ \phi' \in L^2([0,1]), \ \phi(0) = \phi(1) = 0\},$$

$$D_{\max}\phi(x) := \frac{1}{i}\partial_x\phi(x), \quad \phi \in \mathcal{D}(D_{\max}),$$

$$D_{\min}\phi(x) := \frac{1}{i}\partial_x\phi(x), \quad \phi \in \mathcal{D}(D_{\min}).$$

Twierdzenie 6.12 *Operatory $D_{\min}$ i $D_{\max}$ są domknięte. $D_{\min}$ jest symetryczny. Mamy*

$$D_{\min}^* = D_{\max}, \quad D_{\min} \subset D_\kappa \subset D_{\max}, \quad \kappa \in \mathbf{C} \cup \{\pm \mathrm{i}\infty\}.$$

$$\sigma^{\mathrm{pp}}(D_{\max}) = \mathbf{C}, \quad \sigma(D_{\max}) = \mathbf{C},$$

$$D_{\max}\mathrm{e}^{\mathrm{i}zx} = z\mathrm{e}^{\mathrm{i}zx}, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}zx} \in \mathcal{D}(D_{\max}), \qquad z \in \mathbf{C}.$$

$$\sigma^{\mathrm{pp}}(D_{\min}) = \emptyset, \quad \sigma(D_{\min}) = \mathbf{C},$$

6.6 Laplasjan na prostej i półprostej

6.6.1 Laplasjan na prostej

Rozważmy przestrzeń $L^2(\mathbf{R})$.

$$\mathcal{D}(-\Delta) = \{\phi \in L^2(\mathbf{R}) \ : \ \phi'' \in L^2(\mathbf{R})\}.$$

$$-\Delta\phi(x) := -\partial_x^2\phi(x), \quad \phi \in \mathcal{D}(-\Delta).$$

Twierdzenie 6.13 *$-\Delta$ jest samosprzężonym dodatnim operatorem.*

$$\sigma^{\mathrm{pp}}(-\Delta) = \emptyset, \quad \sigma(-\Delta) = \mathbf{R}_+^{\mathrm{cl}},$$

Jądro całkowe $(z + \Delta)^{-1}$ jest równe

$$R(z, x, y) = -\frac{i}{2\sqrt{z}}\mathrm{e}^{i\sqrt{z}|x-y|}, \ z \in \mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_+^{\mathrm{cl}}, \ \mathrm{Im}\sqrt{z} > 0.$$

Półgrupa generowana przez $-\Delta$, czyli $\mathrm{e}^{-t\Delta}$, ma jądro całkowe

$$K(t, x, y) = (4\pi t)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}.$$

6.6.2 Laplasjan na półprostej I

Rozważmy przestrzeń $L^2(\mathbf{R}_+)$. Niech $\mu \in \mathbf{C} \subset \{\infty\}$,

$$\mathcal{D}(-\Delta_\mu) = \{\phi \in L^2(\mathbf{R}_+) \ : \ \phi'' \in L^2(\mathbf{R}_+), \ \mu\phi(0) = \phi'(0)\}.$$

(Jeśli $\mu = \infty$, to są to warunki brzegowe Dirichleta, czyli $\phi(0) = 0$, jeśli $\mu = 0$, to są to warunki brzegowe Neumanna, czyli $\phi'(0) = 0$).

$$-\Delta_\mu\phi(x) := -\partial_x^2\phi(x), \qquad \phi \in \mathcal{D}(-\Delta_\mu).$$

Zdefiniujmy też formę dla $\mu \in \mathbf{R}$

$$\delta_\mu(\phi, \psi) := -\mu\overline{\phi(x)}\psi(x) + \int \overline{\phi'(x)}\psi(x)\mathrm{d}x,$$

z dziedziną $C_0^\infty([0,\infty])$. Dla $\mu=\infty$, definiujemy

$$\delta_\mu(\phi,\psi) := \int \overline{\phi'(x)}\psi(x)\mathrm{d}x,$$

z dziedziną $C_0^\infty(]0,\infty])$.

Twierdzenie 6.14 *Operator $-\Delta_\mu$ jest domknięty, a dla $\mu\in\mathbf{R}\subset\{\infty\}$ samosprzężony. Mamy*

$$-\Delta_\mu^* = -\Delta_\mu,$$

$$\sigma^{\mathrm{pp}}(-\Delta_\mu) = \begin{cases} -\mu^2, & \mathrm{Re}\mu<0 \\ \emptyset, & \textit{w przeciwnym razie,} \end{cases}$$

$$\sigma(-\Delta_\mu) = \begin{cases} \mathbf{R}_+\cup -\mu^2, & \mathrm{Re}\mu<0 \\ \mathbf{R}_+, & \textit{w przeciwnym razie,} \end{cases}$$

$$-\Delta_\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu x} = \mu^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu x},\ \ \mathrm{Re}\mu<0, \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu x}\in\mathcal{D}(-\Delta_\mu).$$

Jądro całkowe operatora $(z+\Delta_\mu)^{-1}$ jest równe

$$R_\mu(z,x,y) = -\frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{z}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{z}|x-y|} + \frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{z}}\frac{(\mathrm{i}\mu-\sqrt{z})}{(\mathrm{i}\mu+\sqrt{z})}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{z}(x+y)},$$

w szczególności, dla warunków Dirichleta,

$$R_\infty(z,x,y) = -\frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{z}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{z}|x-y|} + \frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{z}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{z}(x+y)},$$

i dla warunków Neumanna

$$R_0(z,x,y) = -\frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{z}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{z}|x-y|} - \frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{z}}\mathrm{e}^{i\sqrt{z}(x+y)}.$$

Mamy też

$$-\Delta_0 = D_{\min}D_{\max}, \qquad -\Delta_\infty = D_{\max}D_{\min}.$$

Formy δ_μ są domykalne i ich domknięcia zadają operator $-\Delta_\mu$.

Dowód.

$$\begin{aligned}
&-(\psi|\Delta_\mu\phi) = -\textstyle\int_0^\infty \bar\psi(x)\partial_x^2\phi(x)\mathrm{d}x \\
&= \bar\psi(0)\partial_x\phi(0) - \partial_x\bar\psi(0)\phi(0) - \textstyle\int_0^\infty \partial_x^2\bar\psi(x)\phi(x)\mathrm{d}x \\
&= -\textstyle\int_0^\infty \partial_x^2\bar\psi(x)\phi(x)\mathrm{d}x = -(\Delta_{\bar\mu}\psi|\phi).
\end{aligned}$$

□

6.6.3 Laplasjan na półprostej II

$$\mathcal{D}(-\Delta_{\max}) = \{\phi \in L^2(\mathbf{R}_+) \ : \ \phi'' \in L^2(\mathbf{R}_+)\}.$$

$$-\Delta_{\max}\phi(x) := -\partial_x^2\phi(x), \quad \phi \in \mathcal{D}(D_{\max}).$$

$$\mathcal{D}(-\Delta_{\min}) = \{\phi \in L^2(\mathbf{R}_+) \ : \ \phi'' \in L^2(\mathbf{R}_+)\}, \ \phi(0) = \phi'(0) = 0\}.$$

$$-\Delta_{\min}\phi(x) := -\partial_x^2\phi(x), \quad \phi \in \mathcal{D}(D_{\min}).$$

Twierdzenie 6.15 *Operatory $-\Delta_{\min}$ i $-\Delta_{\max}$ są domknięte i $-\Delta_{\min}$ jest symetryczny. Mamy*

$$-\Delta_{\min}^* = -\Delta_{\max}, \qquad -\Delta_{\min} \subset -\Delta_\mu \subset -\Delta_{\max}.$$

$$\sigma^{\mathrm{pp}}(-\Delta_{\max}) = \mathbf{C}, \qquad \sigma(-\Delta_{\max}) = \mathbf{C},$$

$$-\Delta_{\max}\mathrm{e}^{ikx} = k^2\mathrm{e}^{izx}, \ \mathrm{Im}k > 0, \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \in \mathcal{D}(-\Delta_{\max}).$$

$$\sigma^{\mathrm{pp}}(-\Delta_{\min}) = \emptyset, \quad \sigma(-\Delta_{\min}) = \mathbf{C}.$$

$$-\Delta_{\min} = D_{\min}^2, \quad -\Delta_{\max} = D_{\max}^2.$$

6.7 Laplasjan na odcinku

6.7.1 Periodyczne warunki brzegowe

Rozważamy przestrzeń $L^2([-\pi,\pi])$. Niech $\kappa \in \mathbf{C}$.

$$\mathcal{D}(-\Delta_\kappa) = \{\phi \in L^2([-\pi,\pi]) \ : \ \phi'' \in L^2([-\pi,\pi]), \ \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\kappa}\phi(-\pi) = \phi(\pi), \ \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\kappa}\phi'(-\pi) = \phi'(\pi)\},$$

$$-\Delta_\kappa\phi(x) := -\partial_x^2\phi(x), \qquad \phi \in \mathcal{D}(-\Delta_\kappa).$$

Zdefiniujmy też

$$\mathcal{D}(-\delta_\kappa) = \{\phi \in L^2([-\pi,\pi]) \ : \ \phi' \in L^2([-\pi,\pi]), \ \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\kappa}\phi(-\pi) = \phi(\pi)\},$$

$$-\delta_\kappa(\phi,\psi) := \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\phi'(x)}\psi(x)\mathrm{d}x, \qquad \phi,\psi \in \mathcal{D}(-\delta_\kappa).$$

Twierdzenie 6.16 *Operatory $-\Delta_\kappa$ są domknięte a dla $\kappa \in \mathbf{R}$ samosprzężone. Mamy*

$$-\Delta_\kappa^* = -\Delta_{\bar\kappa}, \qquad -\Delta_\kappa = -\Delta_{\kappa+2\pi},$$

$$\sigma(-\Delta_\kappa) = \sigma_{\mathrm{pp}}(-\Delta_\kappa) = \mathbf{Z} + \kappa,$$

$$-\Delta_\kappa\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+\kappa)x} = (n+\kappa)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+\kappa)x}, \ n \in \mathbf{Z}, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+\kappa)x} \in \mathcal{D}(-\Delta_\kappa).$$

Wszystkie operatory $-\Delta_\kappa$ są związane relacjami

$$\mathcal{D}(-\Delta_\kappa) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa x}\mathcal{D}(-\Delta_0), \qquad -\Delta_\kappa = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa x}(-\Delta_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\kappa x} + \kappa. \tag{6.18}$$

Forma δ_κ jest domknięta i zadaje operator Δ_κ.

6.7.2 Symetria ze względu na odbicia

Operator

$$\epsilon f(\phi) := f(-\phi)$$

jest jednocześnie samosprzężony i unitarny. Spełnia $\epsilon^2 = 1$. Ma wartości własne ± 1. Definiujemy

$$L^2_\pm([-\pi,\pi]) := \{f \in L^2([-\pi,\pi]) \;:\; \epsilon f = \pm f\}.$$

Niech $P_\pm := \mathbf{1}_{\pm 1}(\epsilon)$. Wtedy

$$P_\pm f(\phi) := \frac{1}{2}(f(\phi) \pm f(-\phi)).$$

Wprowadźmy nową bazę

$$\begin{aligned} u_0^+ &= u_0 && = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ u_n^+ &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(u_n + u_{-n}) && = \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos n\phi, \quad n = 1,2,\dots \\ u_n^- &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(u_n - u_{-n}) && = \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin n\phi, \quad n = 1,2,\dots \end{aligned}$$

Stwierdzenie 6.17 *Operator Δ_0 komutuje z ϵ. (u_n^+), $n = 0,1,\dots$ jest bazą $L^2_+([-\pi,\pi])$ a (u_n^-), $n = 1,\dots$ jest bazą $L^2_-([-\pi,\pi])$ Mamy*

$$\Delta_0 u_n^\pm = n^2 u_n^\pm, \qquad \epsilon u_n^\pm = \pm u_n^\pm,$$

$$\sigma(\Delta_0,\epsilon) = \{(n^2,1) \;:\; n = 0,1,\dots\} \cup \{(n^2,-1) \;:\; n = 1,\dots\}.$$

6.7.3 Warunki brzegowe Dirichleta i Neumanna

W przestrzeni $L^2([0,\pi])$ definiujemy

$$\mathcal{D}(-\Delta_{\mathrm{N}}) = \{\phi \in L^2([0,\pi]) \;:\; \phi'' \in L^2([0,\pi]),\ \phi'(0) = \phi'(\pi) = 0\},.$$

$$-\Delta_{\mathrm{N}}\phi(x) := -\partial_x^2\phi(x), \qquad \phi \in \mathcal{D}(-\Delta_{\mathrm{N}}).$$

$$\mathcal{D}(-\Delta_{\mathrm{D}}) = \{\phi \in L^2([0,\pi]) \;:\; \phi'' \in L^2([0,\pi]),\ \phi(0) = \phi(\pi) = 0\},.$$

$$-\Delta_{\mathrm{D}}\phi(x) := -\partial_x^2\phi(x), \qquad \phi \in \mathcal{D}(-\Delta_{\mathrm{D}}).$$

Definiujemy też formy

$$\delta_{\mathrm{D}}(\phi,\psi) := \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\phi(x)}\psi(x)\mathrm{d}x, \quad \phi,\psi \in \mathcal{D}(\delta_{\mathrm{D}}),$$

z dziedziną $C_0(]-\pi,\pi[)$ oraz

$$\delta_{\mathrm{N}}(\phi,\psi) := \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\phi(x)}\psi(x)\mathrm{d}x, \quad \phi,\psi \in \mathcal{D}(\delta_{\mathrm{N}}),$$

z dziedziną $C_0([-\pi,\pi])$.

Twierdzenie 6.18 *Operatory $-\Delta_{\rm N}$ i $\Delta_{\rm D}$ są samosprzężone i dodatnie. Mamy*

$$\sigma_{\rm pp}(-\Delta_{\rm N}) = \sigma(-\Delta_{\rm N}) = \{n^2 \ : \ n = 0, 1, 2, \dots\},$$

$$\sigma_{\rm pp}(-\Delta_{\rm D}) = \sigma(-\Delta_{\rm D}) = \{n^2 \ : \ n = 1, 2, \dots\}.$$

Jeśli zdefiniujemy

$$\begin{aligned} v_0^{\rm N}(\phi) &:= \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}, \\ v_n^{\rm N}(\phi) &:= \tfrac{2}{\pi}\cos(n\phi),\ n = 1, 2, \dots \\ v_n^{\rm D}(\phi) &:= \tfrac{2}{\pi}\sin(n\phi),\ n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

to $(v_n^{\rm N})$, $n = 0, 1, \dots$ i $(v_n^{\rm D})$, $n = 1, 2, \dots$ są bazami ortonormalnymi. Mamy

$$\Delta_{\rm D} v_n^{\rm D} = n^2 v_{\rm D}, \qquad \Delta_{\rm N} v_n^{\rm N} = n^2 v_{\rm N}.$$

Formy $\delta_{\rm D}$ i $\delta_{\rm N}$ są domknięte i zadają odpowiednio operatory $-\Delta_{\rm D}$ i $-\Delta_{\rm N}$.

Dowód. Wprowadźmy

$$T_\pm : L^2([0, \pi]) \to L^2([-\pi, \pi]),$$

$$T_\pm f(\phi) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} f(\phi), & \phi \in [0, \pi]. \\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}} f(-\phi), & \phi \in [-\pi, 0]. \end{cases}$$

Wtedy $T_\pm$ jest operatorem unitarnym z $L^2([-\pi, \pi])$ na $L^2_\pm([-\pi, \pi])$:

$$\|T_\pm f\|^2 \ = \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^0 |f(-\phi)|^2 {\rm d}\phi + \tfrac{1}{2}\int_0^\pi |f(\phi)|^2 {\rm d}\phi = \|f\|^2.$$

Mamy

$$T_+ v_n^+ = u_n^{\rm N}, \qquad T_- v_n^- = u_n^{\rm D}.$$

(u_n^+), $n = 0, 1, \dots$ i $(u_n^{\rm D})$, $n = 1, 2, \dots$ są bazami ortonormalnymi w $L^2_\pm([-\pi, \pi])$ odpowiednio oraz

$$T_+^* \Delta_0 T_+ = \Delta_{\rm N}, \qquad T_-^* \Delta_0 T_- = \Delta_{\rm D}$$

□

6.7.4 Wielomiany Czebyszewa 1-go rodzaju

Rozważamy przestrzeń

$$L^2([-1, 1], (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}).$$

Definiujemy

$$\begin{aligned} T_m(\cos\phi) &= \cos n\phi, & \phi \in [0, \pi] \\ T_m(x) &= \tfrac{1}{2}((x + {\rm i}\sqrt{1 - x^2})^n + (x - {\rm i}\sqrt{1 - x^2})^n) & x \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

Twierdzenie 6.19 *Wielomiany T_m są bazą ortogonalną i*

$$\|T_0\| = \pi, \qquad \|T_n\|^2 = \frac{\pi}{2}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Spełniają równanie

$$((1-x^2)\partial_x^2 - x\partial_x + n^2)T_n(x) = 0. \tag{6.19}$$

Dowód. Zdefiniujmy

$$W : L^2([-1,1],(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}) \to L^2([0,\pi]),$$
$$Wf(\phi) := f(\cos\phi).$$

Wtedy

$$\|Wf\|^2 = \int_0^\pi |f(\cos\phi)|^2 \mathrm{d}\phi = \int_0^\pi |f(\cos\phi)|^2 \sin^{-1}\phi \mathrm{d}\cos\phi = \int_{-1}^1 |f(x)|^2 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}x,$$

czyli operator W jest unitarny. Poza tym

$$WT_m(\phi) = T_m(\cos\phi) = \cos m\phi.$$

Mamy

$$(\partial_\phi^2 + n^2)\cos n\phi = 0. \tag{6.20}$$

Aby zobaczyć (6.19) liczymy:

$$\partial_\phi Wf(\phi) = -\sin\phi f'(\cos\phi),$$

$$W^*\partial_\phi Wf(x) = -\sin(\arccos x)f'(x) = -(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\partial_x f(x).$$

Zatem

$$W^*\partial_\phi W = -(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\partial_x.$$

Stąd

$$W^*\partial_\phi^2 W = (W^*\partial_\phi W)^2 = (1-x^2)\partial_x^2 - x\partial_x.$$

□

6.7.5 Wielomiany Czebyszewa 2-go rodzaju

Rozważamy przestrzeń

$$L^2([-1,1],(1-x^2)^{\frac{1}{2}}).$$

Definiujemy

$$\begin{aligned} U_n(\cos\phi) &= \tfrac{\sin n\phi}{\sin\phi}, & \phi &\in [0,\pi], \\ U(x) &= \tfrac{(x+\mathrm{i}\sqrt{1-x^2})^n - (x-\mathrm{i}\sqrt{1-x^2})^n}{2\mathrm{i}\sqrt{1-x^2}}, & x &\in [-1,1]. \end{aligned}$$

Twierdzenie 6.20 *Wielomiany T_m są bazą ortogonalną i*

$$\|U_n\|^2 = \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Spełniają równanie

$$((1-x^2)\partial_x^2 - 3x\partial_x + n(n+2))T_n(x) = 0. \tag{6.21}$$

Dowód. Zdefinujmy

$$W : L^2([-1,1], (1-x^2)^{\frac{1}{2}}) \to L^2([0,\pi]),$$

$$Wf(\phi) := f(\cos\phi)\sin\phi.$$

Wtedy

$$\|Wf\|^2 = \int_0^\pi |f(\cos\phi)|^2 \sin^2\phi \mathrm{d}\phi = \int_0^\pi |f^2(\cos\phi)| \sin\phi \mathrm{d}\cos\phi = \int_{-1}^1 |f(x)|^2 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x,$$

czyli operator W jest unitarny. Poza tym

$$WU_m(\phi) = U_m(\cos\phi)\sin\phi = \sin(m+1)\phi.$$

Mamy

$$(\partial_\phi^2 + (n+1)^2))\sin(n+1)\phi = 0. \tag{6.22}$$

Aby zobaczyć (6.21) liczymy

$$\partial_\phi Uf(\phi) = -\sin^2\phi f'(\cos\phi) + \cos\phi f(\cos\phi),$$

Zatem

$$U^*\partial_\phi U = -(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\partial_x + x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Stąd

$$U^*\partial_\phi^2 U = (U^*\partial_\phi U)^2 = (1-x^2)\partial_x^2 - 3x\partial_x - 1.$$

□