

Ćwiczenia do Teorii Operatorów.

Jan Dereziński

0.1 Przestrzenie Banacha

Zadanie 1 Jeśli $t \leq r$, $x \in \mathbb{C}^n$, to

$$\|x\|_t \leq n^{\frac{1}{t} - \frac{1}{r}} \|x\|_r.$$

Zadanie 2 Jeśli $1 \leq q \leq r \leq \infty$, $x \in l^q$, to $\|x\|_q \geq \|x\|_r$. Zatem $l^q \subset l^r$.

Rozwiązanie. Najpierw pokażemy, że $1 \leq p$, to

$$\|x\|_p \leq \|x\|_1. \quad (0.1)$$

Niech $y_i = [0, \dots, x_i, \dots, 0]$. Wtedy $x = y_1 + \dots + y_n$. Stosujemy nierówność Minkowskiego

$$\|x\|_p \leq \|y_1\|_p + \dots + \|y_n\|_p = |x_1| + \dots + |x_n| = \|x\|_1.$$

Następnie stosujemy (0.1) do $y = [x_1^q, \dots, x_n^q]$:

$$\left(\sum |x_i|^r \right)^{\frac{q}{r}} = \|y\|_{\frac{r}{q}} \leq \|y\|_1 = \sum |x_i|^q.$$

Zadanie 3 Jeśli $1 \leq q \leq r \leq \infty$, $f \in L^r[0, 1]$, to

$$\|f\|_q \leq \|f\|_r.$$

Zatem $L^q[0, 1] \supset L^r[0, 1]$.

Zadanie 4 A linear operator from \mathbb{C}^m to \mathbb{C}^n can be defined by a matrix $[a_{ij}]$.

- (1) Jeśli \mathbb{C}^m jest wyposażone w normę $\|\cdot\|_1$ a \mathbb{C}^n w normę $\|\cdot\|_\infty$, wtedy $\|A\| = \max\{|a_{ij}|\}$.
- (2) Jeśli \mathbb{C}^m jest wyposażone w normę $\|\cdot\|_\infty$ a \mathbb{C}^n w normę $\|\cdot\|_1$, wtedy $\|A\| \leq \sum_{i,j} |a_{ij}|$.
- (3) Jeśli \mathbb{C}^m jest wyposażone w normę $\|\cdot\|_1$ a \mathbb{C}^n w normę $\|\cdot\|_1$, wtedy $\|A\| = \max_j \{\sum_i |a_{ij}|\}$.
- (4) Jeśli \mathbb{C}^m jest wyposażone w normę $\|\cdot\|_\infty$ a \mathbb{C}^n w normę $\|\cdot\|_\infty$, wtedy $\|A\| = \max_i \{\sum_j |a_{ij}|\}$.

0.2 Przestrzenie Hilberta

Niech \mathcal{H} będzie przestrzenią Hilberta. Będziemy stosować notację dla iloczynu skalarnego podobną do notacji Diraca:

$$(v|w), \quad v, w \in \mathcal{H}.$$

Jedną z jej zalet jest możliwość "oderwania" $(v|, |w)$, traktując je jako operatory

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto |w)z := wz \in \mathcal{H}, \quad (0.2)$$

$$\mathcal{H} \ni h \mapsto (v|h := (v|h) \in \mathbb{C}. \quad (0.3)$$

Na przykład

$$|w\rangle(v|h = w(v|h).$$

Jeśli $\langle v|w\rangle = 1$, jest to rzut na w wzdłuż $\text{Ker}(v)$. Jeśli $\|v\| = 1$, to $|v\rangle\langle v|$ jest rzutem ortogonalnym na v . Jeśli e_1, \dots, e_n jest bazą ortonormalną, to

$$A = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} |e_i\rangle\langle e_j|.$$

Zadanie 5 W l^2 definiujemy przestrzenie

$$V := \{(x_n) \in l^2 : x_{2k} = 0, k \in \mathbb{N}\}, \quad (0.4)$$

$$Z := \{(x_n) \in l^2 : x_{2k-1} + \sqrt{k}x_{2k} = 0, k \in \mathbb{N}\}. \quad (0.5)$$

Oczywiście, V i Z są domknięte. Pokazać, że $V + Z$ nie jest domknięta.

Rozwiązanie. Rozważmy $x \in l^2$, $x_i = \frac{1}{n}$. Wtedy Załóżmy, że $x = v + z$, $v \in V$, $z \in Z$. Jedyna możliwość to

$$z_{2k} = \frac{1}{2k}, \quad z_{2k-1} = -\sqrt{k}z_{2k} = -\frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

Ale $z \notin l^2$.

Zadanie 6 Niech A będzie operatorem samosprzężonym na \mathbb{C}^n . Pokazać, że

$$\|A\| = \max\{|\lambda| : \lambda \in \text{sp}(A)\}.$$

Rozwiązanie.

$$A = \sum_{\lambda \in \text{sp}(A)} \lambda P_\lambda.$$

$$\|Av\|^2 = \sum \lambda^2 \|P_\lambda v\|^2 \leq \max\{|\lambda| : \lambda \in \text{sp}(A)\} \sum \|P_\lambda v\|^2 \quad (0.6)$$

$$= \max\{|\lambda| : \lambda \in \text{sp}(A)\} \|v\|^2. \quad (0.7)$$

Zadanie 7 $\|B\|^2 = \|B^*B\|$.

Zadanie 8 Znaleźć normę $B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie. Mamy

$$B^*B = \begin{bmatrix} \overline{B_{11}}B_{11} + \overline{B_{21}}B_{21} & \overline{B_{11}}B_{12} + \overline{B_{21}}B_{22} \\ \overline{B_{12}}B_{11} + \overline{B_{22}}B_{21} & \overline{B_{12}}B_{12} + \overline{B_{22}}B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

$$\det(C - \lambda \mathbb{1}) = (C_{11} - \lambda)(C_{22} - \lambda) - C_{12}C_{21} = 0.$$

$$\|B\|^2 = \frac{C_{11} + C_{22} + \sqrt{(C_{11} - C_{22})^2 + 4C_{12}C_{21}}}{2}.$$

Zadanie 9 Let $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ be a matrix with determinant 1. Prove that the transformation on $L^2(\mathbb{R})$ given by

$$Uf(x) := \frac{1}{|cx+d|} f\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

is unitary.

Zadanie 10 Let A be an invertible operator. Then there exists a unique positive operator B and unitary U such that

$$A = UB.$$

Solution. We have $A^* = BU^*$, $A^*A = B^2$. Hence $B = \sqrt{A^*A}$. B^2 is invertible. Hence so is B . Therefore, $U = AB^{-1}$. Then we check that U is unitary.

Zadanie 11 Let S^1 be the unit circle parametrized with angle $\phi \in [0, 2\pi[$. Let $S^1 \ni \phi \mapsto \psi(\phi) \in S^1$ be the bijection of class C^1 such that $\frac{d\phi}{d\psi}$ is bounded. Define the operator W on functions on S^1 by

$$Wf(\phi) = f(\psi(\phi)).$$

(i) Find W^* .

(ii) Find the unitary operator U and the positive operator A such that $W = BU$.

(iii) Show that W is bounded on $L^2(S^1)$ and find $\|W\|$.

Solution.

$$W^*g(\psi) = \left| \frac{d\phi}{d\psi} \right| g(\phi(\psi)).$$

Hence,

$$W^*Wf(\psi) = \left| \frac{d\phi}{d\psi} \right| f(\psi), \tag{0.8}$$

$$\sqrt{W^*W}f(\psi) = \left| \frac{d\phi}{d\psi} \right|^{\frac{1}{2}} f(\psi), \tag{0.9}$$

$$Uf(\phi) = \left| \frac{d\psi}{d\phi} \right|^{\frac{1}{2}} f(\psi(\phi)). \tag{0.10}$$

0.3 Fourier series

Zadanie 12 Consider \mathbb{C}^n with the canonical basis $(\delta_j : j = 0, 1, \dots, n-1)$. Define the operators

$$U := \sum_{j=0}^{n-2} |\delta_{j-1}\rangle\langle\delta_j| + |\delta_{n-1}\rangle\langle\delta_0|, \quad R = |\delta_0\rangle\langle\delta_0| + \sum_{j=1}^{n-1} |\delta_{n-j}\rangle\langle\delta_j|.$$

- (i) Show that U and R are unitary.
- (ii) Show that $UR = RU^*$ and $(U + U^*)R = R(U + U^*)$.
- (iii) Find an orthonormal basis that diagonalizes U .
- (iv) Find an orthonormal basis that diagonalizes $U + U^*$ and R .

Solution. (i) is obvious, because both U and R permute an orthonormal basis. The basis

$$e_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{ijk2\pi}{n}} \delta_k$$

diagonalizes U :

$$Ue_j = e^{\frac{ij2\pi}{n}} e_j, \quad U = \sum_{j=0}^{n-1} e^{\frac{ij2\pi}{n}} |e_j\rangle\langle e_j|,$$

We have $Re_j = e_{-j}$. The basis

$$e_0^+ = e_0, \quad e_{\frac{n}{2}}^+ = e_{\frac{n}{2}}^+ \text{ if } n \text{ is even} \tag{0.11}$$

$$e_j^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_j + e_{-j}), \quad 0 < j < \left[\frac{n}{2}\right], \tag{0.12}$$

$$e_j^- = \frac{1}{i\sqrt{2}}(e_j - e_{-j}), \quad 0 < j < \left[\frac{n}{2}\right]. \tag{0.13}$$

diagonalizes simultaneously $U + U^*$ and R :

$$(U + U^*)e_j^+ = 2 \cos \frac{j2\pi}{n} e_j^+, \quad Re_j^+ = e_j^+ \tag{0.14}$$

$$(U + U^*)e_j^- = 2 \cos \frac{j2\pi}{n} e_j^-, \quad Re_j^- = -e_j^-. \tag{0.15}$$

Set $\mathcal{F}e_j = \delta_j$, or

$$\mathcal{F} = \sum |\delta_j\rangle\langle e_j| = \sum_{j,k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\frac{ijk2\pi}{n}} |\delta_j\rangle\langle\delta_k|.$$

Then

$$\mathcal{F}U\mathcal{F}^* = \sum_{j=0}^{n-1} e^{\frac{ij2\pi}{n}} |\delta_j\rangle\langle\delta_j|.$$

Zadanie 13 Consider $L^2[-\pi, \pi]$, where $[-\pi, \pi]$ is treated as the circle. Define the operators

$$U(t)f(\phi) := f(\phi - t), \quad Rf(\phi) := f(-\phi).$$

- (i) Show that $U(t)$ and R are unitary.
- (ii) Show that $U(t)U(s) = U(t + s)$ and $U(t)R = RU(-t)$.
- (iii) Find an orthonormal basis that diagonalizes $U(t)$.
- (iv) Find an orthonormal basis that diagonalizes $U(t) + U(-t)$ and R .

Solution. The on. basis

$$e_j(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ij\phi}$$

diagonalizes $U(t)$:

$$U(t)e_j = e^{ijt}e_j, \quad U(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{ijt}|e_j\rangle\langle e_j|,$$

We have $Re_j = e_{-j}$. The basis

$$e_0^+ = e_0^+, \quad e_0^+(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}; \tag{0.16}$$

$$e_j^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_j + e_{-j}), \quad e_j^+(\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(j\phi), \quad j = 1, \dots, \tag{0.17}$$

$$e_j^- = \frac{1}{i\sqrt{2}}(e_j - e_{-j}), \quad e_j^-(\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(j\phi), \quad j = 0, 1, 2, \dots \tag{0.18}$$

diagonalizes simultaneously $U(t) + U(-t)$ and R :

$$(U(t) + U(-t))e_j^+ = 2 \cos(jt)e_j^+, \quad Re_j^+ = e_j^+ \tag{0.19}$$

$$(U(t) + U(-t))e_j^- = 2 \cos(jt)e_j^-, \quad Re_j^- = -e_j^-. \tag{0.20}$$

Let $\{\delta_j : j \in \mathbb{Z}\}$ denote the canonical basis in $l^2(\mathbb{Z})$. Define the unitary Fourier transformation $\mathcal{F} : L^2[-\pi, \pi] \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$ as

$$\mathcal{F} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\delta_j\rangle\langle e_j|,$$

or

$$(\mathcal{F}f)_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ij\phi} f(\phi) d\phi.$$

The Fourier transformation diagonalizes translations:

$$\mathcal{F}U(t)\mathcal{F}^* = \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{ijt}|\delta_j\rangle\langle \delta_j|.$$

Zadanie 14 Define $L_{\pm}^2[-\pi, \pi] := \{f \in L^2[-\pi, \pi] \mid f(\phi) = \pm f(-\phi)\}$. Then $L^2[-\pi, \pi] = L_+^2[-\pi, \pi] \oplus L_-^2[-\pi, \pi]$. Besides, f_n^+ , $n = 0, 1, 2, \dots$ is an orthonormal basis of $L_+^2[-\pi, \pi]$ and f_n^- , $n = 1, 2, \dots$ of $L_-^2[-\pi, \pi]$.

Zadanie 15 Prove that $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos n\phi$, $n = 1, 2, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, is an orthogonal basis of $L^2([0, \pi])$.

Prove that $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin n\phi$, $n = 1, 2, \dots$, is an orthogonal basis of $L^2([0, \pi])$.

Solution Note that

$$L_{\pm}^2[-\pi, \pi] \ni f \mapsto U_{\pm}f := \sqrt{2}f \Big|_{[0, \pi]} \in L^2[0, \pi]$$

is a unitary operator and

$$\begin{aligned} U_+e_0^+ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \\ U_+e_n^+ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n\phi), \\ U_-e_n^- &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(n\phi). \end{aligned}$$

Niech I będzie zbiorem. Definiujemy

$$l^2(I) := \{(f_i)_{i \in I} : \sum |f_i|^2 =: \|f\|^2 < \infty\}.$$

Jeśli \mathcal{H} jest przestrzenią Hilberta z bazą ortonormalną $\{e_i : i \in I\}$, to

$$(\mathcal{F}f)_i := (e_i | f), \quad f \in \mathcal{H}$$

definiuje operator unitarny $\mathcal{F} : \mathcal{H} \rightarrow l^2(I)$. Na przykład, transformata Fouriera

$$L^2[-\pi, \pi] \ni f \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f} \in l^2(\mathbb{Z})$$

jest takim operatorem, gdzie

$$\hat{f}_n := \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\phi} f(\phi) d\phi.$$

We will write $c_n = \cos(n\phi)$, $s_n = \sin(n\phi)$.

Zadanie 16 Jedne funkcje lepiej jest rozwijać w szereg kosinusów a inne w szereg sinusów:

$$\begin{aligned} 1 &= c_0 \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{2m+1} s_{2m+1}, \\ \sin \phi &= s_1 \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m+1} \right) c_{2m}. \end{aligned}$$

Można wykorzystać

$$\sin \phi \cos(n\phi) = \frac{1}{2} \left(\sin(n+1)\phi - \sin(n-1)\phi \right).$$

Zadanie 17 $h(\phi) := (a - e^{i\phi})^{-1}$, $a > 1$. Wtedy

$$\hat{h}_n = \begin{cases} 2\pi a^{-n-1}, & n = 0, 1, \dots; \\ 0, & n = -1, -2, \dots \end{cases}$$

Zadanie 18 $h(\phi) := (e^{i\phi} - a)^{-1}$, $a < 1$. Wtedy

$$\hat{h}_n = \begin{cases} 0, & n = 0, 1, 2, \dots; \\ 2\pi a^{-n-1}, & n = -1, -2, \dots \end{cases}$$

Zadanie 19 $h(\phi) := \phi$. Wtedy

$$\hat{h}_n = \begin{cases} \frac{i2\pi(-1)^n}{n}, & n \neq 0 \\ 0, & n = 0. \end{cases}$$

Aby to otrzymać można zauważyć, że możemy napisać

$$\log(1 + e^{\pm i\phi}) = \log \left(e^{\pm \frac{i}{2}\phi} \cos \frac{\phi}{2} \right) = \pm i\phi + \log \left(\cos \frac{\phi}{2} \right). \quad (0.21)$$

(Używamy gałęzi głównej logarytmu). Dlatego,

$$h(\phi) = -i \log(1 + ae^{i\phi}) + i \log(1 + ae^{-i\phi}).$$

$$\log(1 + e^{\pm i\phi}) = \lim_{a \searrow 0} \log(1 + ae^{\pm i\phi}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} e^{\pm in\phi}}{n}.$$

Z tego wynika (0.21).

Jeśli rozważymy częściową sumę Fouriera

$$h_{(n)}(\phi) := \sum_{|j| \leq n} \frac{\hat{h}_j e^{in\phi}}{2\pi},$$

to zaobserwujemy w otoczeniu $\phi = \pm\pi$ tzw. zjawisko Gibbsa: funkcja $h_{(n)}$ “przestrzeliwuje” wartość funkcji h . Mamy bowiem

$$h_{(n)}(-\pi + \epsilon) = -2 \sum_{j=1}^n \frac{\sin \epsilon j}{j}.$$

W otoczeniu nieciągłości funkcji h obserwujemy “zafalowanie” funkcji $h_{(n)}$, które w miarę wzrostu n zwiężą się, ale nie zmniejszą swej wysokości zachowując swoją wysokość. To

zafalowanie ma w granicy ściśle określony kształt (z dokładnością do zwięzania), mamy bowiem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_{(n)} \left(-\pi + \frac{y}{n} \right) = -2 \int_0^y \frac{\sin x}{x} dx =: -2F(y).$$

Funkcja F jest nieparzysta i ma maksimum dla $y = \pi$ równe

$$G := \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx \approx 1,81,$$

zwane stałą Wilbrahama-Gibbsa.

Ta własność sumy częściowej szeregu Fouriera występuje zawsze, kiedy mamy do czynienia z nieciągłą funkcją. Prowadzi ono do tego, że dla funkcji nieciągłej o skoku $a2\pi$ w sumie częściowej szeregu Fouriera będzie skok $4aG > a2\pi$. Mamy $(4G - 2\pi) \approx 0.18$.

Zadanie 20 Rozważmy $l^2(\mathbb{Z})$ z bazą kanoniczną $(\delta_j : j \in \mathbb{Z})$. Zdefiniujmy operatory

$$U := \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\delta_{j+1}\rangle \langle \delta_j|, \quad R = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\delta_{-j}\rangle \langle \delta_j|.$$

- (i) Pokazać, że U i R są unitarne.
- (ii) Czy istnieje baza ortonormalna w której U jest diagonalny?
- (iii) Odwrotna transformata Fouriera $\mathcal{F}^* : l^2(\mathbb{Z}) \rightarrow L^2(S^1)$ diagonalizuje U :

$$\frac{1}{2\pi} \mathcal{F}^* U \mathcal{F} = B, \quad (Bf)(\phi) = e^{i\phi} f(\phi), \quad f \in L^2(S^1).$$

- (iv) Podać operator unitarny $V : l^2(\mathbb{Z}) \rightarrow L^2(0, \pi) \oplus L^2(0, \pi)$ taki, że

$$V R V^* = \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{bmatrix}, \quad V(U + U^*)V^* = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix},$$

gdzie

$$(Cg)(\phi) = 2 \cos \phi g(\phi), \quad g \in L^2(0, \pi).$$

Wskazówka. Najpierw rozwiązać zadanie 13.

Zadanie 21 Pokazać, że jeśli $f^{(n)}$ istnieje, to

$$|\hat{f}_k| \leq |k|^{-n} \int_{-\pi}^{\pi} |f^{(n)}(x)| dx.$$

Rozwiązanie.

$$k^n \hat{f}_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) i^n \partial_x^n e^{ikx} dx \tag{0.22}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (-i)^n (\partial_x^n f(x)) e^{ikx} dx \tag{0.23}$$

Zadanie 22 Pokazać, że jeśli dla $\epsilon > 0$,

$$|\hat{f}_k| \leq \frac{C}{(|k| + 1)^{n+1+\epsilon}},$$

to f jest n -krotnie różniczkowalne.

Rozwiązanie.

$$\partial_x^n f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum k^n \hat{f}_k e^{ikx}.$$

Zatem

$$|\partial_x^n f(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \sum |k^n \hat{f}_k|.$$

0.4 Falki Haara.

Zdefiniujmy

$$\psi_{k,n}(x) := \begin{cases} 2^{k/2}, & 2^{-k}n \leq x < 2^{-k}n + 2^{-k-1}, \\ -2^{k/2}, & 2^{-k}n + 2^{-k-1} \leq x < 2^{-k}(n+1), \\ 0, & x \notin [2^{-k}n, 2^{-k}(n+1)]; \end{cases}$$

$$\phi_{k,n}(x) := \begin{cases} 2^{k/2}, & 2^{-k}n \leq x < 2^{-k}(n+1), \\ 0, & x \notin [2^{-k}n, 2^{-k}(n+1)]. \end{cases}$$

Czasami nazywa się ψ_{00} “falką matką” a ϕ_{00} “falką ojcem”.

Zadanie 23 Wprowadźmy operatory unitarne translacji i skalowania

$$(U_t f)(x) := f(x - t),$$

$$(W_s f)(x) := s^{-\frac{1}{2}} f(s^{-1}x).$$

Zauważmy, że możemy napisać

$$\psi_{k,n} = W_{2^{-k}} U_n \psi_{00}, \quad \psi_{k,n}(x) = 2^{k/2} \psi_{00}(2^k x - n).$$

Pokazać, że $\{\psi_{k,n} \mid k = 0, 1, 2, \dots, \quad n = 0, 1, \dots, 2^k - 1\}$ oraz funkcja ϕ_{00} stanowią bazę ortonormalną $L^2[0, 1]$.

Rozwiązanie. Sprawdzamy najpierw ortonormalność. Oczywiście jest, że $\text{Span}\{\phi_{kn} \mid k \geq 0\}$ jest gęste i zawiera $\{\psi_{k,n} \mid k = 0, 1, 2, \dots, \quad n = 0, 1, \dots, 2^k - 1\}$ oraz ϕ_{00} . Przeciwna inkluzja też jest łatwa.

Zadanie 24 (1) Niech $m \in \mathbb{Z}$. Wtedy

$$\mathcal{V}_m := (\text{Span}\{\psi_{k,n} : k \leq m, n = \})^{\text{cl}} = (\text{Span}\{\phi_{k,n} : k \geq m + 1, n \in \mathbb{Z}\})^{\text{cl}}. \quad (0.24)$$

- (2) $\{\psi_{k,n} \mid k, n \in \mathbb{Z}\}$ stanowią bazę ortonormalną $L^2(\mathbb{R})$.
 (3) $\psi_{m,n}$, $n \in \mathbb{Z}$ stanowią bazę ortonormalną w $\mathcal{V}_m \ominus \mathcal{V}_{m+1}$ (w dopełnieniu ortogonalnym do \mathcal{V}_{m+1} wewnątrz \mathcal{V}_m).

Rozwiązanie. (1): \subset jest oczywiste. Mamy

$$\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\frac{j}{2}} \psi_{-j0} = \sqrt{2} \phi_{10}.$$

To pokazuje \supset . (2) Najpierw sprawdzamy ortonormalność ψ_{kn} . Oczywiście jest, że $\text{Span}\{\phi_{kn} \mid k, n \in \mathbb{Z}\}$ jest gęste w $L^2(\mathbb{R})$.

0.5 Operatory

Zadanie 25 Pokazać, że $\|A\| = \|A^*\|$ **Rozwiązanie.**

$$\|A\| = \sup_{\|v\| \leq 1} \|Av\| = \sup_{\|v\|, \|w\| \leq 1} |(w|Av)| = \sup_{\|v\|, \|w\| \leq 1} |(A^*w|v)| = \sup_{\|w\| \leq 1} \|A^*w\| = \|A^*\|.$$

Zadanie 26 Rozważmy $L^2(S^1)$ z bazą ortonormalną $e_n(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\phi}$, $n \in \mathbb{Z}$. Niech $(c_n : n \in \mathbb{Z})$ będzie ciągiem ograniczonym. Zdefiniujmy operator

$$C = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n |e_n)(e_n|.$$

- (i) Pokazać, że C jest ograniczony i ma normę $\sup\{|c_n| : n \in \mathbb{Z}\}$.
 (ii) Pokazać, że jeśli $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$, to C posiada jądro całkowe równe

$$C(\phi, \psi) = \frac{\hat{c}(-\phi + \psi)}{2\pi},$$

$$\text{gdzie } \hat{c}(\psi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\psi n} c_n.$$

Zadanie 27 Na $L^2(S^1)$ rozważyć operator P_ϵ z jądrem całkowym

$$P_\epsilon(\phi, \psi) = \frac{\sinh \epsilon}{\cosh \epsilon - \cos(\phi - \psi)}.$$

Pokazać, że $s\text{-}\lim_{\epsilon \searrow 0} P_\epsilon = \mathbb{1}$ i $\|P_\epsilon\| = 1$.

Wskazówka. Pokazać, używając bazy ortonormalnej z poprzedniego zadanie, że

$$P_\epsilon = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon|n|} |e_n)(e_n|.$$

Zadanie 28 Niech $f : [0, \infty[\rightarrow [0, 1]$ będzie funkcją ciągłą i malejącą, taką, że $f(0) = 1$ i $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$. Rozważmy przestrzeń Hilberta l^2 z bazą kanoniczną $(\delta_j : j \in \mathbb{N})$. Zdefiniujmy roddzinę operatorów

$$C_\epsilon := \sum_{j=1}^{\infty} f(\epsilon j) |\delta_j\rangle \langle \delta_j|.$$

- (i) Pokazać, że funkcja $[0, \infty[\ni \epsilon \mapsto C_\epsilon$ jest normowo ciągła na $]0, \infty[$ lecz normowo nieciągła w $\epsilon = 0$.
- (ii) Pokazać, że funkcja $[0, \infty[\ni \epsilon \mapsto C_\epsilon$ jest silnie ciągła.

Zadanie 29 Mówimy, że P jest rzutem, gdy $P^2 = P$.

- (i) Pokazać, że jeśli P jest rzutem niezerowym, to $\|P\| \geq 1$.
- (ii) Pokazać, że dla każdego $c \geq 1$ istnieje rzut na przestrzeni Hilberta taki, że $\|P\| = c$.
Wskazówka. Wystarczy rozważać 2-wymiarowe przestrzenie Hilberta.
- (iii) Pokazać, że jeśli P jest rzutem na przestrzeni Hilberta takim, że $\|P\| = 1$, to jest to rzut ortogonalny.

Zadanie 30 Niech $(U_n : n = 1, 2, \dots)$ będzie ciągiem operatorów unitarnych.

- (i) Pokazać, że jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = U$, to U jest unitarny.
- (ii) Pokazać, że jeśli $s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = U$ i $s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} U_n^* = U^*$, to U jest unitarny.
- (iii) Pokazać, że jeśli $s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = U$, to U jest izometrią. Podać przykład ciągu operatorów unitarnych, którego silna granica nie jest unitarna.
- (iv) Pokazać, że jeśli $w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = U$, to $\|U\| \leq 1$. Podać przykład ciągu operatorów unitarnych, którego słaba granica jest zerem.

Zadanie 31 Niech $(P_n : n = 1, 2, \dots)$ będzie ciągiem rzutów. Niech $s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P$. Pokazać, że P jest rzutem.

Wskazówka. Można założyć, że $\sup \|P_n\| < \infty$. (Wynika to z Tw. Banacha-Steinhausa i silnej zbieżności ciągu (P_n)).

Zadanie 32 Niech A_n będzie ciągiem samosprzężonych operatorów ograniczonych na przestrzeni Hilberta takich, że $w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$. Pokazać, że A jest samosprzężony.

Zadanie 33 Niech $(P_n : n = 1, 2, \dots)$ będzie ciągiem rzutów ortogonalnych.

- (i) Niech $s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P$. Pokazać, że P jest rzutem ortogonalnym.
- (ii) Podać przykład ciągu $(P_n : n = 1, 2, \dots)$ rzutów ortogonalnych takich, że $w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \frac{1}{2} \mathbb{1}$.

Zadanie 34 Dla $f \in L^2([0, \infty[)$ definiujemy

$$(Tf)(x) := x^{-1} f(x^{-1}).$$

Czy T jest operatorem

- (i) ograniczonym,
- (ii) unitarnym,
- (iii) samosprężonym.

Zadanie 35 Niech $\alpha \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} \alpha \leq 0$. Niech $(\delta_n : n \in \mathbb{N})$ oznacza bazę kanoniczną w $l^2(\mathbb{N})$. Zdefiniujmy następujący operator na $l^2(\mathbb{N})$:

$$T := \sum_{n=1}^{\infty} e^{n\alpha} |\delta_{n+1}\rangle \langle \delta_n|.$$

- (i) Pokazać, że T jest operatorem ograniczonym i znaleźć jego normę.
- (ii) Dla jakich α operator T jest izometrią?
- (iii) Policzyc T^*T .
- (iv) Policzyc T^2 .
- (v) Dla jakich α istnieje $s - \lim_{n \rightarrow \infty} T^n$?
- (vi) Dla jakich α istnieje $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n$?

Zadanie 36 Rozważmy $l^2(\mathbb{Z})$ z bazą kanoniczną $(\delta_n : n \in \mathbb{Z})$. Niech $\theta \in \mathbb{R}$. Zdefiniujmy wektory

$$b_n := \cos(\theta n) \delta_n + \sin(\theta n) \delta_{-n}.$$

Pokazać, że $(b_n : n \in \mathbb{Z})$ jest bazą ortnormalną.

Zadanie 37 Policzyc transformatę Fouriera funkcji

$$f(x) = e^{-\frac{3}{4}x^2} \cos x^2.$$

Zadanie 38 Niech $0 < \alpha < \pi$. Dla $f \in L^2(S^1)$ zdefiniujmy

$$(Tf)(\phi) = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(\phi - \psi) d\psi.$$

- (i) Policzyc Te_n , gdzie $e_n(\phi) := e^{in\phi}$.
- (ii) Pokazać, że T jest operatorem ograniczonym i znaleźć jego normę.

Zadanie 39 Niech $1 < p < \infty$ i $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$. Niech $|x|$ oznacza normę euklidesową wektora $x \in \mathbb{R}^3$. Dla jakiego m funkcja $(1 + |x|^2)^{-m} f$ należy do $L^1(\mathbb{R}^d)$?

Zadanie 40 Niech d będzie liczbą naturalną. Dla jakiego m następująca funkcja należy do $L^2(\mathbb{R}^d)$:

- (i) $|x|^{-m}$,
- (ii) $(1 + |x|)^{-m}$,
- (iii) $\prod_{i=1}^d (1 + |x_i|)^{-m}$.

Zadanie 41 Dla $t > 0$ kładziemy $g_t(x) := (2\pi t)^{-1/2} e^{-x^2/2t}$. Znaleźć $g_t * g_s$.

Wskazówka. $\hat{g}_t(\xi) = e^{-t\xi^2/2}$.

Zadanie 42 Dla $t \neq 0$ kładziemy $g_t(x) = (ix + t)^{-1}$. Znaleźć $g_t * g_s$.

Wskazówka. $\hat{g}_t(\xi) = 2\pi(\operatorname{sgn} t)\theta(\xi\operatorname{sgn} t)e^{-t\xi}$.

Zadanie 43 Pokazać, że $\operatorname{Span}\{(x + \alpha)^{-1} : \operatorname{Im}\alpha > 0\}$ nie jest podprzestrzenią gęstą w $L^2(\mathbb{R})$.

Zadanie 44 Niech $g \in L^1(\mathbb{R})$. Pokazać, że operator $Tf := f * g$ jest dobrze zdefiniowany dla $f \in L^2(\mathbb{R})$, jest ograniczony i $\|T\| \leq \|g\|_1$. Czy zawsze $\|T\| = \|g\|_1$?

Wskazówka. Zastosować transformację Fouriera.

Zadanie 45 Niech $1 \leq p \leq r \leq q \leq \infty$. Pokazać, że

$$L^p(\mathbb{R}) \cap L^q(\mathbb{R}) \subset L^r(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R}) + L^q(\mathbb{R}).$$

Zadanie 46 Dla $m \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$ definiujemy

$$L_m^p(\mathbb{R}) := \{f : \|(1 + |x|)^m f\|_p < \infty\}.$$

Pokazać, że jeśli $r \leq q$, $m > \frac{1}{r} - \frac{1}{q} + k$, to $L_k^r(\mathbb{R}) \supset L_m^q(\mathbb{R})$.

Wskazówka. Wykorzystać uogólnioną nierówność Höldera

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q, \quad 1 \leq p \leq r \leq q \leq \infty, \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

0.6 Dystrybucje

Odwzorowania z $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{C}$, zwane dystrybucjami, bywają zapisywane w różny sposób, np.:

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \ni \phi \mapsto T(\phi) = \langle T|\phi \rangle = \int T(x)\phi(x)dx.$$

Spełniają one następujący warunek: dla każdego zwartego $K \subset \mathbb{R}^d$ istnieje N i C takie, że dla $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ spełniających $\operatorname{supp}\phi \subset K$,

$$|\langle T|\phi \rangle| \leq C \max_{n \leq N} \sup_x |\partial_x^n \phi(x)|.$$

Przykład: jeśli $T \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^d)$, to dystrybucją regularną związaną z F , nazywamy

$$\langle T_F|\phi \rangle = \int T(x)f(x)dx.$$

A oto delta Diraca w $a \in \mathbb{R}^d$:

$$\langle \delta_a|\phi \rangle = \int \delta(x - a)\phi(x)dx = \phi(a).$$

Zadanie 47 Pokazać, że

$$\mathcal{P} \int \frac{1}{x} \phi(x) dx := \lim_{\epsilon \searrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{\infty} \right) \frac{\phi(x)}{x} dx$$

jest dystrybucją.

Rozwiązanie. Niech $\text{supp} \phi \subset K$.

$$\begin{aligned} & \mathcal{P} \int \frac{1}{x} \phi(x) dx \\ &= \left(\int_{-\infty}^{-1} + \int_1^{\infty} \right) \frac{\phi(x)}{x} dx + \lim_{\epsilon \searrow 0} \left(\int_{-1}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^1 \right) \frac{\phi(x)}{x} dx = I + II \\ & |II| \leq 2 \sup |\phi'|, \quad |I| \leq |K| \sup |\phi|. \end{aligned}$$

Zadanie 48 Pokazać, że

$$\mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{1}{x} \phi(x) dx := \lim_{\epsilon \searrow 0} \left(\int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx + \phi(0) \log \epsilon \right)$$

jest dystrybucją.

Rozwiązanie.

$$\begin{aligned} & \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{1}{x} \phi(x) dx \\ &= \int_1^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_0^1 \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x} dx. \end{aligned}$$

Następnie korzystamy z tego, że funkcja

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x}, & x \in]0, 1], \\ \phi'(0), & x = 0 \end{cases}$$

jest ciągła.

Zadanie 49 Zróżniczkować n -krotnie $\frac{1}{2} \theta(x) x^2$

Zadanie 50 Niech δ_a będzie deltą Diraca w punkcie $a \in \mathbb{R}$. Pokazać, że operator $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \ni f \mapsto T_a f := \delta_a * f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ rozszerza się do operatora unitarnego na $L^2(\mathbb{R})$. Czy T_a dla $a \rightarrow \infty$ jest zbieżny normowo, silnie lub słabo? Ewentualnie policzyć granicę.

0.7 Zbieżność dystrybucji

Mówimy, że ciąg dystrybucji T_n jest zbieżny (w sensie dystrybucyjnym) do dystrybucji T , gdy

$$\langle T_n | \phi \rangle \rightarrow \langle T | \phi \rangle, \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d).$$

Zadanie 51 Niech $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\int f = 1$, $f_\epsilon(x) = \epsilon^{-1}f(x\epsilon^{-1})$. Wtedy

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} = \delta.$$

Rozwiązanie. Niech $\delta > 0$.

$$\begin{aligned} \int f_\epsilon(x)\phi(x)dx - \phi(0) &= \int f_\epsilon(x)(\phi(x) - \phi(0))dx \\ &= \int_{|x|<\delta} f_\epsilon(x)(\phi(x) - \phi(0))dx + \int_{|x|>\delta} f_\epsilon(x)(\phi(x) - \phi(0))dx = I + II; \\ |I| &\leq \sup_{|x|<\delta} |\phi(x) - \phi(0)| \int |f(x)|dx \leq \delta \sup_x |\phi'(x)| \int |f(x)|dx; \\ |II| &\leq 2 \sup |\phi(x)| \int_{|x|>\delta/\epsilon} |f(x)|dx. \end{aligned}$$

Ale $\lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{|x|>\delta/\epsilon} |f(x)|dx = 0$. Więc

$$\left| \int f_\epsilon(x)\phi(x)dx - \phi(0) \right| \leq A\delta.$$

Ale $\delta > 0$ było dowolne.

Zadanie 52 Pokazać wzór Sochockiego.

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{x + i\epsilon} = \mathcal{P} \frac{1}{x} - i\pi\delta(x).$$

Rozwiązanie. Mamy

$$\frac{1}{x + i\epsilon} = \frac{x}{x^2 + \epsilon^2} - \frac{i\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}.$$

Mamy

$$\int \frac{1}{\pi} \int \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} dx = 1.$$

Więc, z poprzedniego zadania mamy

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{i\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} = i\pi\delta(x).$$

Podobnie pokazujemy

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{x}{x^2 + \epsilon^2} = \mathcal{P} \frac{1}{x}.$$

0.8 Równania dystrybucyjne

Zadanie 53 Znaleźć wszystkie dystrybucje spełniające

$$k^m T = 0. \quad (0.25)$$

Rozwiązanie. T musi mieć nośnik $\{0\}$. Zatem musi mieć postać

$$\sum_{j=0}^n c_j \delta^{(j)}(k).$$

Wtedy

$$\langle k^m T | \phi \rangle = \sum_{j=m}^n c_j (-1)^j (k^m \phi(k))^{(j)} \Big|_{k=0} = \sum_{j=m}^n c_j (-1)^j j(j-1) \cdots (j-m+1) \phi^{(j-m)}(0).$$

Czyli rozwiązaniem są

$$T = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \delta^{(j)}(k).$$

Zadanie 54 Znaleźć wszystkie dystrybucje spełniające

$$kT = 1. \quad (0.26)$$

Rozwiązanie.

$$T = \mathcal{P} \frac{1}{k} + c \delta(k).$$

Zadanie 55 Znaleźć wszystkie dystrybucje spełniające

$$(k^2 - 1)T = 1. \quad (0.27)$$

Rozwiązanie.

$$T = \mathcal{P} \frac{1}{k^2 - 1} + c_+ \delta(k - 1) + c_- \delta(k + 1).$$

Zadanie 56 Znaleźć wszystkie dystrybucje spełniające

$$k^2 T = 1. \quad (0.28)$$

Rozwiązanie. Zdefiniujmy dystrybucję $\mathcal{P} \frac{1}{k^2}$ wzorem

$$\mathcal{P} \int \frac{\phi(k)}{k^2} dk := \int_{|k|<1} \frac{\phi(k) - \phi(0) - k\phi'(0)}{k^2} dk + \int_{|k|>1} \frac{\phi(k)}{k^2} dk.$$

Rozwiązaniem jest

$$T = \mathcal{P} \frac{1}{k^2} + c_0 \delta(k) + c_1 \delta^{(1)}(k).$$

0.9 Transformata Fouriera

Zadanie 57 Niech $m > 0$. Pokazać, że

$$\int \frac{e^{-i\xi s}}{(s + im)} ds = -2\pi i \theta(\xi) e^{-m\xi}, \quad (0.29)$$

$$\int \frac{e^{-i\xi s}}{(s - im)} ds = 2\pi i \theta(-\xi) e^{-m|\xi|}, \quad (0.30)$$

$$\int \frac{e^{-i\xi s} s}{(s^2 + m^2)} ds = \pi i \operatorname{sgn}(\xi) e^{-m|\xi|}, \quad (0.31)$$

$$\int \frac{e^{-i\xi s} m}{(s^2 + m^2)} ds = \pi e^{-m|\xi|}. \quad (0.32)$$

Zadanie 58 Przechodząc do granicy z m do zera w poprzednim zadaniu, pokazać, że

$$\int \theta(\pm x) e^{-ixk} dx = \frac{\mp i}{k \mp i0}, \quad (0.33)$$

$$\int \frac{e^{-ikx}}{x \pm i0} dx = \mp 2\pi i \theta(\pm x), \quad (0.34)$$

$$\int \operatorname{sgn}(x) e^{-ixk} dx = -2i \mathcal{P}\left(\frac{1}{k}\right), \quad (0.35)$$

$$\int \mathcal{P} \frac{e^{-ikx}}{x} dx = \pi i \operatorname{sgn}(k), \quad (0.36)$$

Zadanie 59 Pokazać, że dla $\epsilon \geq 0$, $\lambda > -1$, transformata Fouriera funkcji $\theta(x)x^\lambda e^{-\epsilon x}$ jest równa $e^{-i(1+\lambda)\frac{\pi}{2}} \Gamma(\lambda + 1) (\xi - i\epsilon)^{-1-\lambda}$.

Zadanie 60 Pokazać, że dla $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$Tf(x) := \mathcal{P} \int \frac{f(y)}{x - y} dy$$

należy do $L^2(\mathbb{R})$ i że T rozszerza się do operatora ograniczonego na $L^2(\mathbb{R})$. Policzyć T^2 .

Wskazówka. Warto zastosować transformatę Fouriera.

Zadanie 61 Pokazać, że

$$\mathbb{1}_{[-1,1]} * \mathbb{1}_{[-1,1]} = (2 - |x|) \mathbb{1}_{[-1,1]}. \quad (0.37)$$

Wiedząc, że transformata Fouriera $\mathbb{1}_{[-1,1]}$ jest równa $\frac{2\sin(\xi)}{\xi}$, policzyć transformatę Fouriera (0.37).

Rozwiązanie. $\frac{4\sin^2(\xi)}{\xi^2}$.

0.10 Funkcje Greena

Zadanie 62 Znaleźć dystrybucje G spełniające

$$(\partial_x + 1)G(x) = \delta(x). \quad (0.38)$$

Pokazać, że

$$f := G * h$$

spełnia

$$(\partial_x + 1)f(x) = h(x). \quad (0.39)$$

Rozwiązanie. Metoda 1. Rozwiązaniem równania jednorodnego

$$(\partial_x + 1)G_0(x) = 0. \quad (0.40)$$

jest $G_0(x) := ce^{-x}$. Uzmienniając stałą c dostajemy równanie

$$\partial_x c(x) = \delta(x).$$

Stąd

$$G(x) = ce^{-x} + \theta(x)e^{-x}.$$

W szczególności, mamy funkcję Greena retardowaną $G_+(x) := \theta(x)e^{-x}$ i adwansowaną $G_- := -\theta(-x)e^{-x}$. Retardowana jest jedyną dystrybucją temperowaną spośród funkcji Greena.

Metoda 2.

$$\hat{G}(k) = \frac{1}{ik + 1}.$$

Więc

$$G(x) = \int \frac{e^{-ikx}}{ik + 1} dk = \theta e^{-x}.$$

Zadanie 63 Znaleźć dystrybucje G spełniające

$$(\partial_x + x)G(x, y) = \delta(x - y). \quad (0.41)$$

Pokazać, że

$$f(x) := \int G(x, y)h(y)dx$$

spełnia

$$(\partial_x + x)f(x) = h(x). \quad (0.42)$$

Rozwiązanie. Rozwiązaniem równania jednorodnego

$$(\partial_x + x)G_0(x, y) = 0. \quad (0.43)$$

jest $G_0(x) := c(y)e^{-\frac{x^2}{2}}$. Uzmienniając stałą $c(y)$ dostajemy równanie

$$\partial_x c(x, y) = e^{\frac{x^2}{2}} \delta(x - y) = e^{\frac{y^2}{2}} \delta(x - y).$$

Stąd

$$G(x, y) = e^{-\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}} \theta(x - y) + g(y) e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-x}.$$

W szczególności, mamy funkcję Greena retardowaną G_+ i adwansowaną G_- :

$$\begin{aligned} G_+(x) &:= e^{-\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}} \theta(x - y), \\ G_-(x) &:= -e^{-\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}} \theta(y - x). \end{aligned}$$

Zadanie 64 Rozważmy \mathbb{R}^3 . Pokazać, że $G(x) := \frac{e^{-m|x|}}{4\pi|x|}$ jest rozwiązaniem równania

$$(-\Delta + m^2)G(x) = \delta(x).$$

Rozwiązanie. Metoda 1. Niech

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \hat{G}(k) e^{ikx} dk.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \hat{G}(k) &= \frac{1}{(k^2 + m^2)}, \\ G(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{ikx}}{(k^2 + m^2)} dk \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty |k|^2 d|k| \int_0^\pi \sin \theta d\theta \frac{e^{i|k||x| \cos \theta}}{(k^2 + m^2)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty d|k| \frac{e^{i|k||x|} - e^{-i|k||x|}}{|k||x|i(k^2 + m^2)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^\infty ds \frac{se^{is|x|}}{|x|i(s^2 + m^2)} = \frac{e^{-m|x|}}{4\pi|x|}. \end{aligned}$$

Metoda 2. Zastosujemy wzór Greena:

$$\int_{\Omega} (\Delta f g - f \Delta g) = \int_{\partial\Omega} (\nabla f g - f \nabla g) ds.$$

Kładziemy $f = \phi$, $g = \frac{e^{-m|x|}}{4\pi|x|}$, $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus K(r)$. Mamy na $\partial K(r) = r^2 S^2$ z miarą $r^2 d\omega$, gdzie $\omega \in S^2$.

Sprawdzamy, że poza zerem

$$(-\Delta + m^2) \frac{e^{-m|x|}}{4\pi|x|} = 0.$$

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus K(r)} (-\Delta + m^2) \phi(x) \frac{e^{-m|x|}}{4\pi|x|} dx = \int_{S^2} \left(\partial_r \phi(r, \omega) \frac{e^{-mr}}{4\pi r} - \phi(r, \omega) \partial_r \frac{e^{-mr}}{4\pi r} \right) r^2 d\omega$$

Wreszcie, korzystamy z

$$\partial_r \frac{e^{-mr}}{r} = -\frac{e^{-mr}}{r^2} - \frac{me^{-mr}}{r}, \quad \int_{S^2} d\omega = 4\pi.$$

Zadanie 65 Niech P będzie wielomianem takim, że $P(\xi) \neq 0$, $\xi \in \mathbb{R}$. Niech $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Pokazać, że istnieje $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ taka, że

$$P(i\partial_x)f = g.$$

Pokazać, że istnieje G zależne tylko od P takie, że to rozwiązanie może być zapisane jako

$$f = G * g.$$

Znaleźć G dla $P(\xi) = \xi^2 + m^2$

0.11 Finite dimensional matrices

Let A be a linear operator on a finite dimensional space \mathcal{V} . Let $\lambda \in \mathbb{C}$. TFAE:

- (1) $\det(A - \lambda) = 0$,
- (2) There exists $v \neq 0$ s.t. $Av = \lambda v$
- (3) $(\lambda - A)$ is not invertible.

The set of such λ is called the spectrum of A and denoted $\text{sp}A$.

Problem. Let $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = \text{sp}A$ Show that if $v_i \in \text{Ker}(\lambda_i - A)$, and $v_1 + \dots + v_n = 0$, then $v_1 = \dots = v_n = 0$.

Solution. Suppose that this is not true. We can assume that p is the smallest possible number of nonzero $v_i \in \text{Ker}(\lambda_i - A)$ such that $v_1 + \dots + v_p = 0$. Then

$$0 = \lambda_p(v_1 + \dots + v_p) - A(v_1 + \dots + v_p) = (\lambda_p - \lambda_1)v_1 + \dots + (\lambda_p - \lambda_{p-1})v_{p-1} = 0,$$

which is a contradiction. \square

We say that A is diagonalizable if $\sum_{i=1}^n \text{Ker}(\lambda_i - A) = \mathcal{V}$. In other words, $\mathcal{V} = \bigoplus_{i=1}^n (\text{Ker}(\lambda_i - A))$. We can then define the projection P_i onto \mathcal{V}_i along $\mathcal{V}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_{i-1} \oplus \mathcal{V}_{i+1} \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_n$. We have then

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i.$$

Problem. Let A be an arbitrary matrix. Let $\lambda_i \in \text{sp}(A)$. Show that

$$\text{Ker}(\lambda_i - A) \subset \cdots \subset \text{Ker}(\lambda_i - A)^m.$$

Show that this sequence stabilizes. Suppose this happens for $m_i, m_i + 1, \dots$. Set

$$\mathcal{V}_i := \text{Ker}(\lambda_i - A)^{m_i}.$$

Show that \mathcal{V}_i is an invariant subspace of A .

We have

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{V}_i, \quad A = \bigoplus_{i=1}^n (\lambda_i + N_i),$$

where N_i is nilpotent on \mathcal{V}_i . Set

$$D := \bigoplus_{i=1}^n \lambda_i, \quad N := \bigoplus_{i=1}^n N_i.$$

We have

$$A = D + N, \tag{0.44}$$

where D is diagonalisable, N is nilpotent and $DN = ND$. (0.44) is called *Jordan-Chevalley decomposition*.

Problem. Let $f(z) = \sum_{k=0}^n f_k z^k$ be a polynomial Show that

$$f(A) := \sum_{k=0}^n f_k A^k = \sum_{j=0}^n \frac{N^j}{j!} f^{(j)}(D). \tag{0.45}$$

Solution. It is enough to assume that $A = \lambda + N$ where N is nilpotent.

$$f(A) = \sum_k f_k \sum_j N^j \lambda^{k-j} \frac{k!}{(k-j)!j!} = \sum_{j=0}^m \frac{N^j}{j!} \sum_{k=j}^m k(k-1)\cdots(k-j+1) f_k \lambda^{k-j}. \tag{0.46}$$

Note that in order to compute $f(A)$ it is enough to know

$$f(\lambda_i), \dots, f^{(m_i-1)}(\lambda_i),$$

Spectral Theorem. Let $AA^* = A^*A$ (A is normal). Then A is diagonalizable and the spaces $\text{Ker}(\lambda_i - A)$ are orthogonal. Therefore, P_i are orthogonal projections.

If A is Hermitian, then $\text{sp}A \subset \mathbb{R}$.

If A is unitary, then $\text{sp}A \subset \{|z| = 1\}$.

Problem. Let A be normal. Then

$$\|A\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \text{sp}A\}.$$

In particular

$$\|(z - A)^{-1}\| = \left(\min\{|z - \lambda| : \lambda \in \text{sp}A\} \right)^{-1}.$$

Solution.

$$\begin{aligned}\|Au\|^2 &= \sum |\lambda_i|^2 \|P_i u\|^2 \\ &\leq \sup |\lambda_i|^2 \sum \|P_i u\|^2 = (\sup |\lambda_i|)^2 \|u\|^2.\end{aligned}$$

Problem. Let A be any operator with spectrum $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, and degrees of nilpotency m_1, \dots, m_n . Then

$$\|(z - A)^{-1}\| \leq c \sum_{i=1}^n |z - \lambda_i|^{m_i}.$$

Solution.

$$\begin{aligned}\|(z - A)^{-1}u\| &\leq \sum_{i=1}^n \|(z - \lambda_i - N_i)^{-1}P_i u\|. \\ (z - \lambda_i - N_i)^{-1} &= \sum_{j=0}^{m_j-1} (z - \lambda_i)^{-1-j} N_j.\end{aligned}$$

Problem. Let $A, B \in B(\mathcal{H})$. Prove that $\text{sp}AB \cup \{0\} = \text{sp}BA \cup \{0\}$.

Solution. Let $z \in \text{rs}AB \setminus \{0\}$. Then

$$z^{-1}(1 + B(z - AB)^{-1}A)(z - BA) = z^{-1}(z - BA) + z^{-1}B(z - AB)^{-1}(1 - AB)A = 1.$$

Hence $z^{-1}(1 + B(z - AB)^{-1}A) = (z - BA)^{-1}$ and $z \in \text{rs}(BA)$.

0.12 Spectrum

We say that A is involution if $A^2 = \mathbb{1}$.

Problem. Show that the following are equivalent:

- (1) A is self-adjoint and A is an involution.
- (2) A is an involution and A is unitary
- (3) A is unitary and A is self-adjoint.

Problem. Let A be an involution. Find its spectrum and its spectral projections.

Solution. We guess: set $P_{\pm} := \frac{1}{2}(\mathbb{1} \mp A)$. Then $AP_{\pm} = \pm P_{\pm}$ and $A = P_+ - P_-$. Therefore, $\text{sp}(A) = \{-1, 1\}$ and $\mathbb{1}_{\{\pm 1\}}(A) = P_{\pm}$.

Problem. Let $U^n = 1$. Find spectral projections of U . **Solution.** Similarly, as in the previous problem, we guess:

$$P_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U^j e^{\frac{-ijk2\pi}{n}} = \mathbb{1}_{\{e^{\frac{i2\pi k}{n}}\}}(U), \quad (0.47)$$

$$U = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{ik2\pi}{n}} P_k. \quad \text{sp}(U) = \{e^{\frac{i2\pi k}{n}} : k = 0, \dots, n-1\}. \quad (0.48)$$

Problem. Find the spectrum of the Fourier transformation \mathcal{F} . **Solution.** $\mathcal{F}^4 = \mathbb{1}$. Hence $\text{sp}\mathcal{F} \subset \{1, i, -1, -i\}$. Let $\Omega(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, $a^* = x - \partial_x$. Then $\mathcal{F}\Omega = \Omega$ and $\mathcal{F}a^* = ia^*\mathcal{F}$. Hence $\mathcal{F}^n a^{*n} \Omega = i^n a^{*n} \Omega$. But $a^{*n} \Omega$ is a complete set of eigenvectors of the harmonic oscillator.

0.13 Operator inequalities

We say that $A \in B(\mathcal{H})$ satisfies $A \geq 0$ if

$$(v|Av) \geq 0, \quad v \in \mathcal{H}.$$

Equivalent condition: A is self-adjoint and $\text{sp}A \subset [0, \infty[$.

Let A be self-adjoint. Set $\inf \text{sp}A = a_-$, $\sup \text{sp}A = a_+$. Then

$$a_- \leq A \leq a_+.$$

For any A , $A^*A \geq 0$.

Problem. Show that

$$AA^* \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad A^*A \leq 1. \tag{0.49}$$

Solution. We have

$$\begin{aligned} \|Av\|^2 &= (v|A^*Av) \leq (v|v) = \|v\|^2 \Leftrightarrow \|A\| \leq 1, \\ \|A^*v\|^2 &= (v|AA^*v) \leq (v|v) = \|v\|^2 \Leftrightarrow \|A^*\| \leq 1. \end{aligned}$$

But $\|A\| = \|A^*\|$.

Let $A, B \in B(\mathcal{H})$. We write $A \leq B$ if

$$(v|Av) \leq (v|Bv), \quad v \in \mathcal{H}.$$

$$A_1 \leq B_1, \quad A_2 \leq B_2 \text{ implies } A_1 + A_2 \leq B_1 + B_2. \tag{0.50}$$

$$A \leq B \text{ implies } CAC^* \leq CBC^*. \tag{0.51}$$

Problem. Let $0 \leq A \leq B$. Show that for $t \geq 0$,

$$(t + B)^{-1} \leq (t + A)^{-1}. \tag{0.52}$$

Solution. Using (0.49), we obtain the following implications:

$$t + A \leq t + B, \tag{0.53}$$

$$(t + B)^{-\frac{1}{2}}(t + A)(t + B)^{-\frac{1}{2}} \leq 1, \tag{0.54}$$

$$(t + A)^{\frac{1}{2}}(t + B)^{-1}(t + A)^{\frac{1}{2}} \leq 1, \tag{0.55}$$

$$(t + B)^{-1} \leq (t + A)^{-1}. \tag{0.56}$$

Problem. Let $A \geq 0$ and $\text{Ker}A = \{0\}$. Let $0 < \alpha, \beta < 1$. Then

$$A^{-\alpha} = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{t^{-\alpha} dt}{(A + t)}, \tag{0.57}$$

$$A^\beta = \frac{\sin \pi \beta}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{(A + t)} \right) t^\beta dt. \tag{0.58}$$

Solution. We start from identity

$$\frac{\pi}{\sin \pi \alpha} = \int_0^\infty \frac{s^{-\alpha} ds}{(1+s)}. \quad (0.59)$$

We substitute $s = \frac{t}{A}$ to get (0.57). Next we multiply (0.57) by A , use

$$\frac{A}{(t+A)} = \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{(A+t)} \right) t$$

and set $\beta = 1 - \alpha$, to obtain (0.58).

Problem. Let $0 \leq A \leq B$ and $\text{Ker} A = \{0\}$. Let $0 < \alpha < 1$. Then

$$B^{-\alpha} \leq A^{-\alpha}, \quad (0.60)$$

$$A^\alpha \leq B^\alpha. \quad (0.61)$$

Solution. We have $(t+B)^{-1} \leq (t+A)^{-1}$. Therefore (0.60) follows from (0.57).

We have $\frac{1}{t} - \frac{1}{(A+t)} \leq \frac{1}{t} - \frac{1}{(B+t)}$. Therefore, (0.61) follows from (0.58).

Problem. Find an example of $A \leq B$ such that $A^2 \leq B^2$ is not true.

Solution. We use the following criterion for positivity:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \geq 0 \text{ and } ad - |b|^2 \geq 0.$$

Set

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_\epsilon := \begin{bmatrix} 1 + \epsilon^2 & \epsilon \\ \epsilon & 1 \end{bmatrix}.$$

Clearly, $A \leq B$. Now

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_\epsilon^2 = \begin{bmatrix} 1 + 3\epsilon^2 + \epsilon^4 & 2\epsilon + \epsilon^3 \\ 2\epsilon + \epsilon^3 & 1 + \epsilon^2 \end{bmatrix}.$$

Then

$$B^2 - A^2 = \begin{bmatrix} 3\epsilon^2 + \epsilon^4 & 2\epsilon + \epsilon^3 \\ 2\epsilon + \epsilon^3 & 1 + \epsilon^2 \end{bmatrix}, \quad \det(B^2 - A^2) = 3\epsilon^2 - 4\epsilon^2 + O(\epsilon^4).$$

Hence $\det(B^2 - A^2) < 0$ for small ϵ .

0.14 Polar decomposition

Let A be an operator such that $\text{Ker} A = \{0\}$ and $\text{Ker} A^* = \{0\}$. Then there exists a unique positive operator, denoted $|A|$ and a unitary operator U such that

$$A = |A|U. \quad (0.62)$$

Besides,

$$|A| = \sqrt{AA^*}, \quad U = |A|^{-1}A.$$

(0.62) is called the *polar decomposition* of A .

The above definition has a generalization to an arbitrary operator. More precisely, if A is arbitrary, then there exists a unique positive operator $|A|$ and a unique partial isometry U such that $\text{Ker}U = \text{Ker}|A|$ and

$$A = U|A|. \quad (0.63)$$

Then (0.63) is called *polar decomposition* of A and $|A| = \sqrt{A^*A}$.

Let B be the inverse of $|A|$ restricted to $\text{Ran}Q$, extended by 0 on $\text{Ker}A$. Then

$$A^+ = BU^*, \quad (0.64)$$

$$|A|^+ = B, \quad (0.65)$$

$$U^+ = U^*. \quad (0.66)$$

Uwaga 0.1 Let us denote the orthogonal projection onto the closure of $\text{Ran}A$ by P and onto $(\text{Ker}A)^\perp$ by Q . The Moore-Penrose pseudoinverse is defined as the unique operator A^+ such that

$$AA^+ = P, \quad A^+A = Q. \quad (0.67)$$

Problem. Find the polar decomposition of A on $l^2(\mathbb{Z})$ given by

$$Ae_n = a_{n+1}e_{n+1},$$

where $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$.

Solution.

$$|A|e_n = |a_n|e_n, \quad Ue_n = \frac{a_{n+1}}{|a_{n+1}|}e_{n+1}.$$

Problem. Find the polar decomposition of A_z on $L^2(\mathbb{R})$ given by the integral kernel

$$A_z(x, y) = e^{-z\frac{(x-y)^2}{2}}, \quad \text{Re}z > 0.$$

Solution. First we compute

$$A_z A_w = \sqrt{\frac{zw2\pi}{z+w}} A_{z+w}.$$

Therefore,

$$|A_z|(x, y) = \sqrt{2\pi\text{Im}z} e^{-\text{Re}z\frac{(x-y)^2}{2}}, \quad U_z(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\text{Im}z}} e^{-\text{Im}z\frac{(x-y)^2}{2}}.$$

Problem. Let $\mathbb{R} \ni x \mapsto y(x) \in \mathbb{R}$ be an increasing bijection. Find the polar decomposition of A on $L^2(\mathbb{R})$

$$Af(x) := f(y(x)).$$

Solution. First we compute

$$A^*g(y) = g(x(y)) \left| \frac{dx}{dy}(y) \right|.$$

Therefore,

$$|A|f(y) = \left| \frac{dx}{dy}(y) \right|^{\frac{1}{2}} f(y),$$

$$Uf(x) = \left| \frac{dy}{dx}(x) \right|^{\frac{1}{2}} f(y(x)).$$

%%

Problem.

- (1) Let U be a unitary operator and P an orthogonal projection. Then $W := UP$ is a partial isometry.
- (2) Let W be a partial isometry on a finite dimensional Hilbert space. Then there exists a unitary operator U and an orthogonal projection P such that $W = UP$.

%%

Problem. Find the polar decomposition of $|v\rangle\langle w|$, where v, w are arbitrary vectors.

Solution.

$$|v\rangle\langle w| = \frac{|v\rangle\langle w|}{\|v\|\|w\|} \cdot \frac{\|w\|\|v\|}{\|w\|}.$$

0.15 Rank one perturbations

Let us start with a physical example. Consider $l^2(\mathbb{Z})$ with the canonical basis $e_n, n \in \mathbb{Z}$. Consider the Hamiltonian

$$H_0 e_n = e_{n-1} + e_{n+1}, \quad \text{or} \quad (H_0 f)_n = f_{n+1} + f_{n-1},$$

perturbed by λV , where

$$V e_n = \delta_{0,n} e_0, \quad \text{or} \quad (V f)_n = \delta_{0,n} f_0.$$

We would like to find the spectrum of $H = H_0 + \lambda V$.

Introduce the Fourier transformation $\mathcal{F} : l^2(\mathbb{Z}) \rightarrow L^2[-\pi, \pi]$

$$(\mathcal{F} e_n)(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ink}.$$

Then

$$\mathcal{F} H_0 \mathcal{F}^{-1} f(k) = 2 \cos k f(k), \quad \mathcal{F} V \mathcal{F}^{-1} = |v\rangle\langle v|$$

$v(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Thus $\sigma(H_0) = [-2, 2]$.

In the sequel we will consider an abstract version of this problem. We assume that H_0 is an operator of multiplication

$$Hf(x) = xf(x),$$

on $L^2[a, b]$ and $v \in L^2[a, b]$. Let

$$Hf = \beta f.$$

Then

$$xf(x) + v(x)\lambda \int \bar{v}(y)f(y)dy = \beta f(x).$$

Hence

$$f(x) = \frac{\lambda v(x)}{\beta - x} \int \frac{\overline{v(y)} f(y) dy}{v(y)}$$

$$1 = \lambda \int \frac{|v(x)|^2}{\beta - x} dx.$$

Assume that v is continuous and nonzero on $]a, b[$. Then $\int \frac{|v(x)|^2}{\beta - x} dx = \infty$ for $\beta \in]a, b[$. We have

$$\frac{d}{d\beta} \int \frac{|v(x)|^2}{\beta - x} dx = - \int \frac{|v(x)|^2}{(\beta - x)^2} dx < 0, \quad (0.68)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \pm\infty} \int \frac{|v(x)|^2}{\beta - x} dx = 0. \quad (0.69)$$

Set

$$A := \int \frac{|v(x)|^2}{a - x} dx, \quad B := \int \frac{|v(x)|^2}{b - x} dx.$$

Hence on $]-\infty, a[$ we have exactly one eigenvalue for $\lambda \in]-\infty, A^{-1}[$ and on $]b, \infty[$ for $\lambda \in]B^{-1}, \infty[$. We have

$$\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} \frac{\beta(\lambda)}{\lambda} = 1.$$

The eigenvector is

$$\Psi_\lambda(x) = \left(\int \frac{|v(x)|^2}{(\beta - x)^2} dx \right)^{-1} \frac{v(x)}{(\beta - x)}.$$

Let us compute the resolvent:

$$(z - H)^{-1} = (z - H_0)^{-1} + \left(\lambda^{-1} - (v|(z - H_0)^{-1}v) \right)^{-1} (z - H_0)^{-1}|v)(v|(z - H_0)^{-1}$$

Hence, by computing the residue of the resolvent at β , we get

$$\mathbb{1}_{\{\beta\}}(H) = (\beta - H_0)^{-1}|v)(v|(\beta - H_0)^{-1} \frac{1}{(v|(\beta - H_0)^{-2}v)}.$$

0.16 Resonances

Let H be a self-adjoint operator. Clearly,

$$\mathbb{C} \setminus \text{sp}(H) \ni z \mapsto (z - H)^{-1}$$

is an analytic function that has poles at points of the discrete spectrum and the residues are the corresponding spectral projections. We cannot extend this function to a larger domain. However, sometimes we can extend

$$z \mapsto (\Phi|(z - H)^{-1}\Psi) \quad (0.70)$$

for some vectors Ψ . The additional domain arising from this extension is sometimes called the “non-physical sheet of the complex plane”.

Suppose that \mathcal{D} is a distinguished subspace of \mathcal{H} . Suppose that for all $\Psi \in \mathcal{D}$ (0.70) can be extended to some common region Ξ . We say that $E \in \Xi$ is a resonance if (0.70) has a singularity at E .

Note that

$$\int_0^\infty e^{it(z-H-i0)} dt = \frac{i}{(z-H+i0)}.$$

Therefore,

$$e^{-itH} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty (z-H+i0)^{-1} e^{-itz} dz.$$

By deforming the contour, pushing it down and picking up the residue at E , we obtain for $\Phi, \Psi \in \mathcal{D}$

$$(\Phi | e^{-itH} \Psi) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\Phi | (z-H)^{-1} \Psi) e^{-itz} + (\Phi | R\Psi) e^{-itE}.$$

0.17 The Friedrichs Hamiltonian

On the Hilbert space $L^2[0, \infty] \oplus \mathbb{C}$ consider

$$G = \begin{bmatrix} H_0 & |v\rangle \\ \langle v| & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$H_0 f(k) = k f(k).$$

If

$$\varepsilon \leq (\langle v | H_0^{-1} v \rangle) = \int_0^\infty \frac{|v(k)|^2}{k} dk, \quad (0.71)$$

then there exists a unique negative solution of

$$z = \varepsilon + \int_0^\infty \frac{|v(k)|^2}{z-k} dk$$

Let us call this solution E . Then we have an eigenvector with the eigenprojection

$$\left(1 + \int_0^\infty \frac{|v(k)|^2}{(E-k)^2} dk \right)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{v(k)}{E-k} \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\frac{v(k)}{E-k}} & 1 \end{bmatrix}. \quad (0.72)$$

(0.72) can be also obtained from the resolvent:

$$\begin{aligned} & (z-G)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbb{1} & \frac{v(k)}{(z-k)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{z-k} & 0 \\ 0 & (z-\varepsilon - \int \frac{|v(k)|^2 dk}{(z-k)^2})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ \frac{v(k)}{(z-k)} & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{z-k} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{v(k)}{(z-k)} \\ 1 \end{bmatrix} \left(z - \varepsilon - \int \frac{|v(k)|^2 dk}{(z-k)^2} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{v(k)}{(z-k)} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Suppose now that (0.71) is not satisfied and $v(k) \neq 0$ for all $k \geq 0$. The vector $\begin{bmatrix} \frac{v(k)}{E-k} \\ 1 \end{bmatrix}$ is formally an eigenvector of G , but it is nonnormalizable, because of the singularity $\frac{v(E)}{E-k}$. Therefore, there is no eigenvalue. However, there may be a resonance. If we replace v with λv , where v is small, then

$$E_\lambda \simeq \varepsilon + \lambda^2 \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{|v(k)|^2}{(E-k)} dk - i\pi\lambda^2 |v(E)|^2. \quad (0.73)$$

This is the Fermi Golden Rule I.

This (at least on the heuristic level) implies

$$(\Phi_0 | e^{-itH} \Phi_0) \approx e^{-iEt},$$

Hence

$$\frac{d}{dt} |(\Phi_0 | e^{-itH} \Phi_0)|^2 = 2\pi |v(E)| |(\Phi_0 | e^{-itH} \Phi_0)|^2,$$

which is called the Fermi Golden Rule II.

Here is an alternative, differential derivation of this rule. Set

$$\begin{bmatrix} \Psi_t \\ \Phi_t \end{bmatrix} := e^{-itG} \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi_0 \end{bmatrix}$$

Then

$$\frac{d}{dt} \Psi_t(k) = -ik\Psi_t(k) - i\lambda v(k)\Phi_t, \quad (0.74)$$

$$\frac{d}{dt} \Phi_t = -i\lambda \int_0^\infty \overline{v(k)} \Psi_t(k) dk - i\varepsilon \Phi_t. \quad (0.75)$$

Set

$$\tilde{\Psi}_t = e^{itk} \Psi_t, \quad \tilde{\Phi}_t := e^{i\varepsilon t} \Phi_t.$$

Then

$$\frac{d}{dt} \tilde{\Psi}_t(k) = -i\lambda v(k) e^{it(k-\varepsilon)} \tilde{\Phi}_t, \quad (0.76)$$

$$\frac{d}{dt} \tilde{\Phi}_t = -i\lambda \int_0^\infty \overline{v(k)} e^{i(\varepsilon-k)t} \tilde{\Psi}_t(k) dk. \quad (0.77)$$

Using the first approximation $\tilde{\Psi}_t(k) = \tilde{\Psi}_0(k) = 0$, $\tilde{\Phi}_t = \tilde{\Phi}_0 = 1$ we obtain after one iteration

$$\tilde{\Psi}_t(k) = -\lambda v(k) \frac{e^{it(k-\varepsilon)} - 1}{k - \varepsilon} \tilde{\Phi}_0.$$

Thus at $t = 0$

$$\frac{d}{dt} \tilde{\Phi}_t = i\lambda^2 \int_0^\infty |v(k)|^2 \frac{(1 - e^{it(\varepsilon-k)})}{(k - \varepsilon)} dk \tilde{\Phi}_t \quad (0.78)$$

$$= i\lambda^2 \int_0^\infty |v(\varepsilon - t^{-1}y)|^2 \frac{(e^{iy} - 1)}{y} dy \tilde{\Phi}_t \quad (0.79)$$

$$\approx -\pi\lambda^2 |v(\varepsilon)|^2 \tilde{\Phi}_t. \quad (0.80)$$

where we used

$$\int \frac{e^{iy} - 1}{y} dy = i\pi.$$

0.18 Feshbach-Schur formula

Suppose that the space is $\mathcal{V} = \mathcal{V}_S \oplus \mathcal{V}_R$. (S stands for a „small system” and R for a „reservoir”). An operator on \mathcal{V} can be written as

$$H = \begin{bmatrix} H_{SS} & H_{SR} \\ H_{RS} & H_{RR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

We also introduce the imbeddings J_R and J_S of \mathcal{V}_R , resp. \mathcal{V}_S into \mathcal{V} .

Problem. Write H as

$$H = \begin{bmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix}.$$

Solution

$$H = \begin{bmatrix} 1 & bd^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a - bd^{-1}c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d^{-1}c & 1 \end{bmatrix}. \quad (0.81)$$

Problem. Compute $J_S^* H^{-1} J_S$.

Solution Note that $\begin{bmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & \beta^{-1} \end{bmatrix}$ and $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -x & 1 \end{bmatrix}$. Therefore, application of (0.81) yields the inverse of H :

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -d^{-1}c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (a - bd^{-1}c)^{-1} & 0 \\ 0 & d^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -bd^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Now $J_S^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ and $J_S = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Hence

$$J_S^* H^{-1} J_S = (a - bd^{-1}c)^{-1}.$$

Applied to $z - H$ instead of H it is sometimes called the *Feshbach-Schur formula*

$$J_S^* (z - H)^{-1} J_S = (z - H_{SS} - H_{SR}(z - H_{RR})^{-1} H_{RS})^{-1}. \quad (0.82)$$

0.19 Perturbation theory

Assume now that H_0 and V are self-adjoint operators on \mathcal{V} and $H_\lambda := H_0 + \lambda V$. Set $R_\lambda(z) = (z - H_\lambda)^{-1}$.

Let \mathcal{V}_S be the spectral subspace of H_0 onto the eigenvalue E_0 and \mathcal{V}_R its orthogonal complement. We can write the Feshbach-Schur formula as

$$J_S^* R_\lambda(E) J_S = \left(E - E_0 - \lambda V_{SS} - \lambda^2 V_{SR} (z - H_{0RR} - \lambda V_{RR})^{-1} V_{RS} \right)^{-1}. \quad (0.83)$$

Therefore,

$$\{E \in \mathbb{R} : E - E_0 - \lambda V_{\text{SS}} - \lambda^2 V_{\text{SR}}(z - H_{0\text{RR}} - \lambda V_{\text{RR}})^{-1} V_{\text{RS}} \text{ is non-invertible}\} \quad (0.84)$$

is contained in the spectrum of H .

Problem. Assume that $\dim \mathcal{V}_{\text{S}}$ is finite and E_0 is a discrete eigenvalue of H_0 . Find an equation for eigenvalues of H_λ , which for small λ is close to E_0

Solution We can expect that these eigenvalues coincide with (0.84). A finite matrix is non-invertible iff its determinant is zero. Therefore, the condition for these eigenvalues is

$$\det \left(E - E_0 - \lambda V_{\text{SS}} - \lambda^2 V_{\text{SR}}(E - H_{0\text{RR}} - \lambda V_{\text{RR}})^{-1} V_{\text{RS}} \right) = 0. \quad (0.85)$$

Let us remark that we obtain a polynomial in E of degree $\dim \mathcal{V}_{\text{S}}$. In general it has $\dim \mathcal{V}_{\text{S}}$ solutions $\lambda \rightarrow E_j(\lambda)$

%%%%%%%%%

Let $\dim \mathcal{V}_{\text{S}} = 1$, so that $J_{\text{S}} = |\Phi_0\rangle$. Then we expect that close to E_0 there is only one eigenvalue of H_λ . We introduce

$$F_\lambda(E) := E_0 + (\Phi_0|V\Phi_0) + \lambda^2(\Phi_0|V(E - H_{0\text{RR}} - \lambda V_{\text{RR}})^{-1}V\Phi_0).$$

The eigenvalue E_λ is the solution of

$$E_\lambda = F_\lambda(E_\lambda). \quad (0.86)$$

We can try to solve it by iterations:

$$E_\lambda^{(j)} = F_\lambda^j(E_0). \quad (0.87)$$

The first iteration is

$$E_\lambda^{(1)} = F_\lambda(E_0) = E_0 + (\Phi_0|V\Phi_0) + \lambda^2(\Phi_0|V(E_0 - H_{0\text{RR}} - \lambda V_{\text{RR}})^{-1}V\Phi_0) \quad (0.88)$$

$$\simeq E_0 + (\Phi_0|V\Phi_0) + \lambda^2(\Phi_0|V(E_0 - H_0)_{\text{RR}}^{-1}V\Phi_0) + O(\lambda^3). \quad (0.89)$$

This method of finding eigenvalues is called the *Brillouin-Wigner perturbation theory*.

There is an alternative method, called the *Rayleigh-Schrödinger perturbation theory*. Recall that we have $H = H_0 + \lambda V$, $H_0\Psi_0 = E_0\Psi_0$ and E_0 is a nondegenerate eigenvalue.

We make an ansatz

$$\Psi_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \Psi_n, \quad E_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n E_n. \quad (0.90)$$

We assume in addition that

$$(\Psi_0|\Psi_n) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (0.91)$$

We insert (0.90) into

$$(H_0 + \lambda V)\Psi_\lambda = E_\lambda\Psi_\lambda. \quad (0.92)$$

We obtain a formal series in the powers of λ . At λ^n we have

$$H_0\Psi_n + V\Psi_{n-1} = \sum_{j=0}^n E_j\Psi_{n-j}. \quad (0.93)$$

We take the scalar product with Ψ_0 :

$$(\Psi_0|H_0\Psi_n) + (\Psi_0|V\Psi_{n-1}) = \sum_{j=0}^n E_j(\Psi_0|\Psi_{n-j}). \quad (0.94)$$

With help of (0.91) we simplify (0.94) obtaining

$$(\Psi_0|V\Psi_{n-1}) = E_n. \quad (0.95)$$

(0.92) can be rewritten

$$(E_0 - H_0)\Psi_n = V\Psi_{n-1} - \sum_{j=0}^{n-1} E_j\Psi_{n-j}. \quad (0.96)$$

We multiply (0.96) by $P_R := \mathbb{1} - |\Psi_0\rangle\langle\Psi_0|$, which does not affect the lhs. Setting

$$R'_0 := (E_0 - H_0)^{-1}P_R,$$

we obtain

$$\Psi_n = R'_0 \left(V\Psi_{n-1} - \sum_{j=0}^{n-1} E_j\Psi_{n-j} \right). \quad (0.97)$$

Here are the first iterations:

$$E_1 = (\Psi_0|V\Psi_0), \quad (0.98)$$

$$\Psi_1 = R'_0 V\Psi_0, \quad (0.99)$$

$$E_2 = (\Psi_0|V R'_0 V\Psi_0), \quad (0.100)$$

$$\Psi_2 = R'_0 V R'_0 V\Psi_0 - (\Psi_0|V\Psi_0)R'_0 V\Psi_0. \quad (0.101)$$