Raport z wykonania zespołowego projektu studenckiego pt. Reprezentacje grupy $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$

Zespół: Katarzyna Budzik, Mateusz Szczygieł, Paweł Wójcik
Opiekun: Jan Dereziński

Wprowadzenie

W trakcie semetru zimowego 2017/2018, wymieniona wyżej grupa studentów pod opieką profesora Jan Derezińskiego wykonała zespołowy projekt studencki mający na celu poznanie teorii reprezentacji grupy $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, która w wymiarze 1+2 jest grupą Lorentza. Projekt został zwieńczony serią trzech wystąpień, na których każdy ze studentów starał się przybliżyć zdobytą wiedzę słuchaczom seminarium *Ścisłe rezultaty teorii kwantów i grawitacji.* Wśród zaprezentowanego materiału znalazła się oryginalna teoria reprezentacji grupy $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ biorąca za punkt wyjścia konforemną mechanikę kwantową przedstawioną w pracy Krzysztofa Andrzejewskiego [2].

Poniżej znajdują się streszczenia wszystkich wystąpień. Prezentacje przygotowane w plikach pdf zostały dołączone jako załączniki do tego raportu.

Geometria grupy $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ oraz jej uniwersalnego nakrycia

Było to wprowadzenie do geometrii grupy $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ oraz jej uniwersalnego nakrycia. Została zaprezentowana struktura grupy $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ oraz interpretacja elementów tej grupy jako punktów położonych na trójwymiarowej powierzchni zanurzonej w czterech wymiarach. Została omówiona geometria dwu wymiarowej hiperboloidy, jako niskowymiarowego odpowiednika trójwymiarowej hiperboloidy (przestrzeni Anti-de Sittera (AdS)), którą stanowi grupa $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Te przykłady zostały wprowadzone aby dostarczyć intuicji oraz pojęć, które zostały później użyte do opisu geometrii grupy $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ za pomocą geodezyjnych generowanych przez elementy algebry Liego $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. Za pomocą rozkładu KAN wprowadzono uniwersalne nakrycie grupy $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ - grupę $\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$. Wystąpienie zostało zakończone pokazaniem jak przedstawione pojęcia pozwalają opisać geometrię grupy $\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$.

Klasyczne reprezentacje $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$

Ta prezentacja miała na celu zapoznanie słuchaczy z klasycznym podejściem do reprezentacji $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Na wstępie omówiono algebrę Liego $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, która jest kompleksyfikacją algebry $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. Sklasyfikowano nieprzywiedlne reprezentacje algebry Liego $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ na przestrzeni jednomianów $\{w^k : k \in \mathbb{Z}+\eta\}$:

- reprezentacje na całej przestrzeni jednomianów,
- reprezentacje najniższej wagi,
- reprezentacje najwyższej wagi,
- reprezentacje skończenie wymiarowe.

W dalszej części wykładu zaprezentowano sposób scałkowania algebry $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ do reprezentacji grupy $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ oraz uniwersalnego nakrycia $\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$. Znaleziono w ten sposób reprezentacje grupy $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ przez homografie. Zaprezentowano warunki konieczne aby dana reprezentacja była unitarna. Uzyskano następujące serie reprezentacji unitarnych:

- seria główna,
- seria komplementarna,
- seria holomorficzna,
- seria antyholomorficzna.

Wykład zakończył się podsumowaniem poszczególnych serii reprezentacji unitarnych, z zaprezentowaniem odpowiednich iloczynów skalarnych na przestrzeniach reprezentacji.

Unitarne reprezentacje uniwersalnego nakrycia $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$

Tematem ostatniego referatu były reprezentacje uniwersalnego nakrycia $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$:

$$\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R}) = \mathbb{R} \times \mathrm{AN}(2,\mathbb{R}).$$

gdzie $\mathrm{AN}(2,\mathbb{R})$ to grupa macierzy dolnotrójkątnych.

Na początku referatu zostały przedstawione fakty dotyczące operatora Schrödingera z potencjałem $1/x^2$:

$$H_m = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(m^2 - \frac{1}{4}\right)\frac{1}{x^2}$$

na podstawie [3]. H_m razem z następującymi dwoma operatorami na $L^2([0,\infty[)$:

$$\begin{aligned} K &= x^2 \\ A &= -\frac{i}{2}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}x\right) \end{aligned}$$

są generatorami unitarnych reprezentacji $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})$. Reprezentacje najniższej wagi (holomorficzne) są generowane przez:

$$\begin{aligned} A_+ &= \frac{i}{2}H_m \\ A_- &= -\frac{i}{2}K \\ N &= -\frac{i}{2}A. \end{aligned}$$

Reprezentacje najwyższej wagi (antyholomorficzne) są generowane przez:

$$\begin{aligned} A_+ &= -\frac{i}{2}H_m \\ A_- &= \frac{i}{2}K \\ N &= -\frac{i}{2}A. \end{aligned}$$

Natomiast, reprezentacje serii głównej i komplemetarnej można uzyskać za pomocą operatorów na $L^2([0,\infty]) \oplus L^2([0,\infty[)$:

$$H_m \oplus_\gamma (-H_m), \quad A \oplus A, \quad K \oplus (-K),$$

gdzie przez $H_m \oplus_\gamma (-H_m)$ rozumiemy operator podobny do $H_m \oplus (-H_m)$, mający jednak specjalne warunki brzegowe.

Literatura

[1] J. Dereziński, *nieopublikowane notatki.*

[2] K. Andrzejewski, *Quantum conformal mechanics emerging from unitary representations of* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, Annals of Physics, **367**, 227 (2016).

[3] J. Dereziński, S. Richard, *On Schrodinger operators with inverse square potentials on the half-line*, Annales Henri Poincare **18**, 869-928 (2017).

[4] V. Bargmann, *Irreducible unitary representations of the Lorentz group*, Annals of Mathematics, Second Series, **48** 568–640 (1947).

[5] I. M. Gelfand, M. I. Graev, N. Ya. Vilenkin, *Generalized Functions*, Vol. 5, Academic Press (1966).

[6] R. Howe, E. C. Tan, *Non-Abelian Harmonic Analysis, Applications of* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, Springer-Verlag (1992).