Równania różniczkowe fizyki matematycznej

Jan Dereziński

Katedra Metod Matematycznych Fizyki
Uniwersytet Warszawski
Hoża 74, 00-682, Warszawa
e-mail jan.derezinski@fuw.edu.pl

17 lutego 2018

Metody Matematyczne Fizyki,
skrypt II, rok 2012

Spis treści

1 Równania różniczkowe w dziedzinie zespolonej

1.1 Punkty regularne

W tym rozdziale rozważamy równania różniczkowe pierwszego rzędu w $\mathbb{C}^n$ i drugiego rzędu w $\mathbb{C}$. W $\mathbb{C}^n$ będziemy posługiwać się normą wektorów

$$\|v\| = \left(\sum_{j=0}^{n} |v_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \; v \in \mathbb{C}^n.$$

Jeśli A jest odwzorowaniem liniowym na $\mathbb{C}^n$, to norma A jest zdefiniowana jako

$$\|A\| := \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Będziemy rozważać równanie różniczkowe

$$\partial_z v(z) = A(z)v(z). \tag{1.1}$$

gdzie $v(z) \in \mathbb{C}^n$.

Definicja 1.1 *Jeśli w (1.1) funkcja $A(z)$ jest analityczna w z_0, to mówimy, że z_0 jest punktem regularnym tego równania.*

Twierdzenie 1.2 *Niech Ω będzie spójnym jednospójnym zbiorem otwartym w $\mathbb{C}$. Niech*

$$\Omega \ni z \mapsto A(z) = \begin{bmatrix} a_{11}(z) & \dots & a_{1n}(z) \\ & \dots & \\ a_{n1}(z) & \dots & a_{nn}(z) \end{bmatrix}$$

będzie funkcją holomorficzną o wartościach w macierzach $n \times n$ i $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \dots \\ w_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$. Wtedy istnieje jedna i tylko jedna funkcja holomorficzna $\Omega \ni z \mapsto v(z) = \begin{bmatrix} v_1(z) \\ \dots \\ v_n(z) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$ będąca rozwiązaniem zagadnienia

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}v(z)}{\mathrm{d}z} = A(z)v(z), \\ v(z_0) = w. \end{cases} \tag{1.2}$$

Dowód. Ograniczmy się najpierw do koła $K(z_0, r)$ takiego, że $\overline{K(z_0, r)} \subset \Omega$. Można również założyć, że $z_0 = 0$.

Niech

$$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k$$

Wtedy szereg

$$v(z) := \sum_{k=0}^{\infty} v_k z^k,$$

gdzie

$$\begin{cases} v_0 = w, \\ v_{m+1} := \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} A_{m-k} v_k. \end{cases}$$

jest jedynym szeregiem formalnie spełniającym równanie (1.2).

Pokażmy, że szereg ten jest zbieżny w kole $K(0, r)$. Wiemy z nierówności Cauchy'ego, że

$$\|A_k\| \leq C r^{-k}.$$

Jeśli położymy

$$\begin{cases} p_0 = \|w\| \\ p_{m+1} := \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} C r^{-m+k} p_k, \end{cases}$$

to możemy dowieść indukcyjnie, że

$$\|v_m\| \leq p_m. \tag{1.3}$$

W rzeczy samej, mamy

$$\|v_0\| = p_0.$$

Załóżmy, że

$$\|v_k\| \leq p_k,\ \ k = 0, \ldots, m.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \|v_{m+1}\| &\leq \tfrac{1}{m+1} \textstyle\sum_{k=0}^{m} \|A_{m-k} v_k\| \\ &\leq \tfrac{1}{m+1} \textstyle\sum_{k=0}^{m} \|A_{m-k}\| \|v_k\| \\ &\leq \tfrac{1}{m+1} \textstyle\sum_{k=0}^{m} C r^{k-m} p_k = p_{m+1}. \end{aligned}$$

To kończy dowód (1.3).

Jeśli odejmiemy wzory

$$\begin{aligned} r(m+1)p_{m+1} &= \textstyle\sum_{k=0}^{m} C r^{-m+k+1} p_k, \\ m p_m &= \textstyle\sum_{k=0}^{m-1} C r^{-m+k+1} p_k, \end{aligned}$$

to dostaniemy

$$r(m+1)p_{m+1} = (Cr + m)p_m.$$

Wynika stąd natychmiast że

$$\lim_{m \to \infty} \frac{p_{m+1}}{p_m} = r^{-1}.$$

Czyli na mocy kryterium d'Alemberta, szereg

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$$

jest zbieżny w kole $K(0, r)$. Zatem również szereg

$$\sum_{k=0}^{\infty} v_k z^k$$

jest zbieżny w kole $K(0, r)$.

Powyższe rozumowanie możemy przeprowadzić dla dowolnego koła zawartego w Ω. W ten sposób, ponieważ Ω jest spójny, możemy przedłużyć funkcję $v(z)$ na cały obszar Ω. Jego jednospójność gwarantuje, że nie dostaniemy funkcji wieloznacznej. $\square$

Przykład 1.3

$$(\partial_z - 1)v(z) = 0, \quad v(0) = 1.$$

Podstawiamy

$$v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n.$$

Dostajemy wzór rekurencyjny;

$$n v_n = v_{n-1}.$$

Czyli

$$v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},\ \ z \in \mathbb{C}.$$

Oczywiście, $v(z) = \mathrm{e}^z$.

Przykład 1.4 *Niech $\mu \in \mathbb{C}$, $z \neq -1$*

$$\left(\partial_z - \mu(z+1)^{-1}\right) v(z) = 0, \quad v(0) = 1.$$

Podstawiamy

$$v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n.$$

Dostajemy wzór rekurencyjny;

$$n v_n = (\mu - n + 1) v_{n-1}.$$

Czyli

$$v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu \ldots (\mu - n + 1) z^n}{n!}, \ |z| < 1.$$

Oczywiście, $v(z) = (1+z)^{\mu}$.

Rozważmy teraz równanie skalarne drugiego rzędu

$$\left(\partial_z^2 + c(z)\partial_z + d(z)\right) u(z) = 0. \tag{1.4}$$

Definicja 1.5 *Mówimy, że punkt z_0 jest regularnym punktem równania (1.4), jeśli $c(z)$ i $d(z)$ są analityczne w z_0.*

Stwierdzenie 1.6 *Niech $c(z)$, $d(z)$ będą holomorficzne w spójnym jednospójnym zbiorze otwartym Ω. Wtedy zagadnienie*

$$\begin{cases} \left(\partial_z^2 + c(z)\partial_z + d(z)\right) u(z) = 0 \\ u(z_0) = w_0, \ \partial_z u(z_0) = w_1, \end{cases} \tag{1.5}$$

ma jedno i tylko jedno rozwiązanie w Ω.

Dowód. Zdefiniujmy

$$v(z) := \begin{bmatrix} u(z) \\ u'(z) \end{bmatrix}, \quad w := \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \end{bmatrix}$$

oraz

$$A(z) := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -d(z) & -c(z). \end{bmatrix}$$

Wtedy (1.5) możemy przepisać w postaci

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}v(z)}{\mathrm{d}z} = A(z)v(z), \\ v(z_0) = w. \end{cases}$$

i zastosować twierdzenie 1.2. □

Podajmy jeszcze wzór rekurencyjny na współczynniki rozwinięcia

$$u(z) := \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^k.$$

dla rozwiązania równania

$$\big(b(z)\partial_z^2 + c(z)\partial_z + d(z)\big)\, u(z) = 0,$$

gdzie $b(0) \neq 0$. Mamy:

$$\begin{cases} u_0 = w_0, \quad u_1 = w_1, \\ \sum_{k=0}^{m} k(k-1)u_k b_{m-k} + \sum_{k=0}^{m-1} k c_{m-k-1} u_k + \sum_{k=0}^{m-2} d_{m-k-2} u_k = 0. \end{cases}$$

1.2 Punkt regularny w nieskończoności

Definicja 1.7 *Załóżmy, że $A(z)$ jest zdefiniowane dla $|z| > R$. Mówimy, że ∞ jest punktem regularnym równania (1.1), gdy po zamianie zmiennych $w = z^{-1}$ dostajemy punkt regularny w 0.*

Oczywiście, $\partial_z = -w^2\partial_w$. Dlatego po zamianie zmiennych (1.1) zmienia się w równanie

$$\partial_w v(w^{-1}) = -w^{-2}A(w^{-1})v(w^{-1}).$$

Dlatego ∞ jest punktem regularnym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje granica

$$\lim_{z\to\infty} z^2 A(z).$$

Twierdzenie 1.8 *Niech ∞ będzie regularnym punktem równania (1.1). Wtedy dla zadanego $w \in \mathbb{C}^n$, istnieje dokładnie jedno analityczne w nieskończoności rozwiązanie zagadnienia*

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}v(z)}{\mathrm{d}z} = A(z)v(z), \\ \lim_{z\to\infty} v(z) = w. \end{cases} \tag{1.6}$$

Rozważmy teraz równania drugiego rzędu postaci (1.4).

Definicja 1.9 *Załóżmy, że $c(z)$, $d(z)$ są zdefiniowane dla $|z| > R$. Mówimy, że ∞ jest punktem regularnym równania (1.4), gdy po zamianie zmiennych $w = z^{-1}$ dostajemy punkt regularny w 0.*

Zamiana zmiennych prowadzi do równania

$$\Big(\partial_w^2 + (2w^{-1} - w^{-2}c(w^{-1}))\partial_w + w^{-4}d(w^{-1})\Big)u(w^{-1}) = 0.$$

Zatem ∞ jest punktem regularnym, gdy istnieją granice

$$\lim_{z\to\infty} (2z - z^2c(z)), \qquad \lim_{z\to\infty} z^4 d(z).$$

Twierdzenie 1.10 *Niech ∞ będzie regularnym punktem równania. Wtedy dla zadanych w_0, w_1 istnieje dokładnie jedno analityczne w nieskończoności rozwiązanie zagadnienia*

$$\begin{cases} \big(\partial_z^2 + c(z)\partial_z + d(z)\big)\, u(z) = 0 \\ \lim_{z\to\infty} u(z) = w_0, \ \lim_{z\to\infty}(u(z) - w_0)z = w_1. \end{cases} \tag{1.7}$$

1.3 Regularne punkty osobliwe.

Rozważmy teraz równanie różniczkowe (1.2) dla którego prawa strona ma osobliwości.

Definicja 1.11 *Mówimy, że równanie*

$$\frac{\mathrm{d}v(z)}{\mathrm{d}z} = \tilde{A}(z)v(z) \tag{1.8}$$

ma w z_0 regularny punkt osobliwy*, gdy* $\tilde{A}(z)$ *ma w* z_0 *biegun co najwyżej pierwszego rzędu.*

Można wtedy zapisać (1.2) w postaci

$$(z - z_0)\partial_z v(z) = A(z)v(z),$$

gdzie $A(z)$ jest holomorficzne w otoczeniu z_0. Wartości własne macierzy $A(z_0)$ nazywamy indeksami punktu osobliwego z_0. Opiszmy teraz metodę znajdowania rozwiązań wokół regularnego punktu osobliwego. Dla uproszczenia przyjmiemy, że tym punktem jest 0.

Twierdzenie 1.12 (Metoda Frobeniusa dla układów równań) *Niech* Ω *będzie spójnym jednospójnym zbiorem otwartym w* $\mathbb{C}$ *zawierającym* 0*. Niech*

$$\Omega \ni z \mapsto A(z) = \begin{bmatrix} a_{11}(z) & \dots & a_{1n}(z) \\ & \dots & \\ a_{n1}(z) & \dots & a_{nn}(z) \end{bmatrix}$$

będzie funkcją holomorficzną o wartościach w macierzach $n \times n$*. Niech* $w \in \mathbb{C}^n$ *i* $\lambda \in \mathbb{C}$ *spełniają*

$$\begin{aligned} &(A(0) - \lambda)w = 0, \\ &\lambda + m \text{ nie jest wartością własną } A(0) \text{ dla } m = 1, 2, \dots. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Wtedy istnieje jedna i tylko jedna funkcja $\tilde{v}(z)$ *holomorficzna na* Ω *taka, że* $v(z) := z^\lambda \tilde{v}(z)$ *jest rozwiązaniem równania*

$$\begin{cases} z\frac{\mathrm{d}v(z)}{\mathrm{d}z} = A(z)v(z), \\ \lim\limits_{z\to 0} z^{-\lambda}v(z) = w. \end{cases} \tag{1.10}$$

Dowód. Ograniczmy się najpierw do koła $K(0, r)$ takiego, że $\overline{K(0, r)} \subset \Omega$.

Niech

$$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k$$

Wtedy szereg

$$v(z) := z^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} v_k z^k,$$

gdzie

$$\begin{cases} v_0 = w \\ v_m := (\lambda + m - A_0)^{-1} \sum_{k=0}^{m-1} A_{m-k} v_k. \end{cases}$$

jest jedynym szeregiem formalnie spełniającym równanie (1.10).

Pokażemy, że szereg ten jest zbieżny w kole $K(0,r)$. Wiemy z nierówności Cauchy'ego, że

$$\|A_k\| \le C r^{-k}.$$

Jeśli położymy

$$\begin{cases} p_0 = \|w\| \\ p_m := \left\|(\lambda + m - A_0)^{-1}\right\| \sum_{k=0}^{m-1} C r^{-m+k} p_k, \end{cases}$$

to możemy dowieść indukcyjnie, że

$$\|v_m\| \le p_m.$$

Jeśli odejmiemy wzory

$$\begin{aligned} r\left\|(\lambda + m + 1 - A_0)^{-1}\right\|^{-1} p_{m+1} &= \textstyle\sum_{k=0}^{m} C r^{-m+k} p_k, \\ \left\|(\lambda + m - A_0)^{-1}\right\|^{-1} p_m &= \textstyle\sum_{k=0}^{m-1} C r^{-m+k} p_k, \end{aligned}$$

to dostaniemy

$$r\left\|(\lambda + m + 1 - A_0)^{-1}\right\|^{-1} p_{m+1} = \left(C + \left\|(\lambda + m - A_0)^{-1}\right\|^{-1}\right) p_m.$$

łatwo się przekonać, że

$$\lim_{m\to\infty} m \left\|(\lambda + m - A_0)^{-1}\right\| = 1.$$

Wynika stąd natychmiast że

$$\lim_{m\to\infty} \frac{p_{m+1}}{p_m} = r^{-1}.$$

Czyli na mocy kryterium d'Alemberta, szereg definiujący $\tilde{v}(z)$ jest zbieżny w kole $K(0,r)$.

Stosując Twierdzenie 1.2 możemy przedłużyć $\tilde{v}(z)$ na cały obszar Ω. $\square$

Przykład 1.13 *Niech*

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & & \dots & & \\ 1 & \lambda & \dots & & \\ & & \dots & & \\ & & \dots & \lambda & \\ & & \dots & 1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Rozważmy równanie $z\partial_z v(z) = Av(z)$. Wtedy dostajemy równania

$$\begin{aligned} z\partial_z v_1 &= \lambda v_1, \\ -v_1 + z\partial_z v_2 &= \lambda v_2, \\ &\dots \\ -v_{n-1} + z\partial_z v_n &= \lambda v_n. \end{aligned}$$

Bazę rozwiązań tego układu stanowią

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ z^\lambda \\ z^\lambda \log z \\ \dots \\ z^\lambda (\log z)^{m-1} \end{bmatrix}, \qquad m = 1, \dots, n.$$

Przykład 1.14 *Następujące równanie ma regularny punkt osobliwy w* 0*:*

$$\partial_z v(z) = (az^{-1} + b)v(z).$$

Jego rozwiązaniem jest $v(z) = z^a \mathrm{e}^{bz}$

Rozważymy teraz równania drugiego rzędu.

Definicja 1.15 *Mówimy, że równanie*

$$\left(\partial_z^2 + \tilde{b}(z)\partial_z + \tilde{c}(z)\right) u(z) = 0$$

ma w z_0 regularny punkt osobliwy, *gdy* $\tilde{b}(z)$ *ma w* z_0 *biegun co najwyżej pierwszego rzędu a* $\tilde{c}(z)$ *ma w* z_0 *biegun co najwyżej drugiego rzędu*

Dla uproszczenia załóżmy, że $z_0 = 0$. Możemy wtedy zapisać powyższe równanie w formie:

$$\left(z^2\partial_z^2 + b(z)z\partial_z + c(z)\right) u(z) = 0.$$

Stwierdzenie 1.16 (Metoda Frobeniusa dla równań drugiego rzędu) *Niech* $b(z)$, $c(z)$ *będą holomorficzne w jednospójnym obszarze* Ω *zawierającym* 0. *Niech* $\lambda \in \mathbb{C}$ *spełnia*

$$\begin{aligned} &\lambda(\lambda - 1) + \lambda b(0) + c(0) = 0, \\ &(\lambda + m)(\lambda + m - 1) + (\lambda + m)b(0) + c(0) \neq 0, \quad m = 1, 2, \dots. \end{aligned}$$

Wtedy istnieje jedna i tylko jedna funkcja $\tilde{u}(z)$ *holomorficzna w* Ω*, taka, że* $u(z) := z^\lambda \tilde{u}(z)$ *jest rozwiązaniem zagadnienia*

$$\begin{cases} \left(z^2\partial_z^2 + b(z)z\partial_z + c(z)\right) u(z) = 0, \\ \lim\limits_{z \to 0} z^{-\lambda} u(z) = 1, \end{cases} \tag{1.11}$$

Dowód. Zdefiniujmy

$$v(z) := \begin{bmatrix} u(z) \\ zu'(z) \end{bmatrix}, \quad w := \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix}$$

oraz

$$A(z) := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c(z) & 1-b(z) \end{bmatrix}.$$

Mamy wtedy

$$A(z)v(z) = \begin{bmatrix} zu'(z) \\ -c(z)u(z) - b(z)zu'(z) + zu'(z) \end{bmatrix},$$

$$z\partial_z \begin{bmatrix} u(z) \\ zu'(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} zu'(z) \\ z^2u''(z) + zu'(z) \end{bmatrix},$$

$$z^{-\lambda}v(z) = \begin{bmatrix} \tilde{u}(z) \\ z\tilde{u}'(z) + \lambda\tilde{u}(z) \end{bmatrix}.$$

Zatem (1.11) możemy przepisać w postaci

$$\begin{cases} z\frac{\mathrm{d}v(z)}{\mathrm{d}z} = A(z)v(z), \\ \lim\limits_{z\to 0} z^{-\lambda}v(z) = w. \end{cases}$$

i zastosować twierdzenie 1.12. $\square$

Podajmy jeszcze wzór rekurencyjny na współczynniki rozwinięcia

$$u(z) := \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^{\lambda+k}$$

dla równania

$$\big(a(z)z^2\partial_z^2 + b(z)z\partial_z + c(z)\big)\, u(z) = 0,$$

gdzie $a(0) \neq 0$. Mamy:

$$\begin{cases} u_0 & = 1, \\ u_m & = -\left((\lambda+m)(\lambda+m-1)a_0 + (\lambda+m)b_0 + c_0\right)^{-1} \\ & \quad \times \sum_{k=0}^{m-1} \left((\lambda+k)(\lambda+k-1)a_{m-k} + (\lambda+k)b_{m-k} + c_{m-k}\right)u_k. \end{cases}$$

Czyli, jeśli szukamy rozwiązań równania postaci

$$\big(a(z)z^2\partial_z^2 + b(z)z\partial_z + c(z)\big)\, u(z) = 0,$$

gdzie $a(0) \neq 0$, to najpierw powinniśmy znaleźć pierwiastki λ_1, λ_2 tak zwanego równania wskaźnikowego:

$$\lambda(\lambda-1)a(0) + \lambda b(0) + c(0) = 0.$$

Jeśli $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{Z}$, to możemy znaleźć dwa liniowo niezależne rozwiązania zachowujące się w zerze jak z^{λ_1} i z^{λ_2}. Jeśli $\lambda_1 - \lambda_2 \in \mathbb{Z}$, to w ogólności możemy wyżej opisaną metodą znaleźć tylko rozwiązanie o zachowaniu z^{λ_1}, gdzie $\lambda_1 - \lambda_2 \geq 0$.

1.4 Regularny punkt osobliwy w nieskończoności

Definicja 1.17 *Załóżmy, że $\tilde{A}(z)$ jest zdefiniowane dla $|z| > R$. Mówimy, że ∞ jest regularnym punktem osobliwym równania (1.8), gdy po zamianie zmiennych $w = z^{-1}$ dostajemy regularny punkt osobliwy w 0.*

Latwo zauważyć, że równanie (1.8) ma regularny punkt osobliwy w ∞, gdy istnieje granica

$$\lim_{z\to\infty} z\tilde{A}(z).$$

Wtedy możemy przepisać równanie (1.8) w postaci

$$z\partial_z v(z) = A(z)v(z),$$

gdzie $A(z)$ jest analityczne w ∞. Wartości własne $-A(\infty)$ nazywamy indeksami punktu ∞.

Twierdzenie 1.18 *Niech Ω będzie spójnym jednospójnym zbiorem otwartym w $\overline{\mathbb{C}}$ zawierającym ∞. Niech*

$$\Omega \ni z \mapsto A(z) = \begin{bmatrix} a_{11}(z) & \dots & a_{1n}(z) \\ & \dots & \\ a_{n1}(z) & \dots & a_{nn}(z) \end{bmatrix}$$

będzie funkcją holomorficzną o wartościach w macierzach $n \times n$. Niech $w \in \mathbb{C}^n$ i $\lambda \in \mathbb{C}$ spełniają

$$\begin{aligned} &(A(\infty) + \lambda)w = 0, \\ &\lambda + m \text{ nie jest wartością własną } A(\infty) \text{ dla } m = 1, 2, \dots. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Wtedy istnieje jedna i tylko jedna funkcja $\tilde{v}(z)$ holomorficzna na Ω taka, że $v(z) := z^{-\lambda}\tilde{v}(z)$ jest rozwiązaniem równania

$$\begin{cases} z\frac{\mathrm{d}v(z)}{\mathrm{d}z} = A(z)v(z), \\ \lim\limits_{z\to\infty} z^{\lambda}v(z) = w. \end{cases} \tag{1.13}$$

Przykład 1.19 *Każde równanie pierwszego rzędu, które w $\overline{\mathbb{C}}$ ma wyłącznie punkty regularne prócz regularnych punktów osobliwych w z_1, z_2 i ∞ jest postaci*

$$\partial_z v(z) = \Big(a_1(z - z_1)^{-1} + a_2(z - z_2)^{-1}\Big)v(z) \tag{1.14}$$

Ma ono indeksy

$$z_1: \quad a_1, \qquad z_2: \quad a_2, \qquad \infty: \quad -a_1 - a_2,$$

i rozwiązanie $(z - z_1)^{a_1}(z - z_2)^{a_2}$.

Stwierdzenie 1.20 *Niech $b(z)$, $c(z)$ będą holomorficzne w jednospójnym spójnym zbiorze otwartym $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ zawierającym ∞. Niech $\lambda \in \mathbb{C}$ spełnia*

$$\begin{aligned} &\lambda(\lambda + 1) - \lambda b(\infty) + c(\infty) = 0, \\ &(\lambda + m)(\lambda + m + 1) - (\lambda + m)b(\infty) + c(\infty) \neq 0, \quad m = 1, 2, \dots. \end{aligned}$$

Wtedy istnieje jedna i tylko jedna funkcja $\tilde{u}(z)$ holomorficzna w Ω, taka, że $u(z) := z^{-\lambda}\tilde{u}(z)$ jest rozwiązaniem równania

$$\begin{cases} \left(z^2\partial_z^2 + b(z)z\partial_z + c(z)\right) u(z) = 0, \\ \lim\limits_{z\to\infty} z^\lambda u(z) = 1. \end{cases} \tag{1.15}$$

Przykład 1.21 *Każde równanie drugiego rzędu, które w $\overline{\mathbb{C}}$ ma wyłącznie punkty regularne prócz regularnych punktów osobliwych w 0 i ∞ jest postaci*

$$(z^2\partial_z^2 + bz\partial_z + c)u(z) = 0. \tag{1.16}$$

Bywa ono nazywane **równaniem jednorodnym Eulera**. *Jego równania wskaźnikowe mają postać*

$$\begin{aligned} 0: &\quad \lambda(\lambda-1) + b\lambda + c = 0, \\ \infty: &\quad \lambda(\lambda+1) - b\lambda + c = 0. \end{aligned}$$

Jeśli $\rho, \tilde{\rho}$ są indeksami równania w 0, to $-\rho, -\tilde{\rho}$ są indeksami w ∞. Rozwiązania są równe z^ρ, $z^{\tilde{\rho}}$ jeśli $\rho \neq \tilde{\rho}$ i z^ρ, $z^\rho \log z$ gdy $\rho = \tilde{\rho}$. Można równanie (1.16) zapisać w postaci

$$(z^2\partial_z + (1-\rho-\tilde{\rho})z\partial_z + \rho\tilde{\rho})u(z) = 0.$$

Przykład 1.22 *Każde równanie drugiego rzędu, które w $\overline{\mathbb{C}}$ ma wyłącznie punkty regularne prócz regularnych punktów osobliwych w z_1 i z_2 jest postaci*

$$\Big(\partial_z^2 + \Big(g_1(z-z_1)^{-1} + g_2(z-z_2)^{-1}\Big)\partial_z + h(z-z_1)^{-2}(z-z_2)^{-2}\Big)u(z) = 0, \tag{1.17}$$

gdzie $g_1 + g_2 = 2$. Mamy równania wskaźnikowe

$$\begin{aligned} z_1: &\quad \lambda(\lambda-1) + g_1\lambda + h(z_1-z_2)^{-2} = 0, \\ z_2: &\quad \lambda(\lambda-1) + g_2\lambda + h(z_1-z_2)^{-2} = 0. \end{aligned}$$

Jeśli ρ, $\tilde{\rho}$ są indeksami w z_1, to $-\rho$, $-\tilde{\rho}$ są indeksami w z_2. Rozwiązania mają postać $(z-z_1)^\rho(z-z_2)^{-\rho}$, $(z-z_1)^{\tilde{\rho}}(z-z_2)^{-\tilde{\rho}}$, jeśli $\rho \neq \tilde{\rho}$ i $(z-z_1)^\rho(z-z_2)^{-\rho}$, $(z-z_1)^\rho(z-z_2)^{-\rho}\log(z-z_1)(z-z_2)^{-1}$, jeśli $\rho = \tilde{\rho}$.

Rownanie (1.17) można przepisać w postaci

$$\begin{aligned} &\Big(\partial_z^2 + \Big((1-\rho-\tilde{\rho})(z-z_1)^{-1} + (1+\rho+\tilde{\rho})(z-z_2)^{-1}\Big)\partial_z \\ &+\rho\tilde{\rho}(z_1-z_2)^2(z-z_1)^{-2}(z-z_2)^{-2}\Big)u(z) = 0. \end{aligned}$$

Przykład 1.23 *Każde równanie drugiego rzędu, które w $\overline{\mathbb{C}}$ ma wyłącznie punkty regularne prócz regularnych punktów osobliwych w z_1, z_2 i ∞ jest postaci*

$$\begin{aligned} &\Big(\partial_z^2 + \Big(g_1(z-z_1)^{-1} + g_2(z-z_2)^{-1}\Big)\partial_z \\ &+h_1(z-z_1)^{-2} + h_2(z-z_2)^{-2} + h(z-z_1)^{-1}(z-z_2)^{-1}\Big)u(z) = 0. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Jest to szczególna postać **równania Riemanna** *(albo* **równania Riemanna-Papperitza***) Mamy równania wskaźnikowe*

$$\begin{aligned}
z_1: &\quad \lambda(\lambda-1)+g_1\lambda+h_1=0,\\
z_2: &\quad \lambda(\lambda-1)+g_2\lambda+h_2=0,\\
\infty: &\quad \lambda(\lambda+1)-(g_1+g_2)\lambda+h_1+h_2+h=0.
\end{aligned}$$

Jeśli ρ_1, $\tilde\rho_1$ *są indeksami w* z_1, ρ_2, $\tilde\rho_2$ *są indeksami w* z_2 *i* ρ_3, $\tilde\rho_3$ *są indeksami w* ∞, *to*

$$\rho_1+\tilde\rho_1+\rho_2+\tilde\rho_2+\rho_3+\tilde\rho_3=1. \tag{1.19}$$

Równanie (1.18) można zapisać w postaci

$$\begin{aligned}
&\Big(\partial_z^2+\Big((1-\rho_1-\tilde\rho_1)(z-z_1)^{-1}+(1-\rho_2-\tilde\rho_2)(z-z_2)^{-1}\Big)\partial_z\\
&+\rho_1\tilde\rho_1(z_1-z_2)(z-z_1)^{-2}(z-z_2)^{-1}+\rho_2\tilde\rho_2(z_2-z_1)(z-z_2)^{-2}(z-z_1)^{-1}\\
&+\rho_3\tilde\rho_3(z-z_1)^{-1}(z-z_2)^{-1}\Big)u(z)=0.
\end{aligned}\tag{1.20}$$

Oznaczmy operator różniczkowy występujący w (1.20) przez

$$\mathcal{P}\begin{bmatrix} z_1, & z_2, & \infty\\ \rho_1, & \rho_2, & \rho_3\\ \tilde\rho_1, & \tilde\rho_2, & \tilde\rho_3\end{bmatrix}.$$

Wtedy przez podstawienie $u(z_1(1-t)+z_2t)=t^{\rho_1}(1-t)^{\rho_2}u(t)$ *równanie (1.20) przechodzi w*

$$\mathcal{P}\begin{bmatrix} 0, & 1, & \infty\\ 0, & 0, & \rho_3-\rho_1-\rho_2\\ \tilde\rho_1-\rho_1, & \tilde\rho_2-\rho_2, & \tilde\rho_3-\rho_1-\rho_2\end{bmatrix}w(t)=0. \tag{1.21}$$

Równanie (1.21) można parametryzować trzema dowolnymi liczbami a,b,c*:*

$$\mathcal{P}\begin{bmatrix} 0, & 1, & \infty\\ 0, & 0, & a\\ 1-c, & c-a-b, & b\end{bmatrix}w(t)=0. \tag{1.22}$$

Jeśli pomnożymy (1.22) przez $t(1-t)$, *to dostajemy równanie hipergeometryczne (Patrz rozdział 5).*

1.5 Wrońskian

Niech $u_1(z)$, $u_2(z)$ będzie parą rozwiązań równania

$$(\partial_z^2+b(z)\partial_z+c(z))u(z)=0.$$

Wrońskian tej pary jest zdefiniowany jako

$$W(u_1,u_2)(z)=W(z):=u_1(z)u_2'(z)-u_1'(z)u_2(z).$$

Spełnia on równanie

$$(\partial_z + b(z))W(z) = 0.$$

Jeśli

$$\tilde{u}_1(z) = a_{11}u_1(z) + a_{12}u_2(z), \qquad \tilde{u}_2(z) = a_{21}u_1(z) + a_{22}u_2(z)$$

jest drugą parą rozwiązań, to mamy

$$W(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})W(u_1, u_2).$$

2 Szeregi hipergeometryczne

Przypomnijmy, że dla $a \in \mathbb{C}$ wprowadziliśmy oznaczenie

$$(a)_n := a(a+1)\cdots(a+n-1).$$

Niech $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$, $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C}\backslash\{0, -1, -2, \ldots\}$ definiujemy (uogólniony) szereg hipergeometryczny typu ${}_kF_m$

$${}_kF_m(a_1, \ldots, a_k; c_1, \ldots, c_m; z) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a_1)_j \cdots (a_k)_j z^j}{(c_1)_j \cdots (c_m)_j j!}. \tag{2.23}$$

Zauważmy, że

(1) jeśli $m + 1 > k$, to szereg (2.23) zbieżny dla $z \in \mathbb{C}$;

(2) jeśli $m + 1 = k$, to szereg (2.23) zbieżny dla $|z| < 1$;

(3) jeśli $m + 1 < k$, to szereg (2.23) rozbieżny (ale mimo to czasem można nadać sens funkcji ${}_kF_m$).

Wynika to z kryterium d'Alemberta: jeśli f_j jest j-tym współczynnikiem szeregu (2.23), to

$$\frac{f_{j+1}}{f_j} = \frac{(a_1 + j)\cdots(a_k + j)}{(c_1 + j)\cdots(c_m + j)(j+1)}.$$

Można również używać

$$\begin{aligned} {}_k\Phi_m(a_1, \ldots, a_k; c_1, \ldots, c_m; z) &:= \frac{{}_kF_m(a_1, \ldots, a_k; c_1, \ldots, c_m; z)}{\Gamma(c_1)\cdots\Gamma(c_m)} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a_1)_j \cdots (a_k)_j z^j}{\Gamma(c_1 + j)\cdots\Gamma(c_m + j) j!}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

wtedy nie musimy ograniczać wartości $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$. (Wtedy, jeśli któreś $c_i \in \{0, -1, -2 \ldots\}$, to funkcja Φ jest równa zero).

W praktyce, najczęściej spotykamy następujące funkcje hipergeometryczne:

2.1 Funkcja hipergeometryczna albo ${}_2F_1$

$$F(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n!(c)_n} z^n.$$

Szereg jest zbieżny dla $|z| < 1$, przedłuża się do funkcji wieloznacznej na nakryciu $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$.

Funkcja jest rozwiązaniem analitycznym i równym w zerze 1 równania hipergeometrycznego

$$\big(z(1-z)\partial_z^2 + (c-(a+b+1)z)\partial_z - ab\big)\, u(z) = 0.$$

2.2 Funkcja konfluentna albo ${}_1F_1$

$$F(a;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!(c)_n} z^n.$$

Szereg jest zbieżny dla wszystkich $z \in \mathbb{C}$. Funkcja rozwiązaniem analitycznym i równym 1 w zerze równania konfluentnego

$$(z\partial_z^2 + (c-z)\partial_z - a)u(z) = 0,$$

2.3 Funkcja ${}_0F_1$

$$F(-;c;z) = F(c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(c)_n} z^n.$$

Jest rozwiązaniem analitycznym i równym w zerze 1 równania (spokrewnionego z równaniem Bessela):

$$(z\partial_z^2 + c\partial_z - 1)u(z) = 0.$$

2.4 Funkcja ${}_2F_0$

Dla tej funkcji szereg hipergeometryczny jest rozbieżny. Jest to wieloznaczna funkcja na nakryciu $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ i dlatego nie można jej zdefiować szeregiem. Niemniej szereg hipergeometryczny daje jej rozwinięcie asymptotyczne:

$$F(a,b;-;z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n!} z^n$$

Jest ono rozwiązaniem następującego równania (spokrewnionego z równaniem konfluentnym):

$$\big(z^2\partial_z^2 + (-1+(a+b+1)z)\partial_z + ab\big)\, u(z) = 0.$$

2.5 Funkcja potęgowa czyli ${}_1F_0$

$$F(a;-;z) = (1-z)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} z^n$$

Szereg jest zbieżny dla $|z| < 1$, przedłuża się do funkcji wieloznacznej na nakryciu $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ Rozwiązanie równania

$$((1-z)\partial_z - a)u(z) = 0.$$

2.6 Funkcja wykładnicza czyli ${}_0F_0$

$$F(-;-;z) = \mathrm{e}^z = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n.$$

Rozwiązanie równania

$$(\partial_z - 1)u(z) = 0.$$

3 Równanie konfluentne

3.1 Funkcja konfluentna

Równaniem konfluentnym nazywamy równanie

$$(z\partial_z^2 + (c-z)\partial_z - a)u(z) = 0.$$

Ma ono w 0 regularny punkt osobliwy z indeksami 0, $1-c$.

Używając $z^{-\gamma}\partial_z z^{\gamma} = \partial_z + \frac{\gamma}{z}$ dostajemy tożsamość

$$\begin{aligned} & z^{-\gamma}(z\partial_z^2 + (c-z)\partial_z - a)z^{\gamma} \\ = \;& z\partial_z^2 + (2\gamma + c - z)\partial_z - \gamma - a + (-\gamma + \gamma^2 + c\gamma)z^{-1}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

W szczególności,

$$\begin{aligned} & z^{c-1}(z\partial_z^2 + (c-z)\partial_z - a)z^{1-c} \\ = \;& z\partial_z^2 + (2 - c - z)\partial_z - 1 + c - a, \end{aligned} \tag{3.26}$$

co jest równaniem konfluentnym z parametrami $1+a-c$, $2-c$.

Równanie na współczynniki szeregu będącego rozwiązaniem:

$$f_n(n+\lambda)(n+\lambda-1+c) = (n+\lambda-1+a)f_{n-1}.$$

Rozwiązanie analityczne i równe 1 w zerze nazywa się funkcją konfluentną

$$F(a;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!(c)_n} z^n.$$

Z tożsamości (3.26) wynika, że rozwiązanie zachowujące się w zerze jak z^{1-c} można zapisać jako

$$z^{1-c}F(a-c+1; 2-c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a-c+1)_n}{n!(2-c)_n} z^{1-c+n}.$$

3.2 Pierwsza tożsamość Kummera

Korzystając z $\mathrm{e}^{-z}\partial_z\mathrm{e}^z = \partial_z + 1$ dostajemy

$$\begin{aligned}
& \mathrm{e}^{-z}(z\partial_z^2 + (c-z)\partial_z - a)\mathrm{e}^z \\
= \quad & z\partial_z^2 + (c+z)\partial_z + c - a.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Podstawiamy $z = -w$ i mnożymy przez -1, dostając

$$w\partial_w^2 + (c-w)\partial_w - c + a.$$

Jest to równanie konfluentne z parametrami $c-a$, c. Zatem $\mathrm{e}^z F(c-a;c;-z)$ jest rozwiązaniem równania konfluentnego analitycznym i równym 1 w zerze. Dostajemy zatem tożsamość

$$F(a;c;z) = \mathrm{e}^z F(c-a;c;-z). \tag{3.28}$$

3.3 Reprezentacje całkowe rozwiązań równania konfluentnego

Jeśli $[0,1] \ni t \mapsto \gamma(t) \in \Omega$ jest krzywą i f jest funkcją na Ω, to wprowadzamy oznaczenie

$$f\Big|_{\gamma(0)}^{\gamma(1)} := f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)).$$

Twierdzenie 3.1 *Niech krzywa γ spełnia*

$$\mathrm{e}^{zs}s^a(1-s)^{c-a}\Big|_{\gamma(0)}^{\gamma(1)} = 0. \tag{3.29}$$

Wtedy

$$\int_\gamma \mathrm{e}^{zs}s^{a-1}(1-s)^{c-a-1}\mathrm{d}s \tag{3.30}$$

jest rozwiązaniem równania konfluentnego.

Dowód.

$$\begin{aligned}
& (z\partial_z^2 + (c-z)\partial_z - a)\mathrm{e}^{zs}s^{a-1}(1-s)^{c-a-1} \\
= \quad & z\mathrm{e}^{zs}s^{a+1}(1-s)^{c-a-1} + (c-z)\mathrm{e}^{zs}s^a(1-s)^{c-a-1} - a\mathrm{e}^{zs}s^{a-1}(1-s)^{c-a-1} \\
= \quad & -z\mathrm{e}^{zs}s^a(1-s)^{c-a} - a\mathrm{e}^{zs}s^{a-1}(1-s)^{c-a} + (c-a)\mathrm{e}^{zs}s^a(1-s)^{c-a-1} \\
= \quad & -\partial_s\mathrm{e}^{zs}s^a(1-s)^{c-a}.
\end{aligned}$$

□

Dlatego dla $\mathrm{Re}a > 0$, $\mathrm{Re}(c-a) > 0$ mamy

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{zs}s^{a-1}(1-s)^{c-a-1}\mathrm{d}s = \frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)}F(a;c;z). \tag{3.31}$$

Mamy bowiem wtedy spełnione założenia (funkcja w (3.29) ma na końcach przedziału wartości zerowe) i dostajemy rozwiązanie analityczne w otoczeniu zera. Sprawdzamy, że w zerze ma ono wartość

$$\int_0^1 s^{a-1}(1-s)^{c-a-1}\mathrm{d}s = \frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)}.$$

Zauważmy, że jeśli $n = -a \in \{0, 1, 2, \dots\}$, to $F(-n; c; z)$ jest wielomianem stopnia n. Są to tzw. wielomiany Laguerre'a. Można je zapisać przez całkę w której krzywą γ jest krzywa okrążająca punkt 0:

$$\begin{aligned} L_n^\alpha(z) &:= \frac{(1+\alpha)_n}{n!} F(-n; 1+\alpha; z) \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{[0^+]} \mathrm{e}^{tz} t^{-n-1}(1-t)^{\alpha+n}\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

3.4 Punkt w ∞ i równanie ${}_2F_0$

Stosując (3.25) z $\gamma = -a$ dostajemy

$$\begin{aligned} & z^{a+1}(z\partial_z^2 + (c-z)\partial_z - a)z^{-a} \\ = \;& z^2\partial_z^2 + z(-2a + c - z)\partial_z + a(1 + a - c). && (3.32) \\ = \;& z^2\partial_z^2 + z(1 - a - b - z)\partial_z + ab, && (3.33) \end{aligned}$$

gdzie podstawiliśmy $b := 1 + a - c$. Podstawiając $w = -z^{-1}$ (przy odwrotnym przekształceniu $z = -w^{-1}$), korzystając z tego, że $\partial_z = w^2\partial_w$, dostajemy, że (3.33) jest równe

$$w^2\partial_w^2 + (-1 + (1 + a + b)w)\partial_w + ab.$$

Dostaliśmy w ten sposób równanie typu ${}_2F_0$. Zauważmy, że 0 jest nieregularnym punktem osobliwym dla tego równania. Dlatego też, ∞ jest nieregularnym punktem osobliwym równania konfluentnego.

Jeśli

$$(w^2\partial_w^2 + (-1 + (1 + a + b)w)\partial_w + ab)g(w) = 0,$$

to

$$(z\partial_z^2 + (c - z)\partial_z - a)z^{-a}g(-z^{-1}) = 0. \tag{3.34}$$

I na odwrót, jeśli

$$(z\partial_z^2 + (c - z)\partial_z - a)f(z) = 0,$$

to

$$(w^2\partial_w^2 + (-1 + (1 + a + b)w)\partial_w + ab)w^{-a}f(-w^{-1}) = 0.$$

3.5 Funkcja ${}_2F_0$

Równanie (3.34) próbujemy rozwiązać szeregiem

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n w^n.$$

Dostajemy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \big(n(n-1)g_n w^n - n g_n w^{n-1} + (1+a+b) n g_n w^n + ab g_n w^n\big) = 0$$

Zatem

$$(n-1+a)(n-1+b)g_{n-1} = n g_n.$$

Daje to współczynniki

$$g_n = \frac{(a)_n (b)_n}{n!} g_0$$

i prowadzi do rozbieżnego szeregu.

Twierdzenie 3.2 *Niech krzywa γ spełnia*

$$\mathrm{e}^{-t} t^a (1-wt)^{1-b}\Big|_{\gamma(0)}^{\gamma(1)} = 0 \tag{3.35}$$

Wtedy

$$\int_\gamma \mathrm{e}^{-t} t^{a-1} (1-wt)^{-b} \mathrm{d}t$$

jest rozwiązaniem równania (3.34).

Dowód. Z Twierdzenia 3.1

$$\int_\gamma \mathrm{e}^{zs} s^{a-1} (1-s)^{c-a-1} \mathrm{d}s$$

jest rozwiązaniem równania konfluentnego. Więc

$$w^{-a} \int_\gamma \mathrm{e}^{-sw^{-1}} s^{a-1} (1-s)^{c-a-1} \mathrm{d}s,$$

dla $b = 1 + a - c$ jest rozwiązaniem równania (3.34). Następnie podstawimy $t = \frac{s}{w}$. □

Dla $w \in \mathbb{C} \backslash [0, \infty[$, $\mathrm{Re} a > 0$ definiujemy

$$F(a, b; -; w) := \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{a-1} (1-wt)^{-b} \mathrm{d}t. \tag{3.36}$$

(Na inne wartości a definujemy przez przedłużenie analityczne). Mamy następujące rozwinięcie asymptotyczne:

$$F(a, b; -; w) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n!} w^n,$$

to znaczy, dla każdego n, dla $|\arg w| \geq \epsilon > 0$,

$$\lim_{w\to 0} w^{-n}\left(F(a,b;-;w) - \sum_{j=0}^{n}\frac{(a)_j(b)_j}{j!}w^j\right) = 0.$$

Aby się o tym przekonać, korzystamy ze wzoru

$$f(z) = \sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(0)z^j}{j!} + z^n\int_0^1 \frac{f^{(n)}(sz)n(1-s)^{n-1}}{n!}\mathrm{d}s,$$

z którego wynika

$$(1-z)^{-b} = \sum_{j=0}^{n-1}\frac{(b)_j z^j}{j!} + \frac{(b)_n z^n}{n!}\int_0^1 n(1-s)^{n-1}(1-zs)^{-b-n}\mathrm{d}s.$$

Dlatego też

$$\begin{aligned}
& F(a,b;-;w) \\
= \ & \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{a-1}(1-wt)^{-b}\mathrm{d}t \\
= \ & \sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{a-1}\frac{(b)_j w^j t^j}{j!}\mathrm{d}t \\
& +\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{a-1}\frac{(b)_n w^n t^n}{n!}\int_0^1 (1-wts)^{-b-n}n(1-s)^{n-1}\mathrm{d}s \\
= \ & \sum_{j=0}^{n-1}\frac{(b)_j\Gamma(a+j)w^j}{\Gamma(a)j!} \\
& +\frac{w^n(b)_n}{\Gamma(a)n!}\int_0^1 n(1-s)^{n-1}\mathrm{d}s\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{a-1+n}(1-wts)^{-b-n}\mathrm{d}t \\
= \ & \sum_{j=0}^{n-1}\frac{(b)_j(a)_j w^j}{j!} \\
& +\frac{w^n(b)_n(a)_n}{n!}\int_0^1 n(1-s)^{n-1}\mathrm{d}sF(a+n,b+n;-;ws).
\end{aligned}$$

3.6 Rozwiązania równania konfluentnego mające określone zachowanie w ∞

Rozważmy funkcję analityczną określoną na górnej półpłaszczyźnie

$$s \mapsto e^{zs}s^{a-1}(1-s)^{c-a-1},$$

gdzie potęgi są rozumiane w sensie wartości głównych. Załóżmy, że $\mathrm{Re}a > 0$, $\mathrm{Re}(c-a) > 0$. Pamiętamy, że

$$F(z) = \int_0^1 \mathrm{e}^{zs}s^{a-1}(1-s)^{c-a-1}\mathrm{d}s = \frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)}F(a;c;z)$$

jest jednym z rozwiązań równania konfluentnego. Jeśli Im$z > 0$, to możemy jeszcze napisać następujące rozwiązania:

$$
\begin{aligned}
F_0(z) &= \int_0^{e^{i\phi}\infty} e^{zs} s^{a-1}(1-s)^{c-a-1} ds, \\
F_1(z) &= \int_1^{e^{i\phi}\infty} e^{zs} s^{a-1}(1-s)^{c-a-1} ds,
\end{aligned}
$$

gdzie $\phi \in]\frac{\pi}{2} - \arg z, \frac{3\pi}{2} - \arg z[$ gwarantuje, że e^{zs} wzdłuż półprostej po której całkujemy dąży szybko do zera (co zapewnia spełnienie odpowiedniego warunku). Zauważmy, że

$$
F(z) + F_1(z) - F_0(z) = 0. \tag{3.37}
$$

Podstawiając $s = -z^{-1}t$, gdzie $t \in [0, \infty[$, dostajemy dla Re$a > 0$

$$
\begin{aligned}
F_0(z) &= \int_0^{\infty} e^{-t}(-tz^{-1})^{a-1}(1+z^{-1}t)^{c-a-1}(-z^{-1}) dt \\
&= (-z)^{-a}\Gamma(a) F(a, a+1-c; -, -z^{-1}).
\end{aligned}
$$

Podstawiając $s = 1 - z^{-1}t$ gdzie $t \in [0, \infty[$ możemy napisać dla Re$(c-a) > 0$

$$
\begin{aligned}
F_1(z) &= -e^z \int_0^{\infty} e^{-t}(1-z^{-1}t)^{a-1} z^{-c+a} t^{c-a-1} dt \\
&= -e^z z^{-c+a}\Gamma(c-a) F(c-a, 1-a; -, z^{-1}).
\end{aligned}
$$

Biorąc pod uwagę (3.37), dostajemy

$$
\frac{F(a;c;z)}{\Gamma(c)} = (-z)^{-a}\frac{F(a, a+1-c; -; -z^{-1})}{\Gamma(c-a)} + z^{-c+a}\frac{e^z F(c-a, 1-a; -; z^{-1})}{\Gamma(a)}
$$

3.7 Atom wodoru

Przekształcamy równanie konfluentne:

$$
\begin{aligned}
& e^{-z/2}\left(z\partial_z^2 + (c-z)\partial_z - a\right) e^{z/2} \qquad (3.38)\\
= \; & z\partial_z^2 + c\partial_z + \frac{c}{2} - a - \frac{z}{4};
\end{aligned}
$$

Następnie

$$
z^{-(1-c)/2}\left(z\partial_z^2 + c\partial_z + \frac{c}{2} - a - \frac{z}{4}\right) z^{(1-c)/2} \tag{3.39}
$$

$$
= z\partial_z^2 + \partial_z - \frac{z}{4} + \frac{c}{2} - a - \frac{(1-c)^2}{4z}. \tag{3.40}
$$

Dzielimy (3.39) przez z i podstawiamy $z = 2w$. Dostajemy

$$
\partial_w^2 + \frac{1}{w}\partial_w - 1 + (c-2a)\frac{1}{w} - \left(\frac{1-c}{2}\right)^2 \frac{1}{w^2}, \tag{3.41}
$$

Mnożymy (3.41) przez w^2 i dostajemy

$$w^2\partial_w^2 + w\partial_w - w^2 + (c-2a)w - \left(\frac{1-c}{2}\right)^2. \tag{3.42}$$

czyli równanie na część radialną funkcji falowej dla potencjału coulombowskiego w 2 wymiarach (które łatwo przekształcić na równanie na część radialną dla potencjału coulombowskiego dla większego wymiaru).

Czyli jeśli funkcja f spełnia równanie konfluentne, to $\mathrm{e}^{-w}w^{(-1+c)/2}f(2w)$ spełnia równanie (3.42).

4 Równanie ${}_0F_1$ i równanie Bessela

4.1 Zmodyfikowane równanie Bessela

Naszym punktem wyjścia jest równanie (3.41). Załóżmy, że $c = 2a$ i $m := (-1+c)/2$. Wtedy dostajemy zmodyfikowane równanie Bessela

$$\partial_w^2 + \frac{1}{w}\partial_w - 1 - \frac{m^2}{w^2}, \tag{4.43}$$

Czyli jeśli f jest rozwiązaniem następującego szczególnego przypadku równania konfluentnego

$$\left(z\partial_z^2 + (2m+1-z)\partial_z - (m+\frac{1}{2})\right)f(z) = 0,$$

to $w^m\mathrm{e}^{-w}f(2w)$, jak również $w^m\mathrm{e}^{w}f(-2w)$, są rozwiązaniami zmodyfikowanego równania Bessela (4.43).

W szczególności, jedyne rozwiązanie (4.43) zachowujące się w zerze jak $\frac{w^m}{2^m\Gamma(m+1)}$ nosi nazwę *zmodyfikowanej funkcji Bessela*:

$$\begin{aligned} I(w) &:= \frac{1}{\Gamma(m+1)}\left(\frac{w}{2}\right)^m \mathrm{e}^{-w}F(m+\frac{1}{2}; 2m+1; 2w) \\ &:= \frac{1}{\Gamma(m+1)}\left(\frac{w}{2}\right)^m \mathrm{e}^{w}F(m+\frac{1}{2}; 2m+1; -2w). \end{aligned} \tag{4.44}$$

4.2 Równanie Bessela

Częściej od zmodyfikowaneo równania Bessela używane jest równanie zwane po prostu *równaniem Bessela*, otrzymane z (4.43) przez podstawienie $w = \mathrm{i}z$:

$$\partial_z^2 + \frac{1}{z}\partial_z + 1 - \frac{m^2}{z^2}. \tag{4.45}$$

Rozwiązanie (4.45) zachowujące się w zerze jak $\frac{w^m}{2^m\Gamma(m+1)}$ nazywamy *funkcją Bessela*:

$$\begin{aligned} J(z) &:= \frac{1}{\Gamma(m+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^m \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}F(m+\frac{1}{2}; 2m+1; 2\mathrm{i}z) \\ &:= \frac{1}{\Gamma(m+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^m \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}F(m+\frac{1}{2}; 2m+1; -2\mathrm{i}z) \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}m}I(\mathrm{i}z). \end{aligned} \tag{4.46}$$

4.3 Równanie Helmholtza w wymiarze 2

Równanie Helmholtza ma postać

$$(\Delta + \kappa)F = 0.$$

Rozwiążmy równanie Helmholza w wymiarze $d = 2$ w układzie biegunowym przez separację zmiennych. Jeśli zapiszemy $F = f(r)g(\phi)$, to na część kątową dostajemy równanie $\partial_\phi^2 g(\phi) = Cg(\phi)$. Rozwiązuje je $g(\phi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$, gdzie $m^2 = -C$. Na część radialną dostajemy równanie

$$\left(\frac{1}{r}\partial_r r \partial_r - \frac{m^2}{r^2} + \kappa\right) f(r) = 0.$$

Czyli jeśli $\kappa > 0$, to rozwiązania są postaci

$$F(r, \phi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi} f(\sqrt{\kappa} r),$$

gdzie f jest rozwiązaniem równania Bessela a jeśli $\kappa < 0$, to rozwiązania są postaci

$$F(r, \phi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi} f(\sqrt{-\kappa} r),$$

gdzie f jest rozwiązaniem zmodyfikowanego równania Bessela.

Jeśli $\kappa = 0$, to dostajemy równanie Laplace'a. Równanie na część radialną jest postaci

$$\left(\frac{1}{r}\partial_r r \partial_r - \frac{m^2}{r^2}\right) f(r) = 0$$

i ma rozwiązania r^m i r^{-m}. Czyli rozwiązanie jest kombinacją liniową $r^m \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$ i $r^{-m}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$. We współrzędnych kartezjańskich odpowiada to kombinacjom liniowym $(x + \mathrm{i}y)^m$ i $(x - \mathrm{i}y)^m$.

4.4 Równanie Helmholtza w dowolnym wymiarze

W dowolnym wymiarze równanie na część radialną ma postać

$$\left(r^{-d+1}\partial_r r^{d-1}\partial_r - \frac{l(l+d-2)}{r^2} + \kappa\right) f(r) = 0$$

Zauważając, że

$$\begin{aligned} & r^{\frac{d-2}{2}}\left(r^{d-1}\partial_r r^{d-1}\partial_r - \frac{l(l+d-2)}{r^2} + \kappa\right) r^{-\frac{d-2}{2}} \\ = \; & r^{-1}\partial_r r \partial_r - \left(l + \frac{d-2}{2}\right)^2, \end{aligned}$$

widzimy, że i tym razem dostajemy równanie Bessela.

4.5 Równanie ${}_0F_1$ – równoważność z równaniem Bessela

Zamiast równania i funkcji Bessela wygodniej jest używać równania ${}_0F_1$:

$$(w\partial_w^2 + \tilde{c}\partial_w - 1)f(w) = 0. \tag{4.47}$$

Równanie to jest w pełni równoważne równaniu Bessela.

Aby je uzyskać wygodnie jest wystartować z równania (3.39) dla $c = 2a$:

$$z\partial_z^2 + c\partial_z - \frac{z}{4}. \tag{4.48}$$

Podstawiamy w nim $w = \frac{z^2}{16}$, czyli $z = 4w^{\frac{1}{2}}$. Używając $\partial_z = \frac{w^{\frac{1}{2}}}{2}\partial_w$, dostajemy

$$w^{\frac{3}{2}}\partial_w^2 + \frac{w^{\frac{1}{2}}}{2}\partial_w + \frac{c}{2}w^{\frac{1}{2}}\partial_w - w^{\frac{1}{2}}. \tag{4.49}$$

Dzielimy przez $w^{\frac{1}{2}}$ i dostajemy (4.47) dla $\tilde{c} = \frac{1+c}{2}$.

4.6 Funkcja ${}_0F_1$

Równanie

$$(z\partial_z^2 + c\partial_z - 1)f(z) = 0. \tag{4.50}$$

ma regularny punkt osobliwy w 0 z indeksami $0, 1-c$ i nieregularny punkt osobliwy w ∞. Posiada ono symetrię

$$z^{c-1}(z\partial_z^2 + c\partial_z - 1)z^{1-c} = z\partial_z^2 + (2-c)\partial_z - 1. \tag{4.51}$$

Rozwiązaniem analitycznym w zerze i równym w nim 1 jest funkcja

$$F(c;z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(c)_n n!}.$$

Stosując symetrię (4.51) widzimy, że rozwiązaniem zachowującym się w zerze jak z^{1-c} jest $z^{1-c}F(2-c;z)$.

Wygodnie jest używać zamiast funkcji $F(c;z)$ funkcji

$$\Phi(c;z) := \frac{F(c;z)}{\Gamma(c)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(c+j)j!}.$$

Oto wyrażenia przedstawiające funkcję Bessela i zmodyfikowaną funkcję Bessela poprzez funkcję ${}_0\Phi_1$:

$$\begin{aligned} I_m(w) &= \left(\frac{w}{2}\right)^m \Phi(1+m; w^2/4); \\ J_m(w) &= \left(\frac{w}{2}\right)^m \Phi(1+m; -w^2/4); \end{aligned}$$

Funkcję ${}_0F_1$ możemy przedstawić poprzez funkcję konfluentną dostając drugą tożsamość Kummera:

$$\begin{aligned} F(c;z) &= \mathrm{e}^{-2\sqrt{z}}F\left(\frac{2c-1}{2};2c-1;4\sqrt{z}\right) \\ &= \mathrm{e}^{2\sqrt{z}}F\left(\frac{2c-1}{2};2c-1;-4\sqrt{z}\right). \end{aligned}$$

Żeby się o tym przekonać, sprawdzamy, że prawa strona spełnia równanie (4.50), że w zerze jest analityczna i równa 1.

4.7 Reprezentacje całkowe

Twierdzenie 4.1 *Niech krzywa γ spełnia*

$$\mathrm{e}^t\mathrm{e}^{z/t}t^{-c}\Big|_{\gamma(0)}^{\gamma(1)} = 0.$$

Wtedy

$$\int_\gamma \mathrm{e}^{t+z/t}t^{-c}\mathrm{d}t$$

jest rozwiązaniem równania (4.50).

Dowód. Sprawdzamy, że

$$(z\partial_z^2 + c\partial_z - 1)\mathrm{e}^{t+z/t}t^{-c} = \partial_t\mathrm{e}^{t+z/t}t^{-c}.$$

□

Stąd dostajemy reprezentację całkową

$$\Phi(c;z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{]-\infty,0^+,\infty[}\mathrm{e}^{t+z/t}t^{-c}\mathrm{d}t. \tag{4.52}$$

Aby ją uzyskać wystarczy sprawdzić, że całka (4.52) spełnia założenia twierdzenia 4.1 i w zerze jest analityczna i równa

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{]-\infty,0^+,\infty[}\mathrm{e}^t t^{-c}\mathrm{d}t = \frac{1}{\Gamma(c)}.$$

Następująca reprezentacja wynika natychmiast z Twierdzenia 3.1 o reprezentacjach całkowych rozwiązań równania konfluentnego:

Twierdzenie 4.2 *Niech krzywa γ spełnia*

$$(t^2-1)^{c-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{2t\sqrt{z}}\Big|_{\gamma(0)}^{\gamma(1)} = 0.$$

Wtedy

$$\int_\gamma (t^2-1)^{c-\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{2\sqrt{z}t}\mathrm{d}t$$

jest rozwiązaniem równania (4.50).

Z tego twierdzenia dostajemy

$$\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{c-\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{2t\sqrt{z}}\mathrm{d}t = F(c;z)\frac{\Gamma(c-\frac{1}{2})\sqrt{\pi}}{\Gamma(c)}. \tag{4.53}$$

Sprawdzamy bowiem, że całka w (4.53) spełnia założenia Twierdzenia 4.2, w zerze jest analityczna i równa

$$\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{c-\frac{3}{2}}\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(c-\frac{1}{2})\sqrt{\pi}}{\Gamma(c)}.$$

4.8 Funkcja ${}_0F_1$ dla całkowitych parametrów

Dla $k \in \mathbb{Z}$ mamy tożsamość:

$$\Phi(1+k;z) = z^{-k}\Phi(1-k;z).$$

Wynika to z rachunku

$$z^{-k}\Phi(2-k;z) = \sum_{n=k}^{\infty}\frac{z^{n-k}}{(-k+n)!n!} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{m!(k+m)!} = \Phi(1+k;z).$$

Mamy też funkcję tworzącą

$$\mathrm{e}^{t+z/t} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} t^n\Phi(n+1,z)$$

oraz reprezentację całkową

$$\Phi(n+1;z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{[0^+]}\mathrm{e}^{t+z/t}t^{-n-1}\mathrm{d}t. \tag{4.54}$$

Zauważmy, że (4.54) wynika z Twierdzenia 4.1.

5 Równanie hipergeometryczne

Równanie hipergeometryczne ma postać

$$\big(z(1-z)\partial_z^2 + (c-(a+b+1)z)\partial_z - ab\big)\, f(z) = 0. \tag{5.55}$$

Ma ono punkty następujące regularne punkty osobliwe:
0, indeksy: 0, $1-c$;
1, indeksy: 0, $c-a-b$;
∞, indeksy: a, b.

Rozwiązaniem analitycznym w zerze i równym w nim 1 jest *funkcja hipergeometryczna*

$$F(a,b;c;z) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(a)_j(b)_j}{(c)_j}\frac{z^j}{j!},$$

Funkcja $F(a,b;c;z)$ jest zdefiniowana dla $c \neq 0,-1,-2,\ldots$. Czasem wygodniej jest rozważać funkcję

$$\Phi(a,b;c;z) := \frac{F(a,b;c;z)}{\Gamma(c)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a)_j(b)_j}{\Gamma(c+j)} \frac{z^j}{j!}$$

zdefiniowaną dla wszystkich a,b,c.

5.1 Rozwiązanie zachowujące się jak z^{1-c} w zerze

Równanie hipergeometryczne ma symetrię

$$\begin{aligned} & z^{c-1}\big(z(1-z)\partial_z^2 + (c-(a+b+1)z)\partial_z - ab\big)\, z^{1-c} \\ = & \big(z(1-z)\partial_z^2 + (2-c-(a+b-2c+3)z)\partial_z - (b-c+1)(a-c+1)\big) \end{aligned}$$

Dlatego rozwiązaniem równania (5.55) zachowującym się jak z^{1-c} w zerze jest

$$z^{1-c}F(b+1-c, a+1-c; 2-c; z) \tag{5.56}$$

5.2 Rozwiązania mające określone zachowania w 1

Podstawienie, które zamienia 0 i 1 to $w = 1-z$:

$$\begin{aligned} & z(1-z)\partial_z^2 + (c-(a+b+1)z)\partial_z - ab \\ = \; & w(1-w)\partial_w^2 + (a+b+1-c-(a+b+1)w)\partial_w - ab. \end{aligned}$$

Dlatego, rozwiązaniem analitycznym w 1 i przyjmującym tam wartość 1 jest

$$F(a,b;a+b+1-c;1-z).$$

5.3 Rozwiązania mające określone zachowania w ∞

Punkt w nieskończoności jest regularnym punktem osobliwym z indeksami a,b. Podstawienie zamieniające 0 i ∞ to $w = z^{-1}$.

$$(-z)^{1+a}\big(z(1-z)\partial_z^2 + (c-(a+b+1)z)\partial_z - ab\big)\,(-z)^{-a} \tag{5.57}$$

$$= \big(w(1-w)\partial_w^2 + (a-b+1-(2a-c+2)w)\partial_w - a(a-c+1)\big)\,. \tag{5.58}$$

Stąd dostajemy rozwiązanie zachowujące się w nieskończoności jak z^{-a}

$$z^{-a}F(a, a-c+1; a-b+1; z^{-1}),$$

Drugie rozwiązanie dostajemy zamieniając a i b:

$$z^{-b}F(b-c+1, b; b-a+1; z^{-1}).$$

5.4 Tożsamości

Następujące podstawienie nie zmienia 0, a zamienia 1 i ∞: $z \mapsto w = \frac{z}{z-1}$. Prowadzi ono do

$$\begin{aligned} & -(1-z)^{1+a}\left(z(1-z)\partial_z^2 + (c-(a+b+1)z)\partial_z - ab\right)(1-z)^{-a} \\ = \quad & \left(z(1-z)\partial_z^2 + (c-(a+c-b+1)z)\partial_z - a(c-b)\right), \end{aligned} \tag{5.59}$$

Podobnie z zamianą a i b. Stąd dostajemy tożsamości

$$\begin{aligned} & F(a,b;c;z) \\ & = (1-z)^{c-a-b}F\left(c-a,c-b;c;z\right) \\ & = (1-z)^{-a}F\left(a,c-b;c;\tfrac{z}{z-1}\right) \\ & = (1-z)^{-b}F\left(c-a,b;c;\tfrac{z}{z-1}\right). \end{aligned}$$

5.5 Reprezentacje całkowe

Twierdzenie 5.1 *Niech krzywa γ spełnia*

$$t^{a-c+1}(1-t)^{c-b}(t-z)^{-a-1}\Big|_{\gamma(0)}^{\gamma(1)} = 0.$$

Wtedy

$$\int_\gamma t^{a-c}(1-t)^{c-b-1}(t-z)^{-a}\mathrm{d}t \tag{5.60}$$

jest rozwiązaniem równania hipergeometrycznego.

Dowód. Sprawdzamy, że

$$\begin{aligned} & \left(z(1-z)\partial_z^2 + (c-(a+b+1)z)\partial_z - ab\right)t^{a-c}(1-t)^{c-b-1}(t-z)^{-a} \\ & = -a\partial_t t^{a-c+1}(1-t)^{c-b}(t-z)^{-a-1}. \end{aligned}$$

□

Wynika stąd następująca reprezentacja całkowa funkcji hipergeometrycznej:

$$\begin{aligned} & \textstyle\int_1^\infty t^{a-c}(t-1)^{c-b-1}(t-z)^{-a}\mathrm{d}t \\ & = \Gamma(b)\Gamma(c-b)\Phi(a,b;c;z), \qquad \mathrm{Re}(c-b) > 0,\ \mathrm{Re}b > 0. \end{aligned} \tag{5.61}$$

Aby ją dostać, zauważmy, że (5.61) spełnia założenia Twierdzenia 5.1, w zerze jest analityczne i przyjmuje wartość

$$\int_1^\infty t^{-c}(t-1)^{c-b-1}\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)}.$$

6 Równanie Airy'ego

Równanie Airy'ego ma postać

$$(\partial_z^2 - z)u(z) = 0.$$

Twierdzenie 6.1 *Jeśli $u(z)$ jest rozwiązaniem równania Airy'ego, to $u(\mathrm{e}^{\pm\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}z)$ jest też jego rozwiązaniem.*

Twierdzenie 6.2 *Niech krzywa γ spełnia*

$$\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{3}t^3+\mathrm{i}tz}\Big|_{\gamma(0)}^{\gamma(1)} = 0.$$

Wtedy

$$C\int_\gamma \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{3}t^3+\mathrm{i}tz}\mathrm{d}t$$

jest rozwiązaniem równania Airy'ego.

Dowód.

$$(\partial_z^2 - z)\int_\gamma \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{3}t^3+\mathrm{i}tz}\mathrm{d}t$$

$$= \int_\gamma(-t^2 - z)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{3}t^3+\mathrm{i}tz}\mathrm{d}t = \int_\gamma \mathrm{i}\partial_t\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{3}t^3+\mathrm{i}tz}\mathrm{d}t = 0.$$

□

Podstawienie $t = \mathrm{i}s$ daje analogiczne twierdzenie z funkcją $\mathrm{e}^{\frac{1}{3}t^3-tz}$.

Funkcja Airy'ego jest zdefiniowana wzorem

$$\begin{aligned}\mathrm{Ai}(z) \quad &:= \tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_{]-\infty,\infty[}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{3}t^3+\mathrm{i}tz}\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{]-\mathrm{i}\infty,\mathrm{i}\infty[}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}t^3+tz}\mathrm{d}t \\ &= \tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_{]-\infty,\infty[}\cos(-\frac{1}{3}t^3 + tz)\mathrm{d}t \\ &= \tfrac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}}{2\pi\mathrm{i}}\textstyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{s^3}{3}-sz\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}}\mathrm{d}s - \tfrac{\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\pi}{3}}}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{s^3}{3}-sz\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\pi}{3}}}\mathrm{d}s\end{aligned}$$

Punkt 0 jest regularnym punktem równania. Szukając rozwiązania w postaci $u(z) = \sum_{m=0}^\infty u_m z^m$ dostajemy równanie rekurencyjne

$$n(n-1)u_n = u_{n-3}.$$

Zatem ogólne rozwiązanie jest kombinacją liniową funkcji

$$\mathrm{Ai}_{(0)}(z) := \sum_{m=0}^\infty \prod_{j=1}^m \frac{1}{3j(3j-1)}z^{3m},$$

$$\mathrm{Ai}_{(1)}(z) := \sum_{m=0}^\infty \prod_{j=1}^m \frac{1}{3j(3j+1)}z^{3m+1},$$

gdzie

$$\mathrm{Ai}_{(0)}(0) = 1, \quad \mathrm{Ai}_{(0)}{}'(0) = 0;$$

$$\mathrm{Ai}_{(1)}(0) = 0, \quad \mathrm{Ai}_{(1)}{}'(0) = 1.$$

Twierdzenie 6.3

$$\mathrm{Ai}(z) = \frac{3^{-\frac{2}{3}}}{\Gamma(\frac{2}{3})}\mathrm{Ai}_{(0)}(z) + \frac{3^{-\frac{1}{3}}}{\Gamma(\frac{1}{3})}\mathrm{Ai}_{(1)}(z).$$

Dowód.

$$\begin{aligned} \mathrm{Ai}(0) &= \tfrac{\sin\frac{\pi}{3}}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{s^3}{3}}\mathrm{d}s = \tfrac{3^{-\frac{2}{3}}}{\Gamma(\frac{2}{3})}, \\ \mathrm{Ai}'(0) &= -\tfrac{\sin\frac{2\pi}{3}}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{s^3}{3}}s\mathrm{d}s = \tfrac{3^{-\frac{1}{3}}}{\Gamma(\frac{1}{3})}. \end{aligned}$$

□

Związki z funkcjami Bessela:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ai}_{(0)}(z) &= I_{-\frac{1}{3}}(\tfrac{2}{3}z^{\frac{3}{2}})z^{\frac{1}{2}}(\tfrac{2}{3})^{\frac{1}{3}}\Gamma(\tfrac{2}{3}) \\ &= J_{-\frac{1}{3}}(\tfrac{2}{3}(-z)^{\frac{3}{2}})(-z)^{\frac{1}{2}}(\tfrac{1}{3})^{\frac{1}{3}}\Gamma(\tfrac{2}{3}), \\ \mathrm{Ai}_{(1)}(z) &= I_{\frac{1}{3}}(\tfrac{2}{3}z^{\frac{3}{2}})z^{\frac{1}{2}}(\tfrac{2}{3})^{-\frac{1}{3}}\Gamma(\tfrac{4}{3}) \\ &= -J_{\frac{1}{3}}(\tfrac{2}{3}(-z)^{\frac{3}{2}})(-z)^{\frac{1}{2}}3^{-\frac{1}{3}}\Gamma(\tfrac{4}{3}), \\ \mathrm{Ai}(z) &= \pi^{-1}(\tfrac{z}{3})^{\frac{1}{3}}K_{\frac{1}{3}}(\tfrac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}) = \tfrac{1}{3}z^{\frac{1}{2}}\Big(I_{-\frac{1}{3}}(\tfrac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}) - I_{\frac{1}{3}}(\tfrac{2}{3}z^{\frac{3}{2}})\Big) \\ &\qquad\qquad = \tfrac{1}{3}(-z)^{\frac{1}{2}}\Big(J_{-\frac{1}{3}}(\tfrac{2}{3}(-z)^{\frac{3}{2}}) + J_{\frac{1}{3}}(\tfrac{2}{3}(-z)^{\frac{3}{2}})\Big) \end{aligned}$$