$\boxed{\text{PARTICLES \& GRAVITY II}}$ LK 1

Sprzęgnięcie materii do grawitacji

$\mathcal{L}$ ma być niezmienniczy wzgl. ogólnych transf.

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = (dt^2 - d\vec{x}^2)$$
$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu \qquad |\omega| \ll 1$$
} niezmienniczość w STW

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$$
$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x)$ — dow. fu. współrz.

$x \to x'(x)$ — b. ciągłe, nieosobliwe f. x

$$ds^2 = g'_{\lambda\sigma}\, dx'^\lambda dx'^\sigma = \underbrace{g'_{\lambda\sigma} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu}}_{g_{\mu\nu}\ (\text{z def.})} dx^\mu dx^\nu$$

$$g_{\mu\nu}(x) = g'_{\lambda\sigma}(x') \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu}$$ ← def transform. metryki

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta^\mu{}_\rho$$

1) pola skalarne na rozmaitościach:

$\varphi(x) \to \varphi'(x')$ $\qquad \varphi'(x') = \varphi(x)$ $\qquad (x \to x')$ $\qquad P(x) = P(x')$ $\qquad \cdot P$

$$\partial_\mu \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu} \frac{\partial \varphi'(x')}{\partial x'^\lambda} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu} \partial'_\lambda \varphi'(x')$$ → wekt. kowariantny

$g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu$ = inv $\qquad$ ($A_\mu A_\nu$ - transf. się jak $g_{\mu\nu}$; $g^{\mu\nu}$ transf. się odwrotnie do $g_{\mu\nu}$)

$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu$ — w. kontrawariantny (indeks światowy) - transf. się jak dx^μ $\quad dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\sigma} dx'^\sigma$

$A^\mu B_\mu$ = inv = $A'^\mu = B'_\mu$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial^\mu \varphi\, \partial^\nu \varphi\, \eta_{\mu\nu} - m^2 \varphi^2\right)$$ - niezmiennik tr. Lorentza

$$S = \int d^4x\, \frac{1}{2}\left(\partial^\mu \varphi\, \partial^\nu \varphi\, \eta_{\mu\nu} - m^2\varphi^2\right)$$ — —"— ($J = 1$ przy $d^4x' \to d^4x$)

$$\partial^\mu \varphi\, \partial^\nu \varphi\, \eta_{\mu\nu} \to \partial'^\mu \varphi'(x')\, \partial'^\nu \varphi'(x')\, g'_{\mu\nu} = \partial^\mu \varphi\, \partial^\nu \varphi\, g_{\mu\nu}$$
$$\varphi^2 \to \varphi'^2 = \varphi'^2$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial^\mu \varphi\, \partial^\nu \varphi\, g_{\mu\nu} - m^2\varphi^2\right)$$ - niezmienniczy $\mathcal{L}$ wzgl. transf. współrz.

2) niezmiennicza miara $\quad d^4x\sqrt{-g}$

$$d^4x' = d^4x\, \underbrace{\det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)}_{J}$$

$$\det(g_{\mu\nu}) = \det\left(g'_{\lambda\sigma} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu}\right) = \det g'_{\lambda\sigma}\, \det \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu}\, \det \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} = \det g'_{\lambda\sigma}\, J^2$$

$$g = g' \cancel{J^2}$$

$$d^4x' \sqrt{-g} \longrightarrow d^4x\, J \sqrt{-g} \frac{1}{\sqrt{J^2}} = d^4x \sqrt{-g}$$

3) niezmiennicze działanie dla pola skalarnego:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial^\mu\varphi\,\partial^\nu\varphi\, g_{\mu\nu} - m^2\varphi^2\right)$$

$$S = \int d^4x \sqrt{-g}\, \mathcal{L}$$

4) pola wektorowe

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x')$$

$$d \longrightarrow DA^\mu = dA^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho} A^\nu dx^\rho$$

$$D_\rho A^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\rho} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} A^\nu = D^\mu{}_{;\rho}$$

$$DA_i = g_{ik} DA^k \qquad D(A_i) = D(g_{ik}A^k) = (Dg_{ik})A^k + g_{ik}(DA^k) = g_{ik}(DA^k)$$

$$\Rightarrow \boxed{Dg_{ik} = 0}$$

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\lambda}\left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\right)$$

niezmiennicze działanie

$$\mathcal{L} = \cancel{\int d^4x} \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\lambda\rho}\,\eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\rho} - \frac{1}{2}m^2 A^\mu A^\nu \eta_{\mu\nu}\right)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \longrightarrow F_{\mu\nu} = D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$S = \int d^4x \sqrt{-g}\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\lambda\rho}\, g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho} - \frac{1}{2}m^2 A^\mu A^\nu g_{\mu\nu}\right)$$

5) pole fermionowe

indeksy styczne, ∂_α działa na ξ, a ma działać na w.p.

$$S = \int d^4x\, \psi^+\gamma^0(i\gamma^\alpha\partial_\alpha - m)\psi$$ – niezmienn. dział. w $\eta_{\mu\nu}$

z zas. równoważn. => w każdym pkt czasoprzestrzeni istnieje ukł lokalnie inercjalny

$$g_{\mu\nu}(x)\, dx^\mu dx^\nu = \eta_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha d\xi^\beta \qquad \{\alpha;\beta\} \text{ – indeksy styczne}$$

$$\xi'^\gamma = \Lambda^\gamma{}_\alpha \xi^\alpha \qquad \eta'_{\gamma\delta} = \eta_{\gamma\delta}$$

na indeksy styczne możemy działać tr. $\Lambda^\alpha{}_\beta$

na rozmaitości $\Lambda^\alpha{}_\beta(x)$

S musi być niezm. wzgl transf współrzędnych + lokalnych tr. Lore

wprowadzamy wielonogi – tłumaczy indeksy styczne na świat

$$g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu = \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}dx^\mu dx^\nu$$

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu} = \eta_{\alpha\beta}V^\alpha{}_\mu V^\beta{}_\nu$$

$\parallel$

$e^\alpha{}_\mu = V^\alpha{}_\mu$ – vielbeins (wielonożki)

z pkt widzenia tr. Lorentza indeksy $\mu\nu$ nic nie znaczą, α, β transf się jak wektor

z pkt widzenia ogólnych tr. reparametryzacji ind $\alpha\beta$ nic nie znaczą, $\mu\nu$ transf się jak wektor

$$\partial_\alpha \longrightarrow V_\alpha{}^\mu \partial_\mu \qquad V_\alpha{}^\mu = \frac{\partial\xi_\alpha}{\partial x_\mu} \Rightarrow g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\alpha\beta}V^\alpha_\mu$$

$$\Rightarrow \boxed{S_D = \int d^4x\, \Psi^+\gamma^0(i\gamma^\alpha V_\alpha{}^\mu\partial_\mu - m)\Psi\sqrt{-g}}$$

$\gamma^\mu \to$ nic nie ma fiz znaczenia

γ^0 – indeks styczny, bo inaczej zaburzamy tr. Lorentza

$\Psi_m \xrightarrow{\Lambda} S(\Lambda(x))_{mn}\Psi_n$ – transf $S(\Lambda)$ są lokalne!

$\partial_\mu\Psi \longrightarrow \partial_\mu(S(x)\cdot\Psi) = (\partial_\mu S(x))\Psi + S(x)\partial_\mu\Psi$ – nie jest niezmien. wzgl lokalnych

wprowadzamy pochodne kowariantną wzgl lokalnych tran-f Lorentza

$\partial_\mu \longrightarrow \partial_\mu + \Gamma_\mu \qquad \Gamma_\mu$ – koneksja spinowa

(a) $A_{k;i} - A_{i;k} = \partial_k A_i - \partial_i A_k - (\Gamma^m_{ik} - \Gamma^m_{ki})A_m$

$A_i = \partial_i\varphi \Rightarrow A_{k;i} - A_{i;k} = 0$

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\gamma}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0$$

$\Gamma^\mu_{\nu\gamma} - \Gamma^\mu_{\gamma\nu} = S^\mu_{\nu\gamma}$ $\leftarrow$ torsja / tensor skręcenia ($= 0$ $\forall$ ukł współrzędnych)

(b) $V'^\alpha{}_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}V^\alpha_\nu$

$V^\alpha{}_\mu \to V'^\alpha_\mu = \Lambda^\alpha{}_\beta V^\beta_\mu$ $\longrightarrow$ nie zmienia metryki ($\eta_{\alpha\beta}\Lambda^\alpha{}_\gamma\Lambda^\beta{}_\delta = \eta_{\gamma\delta}$)

$A^\mu V^\alpha_\mu = A^\alpha$ wektor światowy $\Leftrightarrow$ wekt. styczny
$V^\alpha_\mu A_\alpha = A_\mu$

$V^\mu_\alpha\partial_\mu = \partial_\alpha \qquad (\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\beta{}_\mu = \delta_\alpha{}^\beta \Rightarrow V^\mu_\alpha V^\alpha_\nu = \delta^\mu{}_\nu)$

To musi być niezmiennicze wzgl. lok. tr. Lorentza, bo wszystkie γ^α, $\gamma^{\alpha'}$ równoważne.

$$\partial_\mu \psi \to S\partial_\mu \psi + (\partial_\mu S)\psi$$

$$\partial_\mu \to \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu$$

Γ_μ – tr. się jak wektor wzgl. lok. tr. Lorentza
– koneksja spinowa

$$\psi_m \to S_{mn}(x)\psi_n$$

$$\mathcal{D}_\mu \psi_m \to S_{mn}(x)\mathcal{D}_m \psi_m(x)$$

w ogólności może się zmieniać

$$V_\alpha{}^\mu(\partial_\mu + \Gamma_\mu)\psi \xrightarrow{\Lambda(x)} \Lambda_\alpha{}^\beta V_\beta{}^\mu\left((\partial_\mu S(\Lambda))\psi + S(\Lambda)\partial_\mu\psi\right) + \Lambda_\alpha{}^\beta V_\beta{}^\mu \Gamma'_\mu S(\Lambda)\psi =$$

$$= \Lambda_\alpha{}^\beta V_\beta{}^\mu S(\Lambda)(\partial_\mu + \Gamma_\mu)\psi$$

$$(*) \Rightarrow \Gamma'_\mu = S\Gamma_\mu S^{-1} - (\partial_\mu S)S^{-1}$$

$$\left.\begin{aligned} S &= 1 + \tfrac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\Sigma^{\alpha\beta} \\ \Lambda^\alpha{}_\beta &= \delta^\alpha{}_\beta + \omega^\alpha{}_\beta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Sigma^{\alpha\beta} = \frac{1}{4}[\gamma^\alpha \gamma^\beta]$$

$$-[\Sigma_{\alpha\beta}, \Sigma_{\gamma\delta}] = \eta_{\gamma\beta}\Sigma_{\alpha\delta} - \eta_{\delta\alpha}\Sigma_{\beta\delta} - \Sigma_{\gamma\alpha}\eta_{\delta\beta} -$$

$$(*) \Rightarrow (1 + \tfrac{1}{2}\omega\Sigma)\Gamma_\mu(1 - \tfrac{1}{2}\omega\Sigma) - \tfrac{1}{2}\partial_\mu\omega\Sigma(1 - \tfrac{1}{2}\omega\Sigma) =$$

$$\Gamma_\mu + \tfrac{1}{2}\omega\Sigma\Gamma_\mu - \tfrac{1}{2}\omega\Gamma_\mu\Sigma - \tfrac{1}{2}\partial_\mu\omega\Sigma = \Gamma_\mu - \tfrac{1}{2}\Sigma\partial_\mu\omega + \tfrac{1}{2}\omega[\Sigma\ \Gamma_\mu] = \Gamma$$

$$V^\alpha{}_\nu \xrightarrow{\Lambda(x)} V^\alpha{}_\nu + \omega^\alpha{}_\beta V^\beta{}_\nu$$

$$\Sigma^{\alpha\beta} V_\beta{}^\nu(x)\frac{\partial}{\partial x^\mu} V_{\alpha\nu}(x) \to \left\{V_\beta{}^\nu \partial_\mu V_{\alpha\nu} + V_\beta{}^\nu \partial_\mu(\omega_{\alpha\gamma}V^\gamma{}_\nu) + \omega_\beta{}^\delta V_\delta{}^\nu \partial_\mu V_{\alpha\nu}\right\}\Sigma$$

$$\partial_\mu\omega_{\alpha\beta}\Sigma^{\alpha\beta} + V_\beta{}^\nu(\partial_\mu V^\gamma{}_\nu)\Sigma^{\alpha\beta}\omega_{\alpha\gamma} + \omega_\beta{}^\delta V_\delta{}^\nu\partial_\mu V_{\alpha\nu}\Sigma^{\alpha\beta}$$

nie kowariantna

$$\tilde{\Gamma}_\mu = \frac{1}{2}V_\beta{}^\nu \partial_\mu V_{\alpha\nu}\Sigma^{\beta\alpha}$$ – prawie, to co ma być

$\downarrow$

D_μ (kowariantna pochodna wektor)

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{2}V_\beta{}^\nu D_\mu V_{\alpha\nu}\Sigma^{\beta\alpha} = \frac{1}{2}\Sigma^{\alpha\beta}V_\alpha{}^\nu V_{\beta\nu;\mu}$$

$$\Gamma_\mu \to \Gamma_\mu + \frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}[\Sigma_{\alpha\beta}, \Gamma_\mu] - \frac{1}{2}\Sigma_{\alpha\beta}\partial_\mu\omega^{\alpha\beta}$$

$$\frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}\left[\Sigma_{\alpha\beta}, \frac{1}{2}\Sigma^{\gamma\delta}V_\gamma{}^\nu V_{\delta\nu;\mu}\right] = \frac{1}{4}\omega^{\alpha\beta}(\eta_{\gamma\beta}\Sigma_{\alpha\delta} + \eta_{\delta\alpha}\Sigma_{\beta\delta} - \eta_{\delta\beta}\Sigma_{\gamma\alpha} + \eta_{\delta\alpha}\Sigma_{\gamma\beta})V^{\gamma\nu}V^\delta{}_{\nu;}$$

$$= \frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}\Sigma_{\alpha\delta}(V_\beta{}^\nu V^\delta{}_{\nu;\mu} + V^{\delta\nu}V_{\beta\nu;\mu})$$

$$\omega^{\alpha\beta}\frac{1}{4}\left[\Sigma_{\alpha\delta}V_\beta{}^\nu V^\delta{}_{\nu;\mu} + \Sigma_{\beta\delta}V_\alpha{}^\nu V^\delta{}_{\nu;\mu} + \Sigma_{\delta\alpha}V^{\delta\nu}V_{\beta\nu;\mu} - \Sigma_{\delta\beta}V^{\delta\nu}V_{\alpha\nu;\mu}\right] =$$

$$\frac{1}{4}\omega^{\alpha\beta}\Sigma_{\alpha\delta}\left[V_\beta{}^\nu V^\delta{}_{\nu;\mu} + V_\beta{}^\nu V^\delta{}_{\nu;\mu} + V^{\delta\nu}V_{\beta\nu;\mu} - V^{\delta\nu}V_{\beta\nu;\mu}\right]$$

pochodna kowariantna zwykła.

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{2}\Sigma^{\alpha\beta} V_\alpha{}^\nu V_{\beta\nu;\mu} = \frac{1}{2}\Sigma^{\alpha\beta} V_\alpha{}^\nu \nabla_\mu V_{\beta\nu}$$

$$V^\beta{}_\nu \to \Lambda^{\beta}{}_\gamma(x) V^\gamma{}_\nu(x) = V^\beta{}_\gamma(x) + \omega_{\beta\gamma}(x) V^\gamma{}_\nu(x)$$

$$\delta\Gamma_\mu = \frac{1}{2}\Sigma^{\alpha\beta}\omega_\alpha{}^\gamma V_\gamma{}^\nu \partial_\mu V_{\beta\nu} + \frac{1}{2}\Sigma^{\alpha\beta}\omega_\beta{}^\gamma V_\gamma{}^\nu \partial_\mu V_{\gamma\nu} - \frac{1}{2}\Sigma^{\alpha\beta}\partial_\mu\omega_{\alpha\beta} +$$
$$-\frac{1}{2}\Sigma^{\alpha\beta}\omega_\alpha{}^\gamma V_\gamma{}^\nu \Gamma^\varkappa_{\mu\nu} V_{\beta\varkappa} - \frac{1}{2}\Sigma^{\alpha\beta} V_\alpha{}^\nu \Gamma^\varkappa_{\mu\nu}\omega_\beta{}^\gamma V_{\gamma\varkappa}$$

(terms labelled ①, ③, ⓪ in the first line; ②, ④ in the second)

$$\nabla_\nu V^\delta_\mu = V^\delta_{\mu;\nu} = \partial_\nu V^\delta_\mu - \Gamma^\varrho_{\mu\nu} V^\delta_\varrho$$

$$\frac{1}{2}\omega[\Sigma\,\Gamma_\mu] \Rightarrow \frac{\omega^{\alpha\beta}}{2}\Sigma_{\alpha\delta}\big(\underbrace{V_\beta{}^\nu V^\delta{}_{\nu;\mu}}_{①+②} - \underbrace{V^{\delta\nu} V_{\beta\nu;\mu}}_{③+④}\big)$$

$$①+② = \frac{1}{2}\Sigma_{\alpha\beta}\,\omega^{\alpha\gamma} V_\gamma{}^\nu \partial_\mu V^\beta{}_\nu - \frac{1}{2}(\dots) = \frac{1}{2}\Sigma_{\alpha\delta}\,\omega^{\alpha\beta} V_\beta{}^\nu \partial_\mu V^\delta{}_\nu + (\overset{②}{\dots})$$

$$② = -\frac{1}{2}\Sigma_{\alpha\delta}\,\omega^{\alpha\beta} V_\beta{}^\nu \Gamma^\varkappa_{\mu\nu} V^\delta{}_\varkappa$$

$$①+② = \frac{\omega^{\alpha\beta}}{2}\Sigma_{\alpha\delta}\left(V_\beta{}^\nu \partial_\mu V^\delta{}_\nu - V_\beta{}^\nu \Gamma^\varkappa_{\mu\nu} V^\delta{}_\varkappa\right) = \frac{\omega^{\alpha\beta}}{2}\Sigma_{\alpha\delta} V_\beta{}^\nu V^\delta{}_{\nu;\mu}$$

$$③ = -\frac{1}{2}\Sigma_{\alpha\delta}\,\omega^{\alpha\beta} V^{\delta\nu}\partial_\mu V_{\beta\nu}$$

$$④ = \frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}\Sigma_{\alpha\delta} V^{\delta\nu}\Gamma^\varkappa_{\mu\nu} V_{\beta\varkappa}$$

(c) Ostateczna wersja r. Diraca:

$$\{\gamma^\alpha\} \to (i\gamma^\alpha\partial_\alpha - m)\Psi(x) = 0$$

$$\partial_\alpha = V_\alpha{}^\mu(\partial_\mu + \Gamma_\mu)$$

$$\boxed{(i\gamma^\alpha V_\alpha{}^\mu(\partial_\mu + \Gamma_\mu) - m)\Psi(x) = 0}$$

6) <u>Równanie Schwingera (cząstka o spinie 3/2)</u>

lorentzowski

płaskie $\Rightarrow (\not p - m)\Psi_\alpha = 0$ $\quad\alpha$ - indeks wektorowy

$\gamma^\alpha\Psi_\alpha = 0 \quad\to$ wyrzuca zbędne st. swobody

krzywolin. $\Rightarrow (i\gamma^\beta V_\beta{}^\mu(\partial_\mu - \Gamma_\mu) - m)\Psi_{\underset{\hookrightarrow\nu}{\alpha}} = 0$ $\quad$ ta pochodna jest kowariant

$$(i\gamma^\beta V_\beta{}^\mu(\partial_\mu - \Gamma_\mu) - m)\Psi_\nu - i\gamma^\beta V_\beta{}^\mu\Gamma^\varkappa_{\mu\nu}\Psi_\varkappa = 0$$

$$\gamma^\mu\Psi_\mu = 0$$

opisuje dynamikę grawitina np.

KWANTOWANIE W KRZYWEJ CZASOPRZESTRZENI

1) Pole skalarne

$$S_{skal} = \int \sqrt{-g}\, d^4x \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2} m^2\phi^2\right] + \left(\xi R \phi^2\right)$$

$$S = S_{skal} + S_G$$

$\xi = 0$ → minim. sprzężenie p. skal z graw.
$R^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}$ → pochodne wyższe niż 2, nie uwzgl.

EL: $$g^{\mu\nu}\phi_{,\mu\nu} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\left(g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\right)_{,\mu}\phi_{,\nu} + m^2\phi = 0$$

ograniczamy się do metryk jednor. i izotropowych

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\, d\vec{x}^2$$

Zał: dla danego t geom. ~~czaso~~przestrzeni jest płaska (Robertson
opisuje dobrze skale $> 8\,\mathrm{Mpc}$
przestrzeń RW nie sp nawet asymptot. płasko → nie ma zas.

(*)
$$ds^2 = a^2(\eta)\left(d\eta^2 - d\vec{x}^2\right)$$ ← wszechświat konforemny

$$a(\eta)\, d\eta = dt \quad \Rightarrow \quad d\eta = \frac{dt}{a(\eta(t))}$$

$$\eta(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{dt'}{a(t')}$$ – czas konforemny

masa zal od czasu!!!

(a) $$\phi'' + \frac{2a'}{a}\phi' - \Delta\phi + m^2 a^2(\eta)\phi = 0$$ – r. ruchu we wsp. konf.

pochodna po η; $\Delta = \partial x \partial x$

(b) $$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} - \frac{\Delta}{a^2}\phi + m^2\phi = 0$$ – r. ruchu w comoving

pochodna po t zwykłym; tarcie kosmiczne; dla a rosnącego w czasie zaniedbywalne

$$\phi = \frac{\chi}{a}$$ – definicja χ

(c) $$\chi'' - \Delta\chi + \underbrace{\left(m^2 a^2 - \frac{a''}{a}\right)}_{m_{eff}^2}\chi = 0$$ – oscyl. harm. z $m(\eta)$

$$S = \frac{1}{2}\int d^3x\, d\eta \left[\chi'^2 - (\partial\chi)^2 - m_{eff}^2(\eta)\chi^2\right]$$

$m(\eta)$ – układ nieautonomiczny
dodawana lub ujmowana en., niekontrolowane
en. i masa niezachowana, mogą pojawiać pojedyncze

(d) transf. Fouriera dla χ wzgl. x:

$$\chi(\vec{x}\,\eta) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\, \chi_{\vec{k}}(\eta)\, e^{i\vec{k}\vec{x}}$$

$$\chi_{\vec{k}}'' + \underbrace{\left(|\vec{k}|^2 + m^2 a^2(\eta) - \frac{a''}{a}\right)}_{\omega^2_{|\vec{k}|}(\eta)} \chi_{\vec{k}} = 0 \quad (c)$$

$|\vec{k}|$ ← bo izotrop. i jednor.

$$\chi_{\vec{k}}'' + \omega_k^2(\eta)\chi_{\vec{k}} = 0$$

$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

$y_1 \quad y_2$ – dwa rozw. liniowo niezal.

$W = \begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0$ jeśli lin. niezal.

$W' = -p(x)W \quad \Rightarrow \quad W(x) = W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} p(x')dx'}$ – ewolucja czasowa

$p(x) = 0 \quad \to \quad W(x) = W(x_0) = \text{const}$ – można użyć $W(x)$ do normowania

$\left.\begin{array}{l} y_1 + iy_2 = v \\ y_1 - iy_2 = v^* \end{array}\right\}$ dwa rozw. zespolone niezależne

$W[v\, v^*] = -2i\, W[y_1\, y_2] \neq 0$

$\frac{1}{2i} W[v\, v^*] = 1 \quad \to$ normalizacja $v\ v^*$, stała w czasie

$v,\ v^*$ – mody ~ jednocząstk. f. falowe w pł. czasoprzestrz.

$\Updownarrow$

$$\boxed{\operatorname{Im}(\dot{v} v^*) = 1} = \frac{\dot{v}v^* - \dot{v}^* v}{2i} = \frac{W[v\,v^*]}{2i}$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta} W[v v^*] = 0 \iff \chi'' + \overset{0}{\overset{\parallel}{p(\eta)}}\chi' + q(\eta)\chi = 0$$

$v_k(\eta)$ spełniające war. normaliz. → mody

$$\chi_{\vec{k}}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_{\vec{k}} v_k^*(\eta) + a_{\vec{k}}^+ v_k(\eta)\right)$$

$\chi(\vec{x}\,\eta)$ – rzeczywiste (hermitowskie) $\iff \chi_{\vec{k}}^* = \chi_{-\vec{k}} \Rightarrow a_{\vec{k}}^+ = a_{\vec{k}}^*$

$$\chi(\vec{x}\,\eta) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_{\vec{k}} v_k^* + a_{-\vec{k}}^+ v_k\right) e^{i\vec{k}\vec{x}} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_{\vec{k}} v_k e^{i\vec{k}\vec{x}} + a_{\vec{k}}^+ v_{\vec{k}} e^{-\dots}\right.$$

bo wektor bo całka po całej przestrz.

bo zal. tylko od $|\vec{k}|$. pa... r-nie χ

$$a_{\vec{k}} = \sqrt{2}\, \frac{v_k' \chi_{\vec{k}} - v_k \chi_{\vec{k}}'}{v_k' v_k^* - v_k v_k^{*\prime}} = \sqrt{2}\, \frac{W[v_k\ \chi_{\vec{k}}]}{W[v_k\ v_k^*]}$$

$a_{\vec{k}}$ ↑ nie zal. od czasu

⇒ analog. do kwant. kanon. w płaskiej żądamy żeby

$$[\chi(x\eta)\ \pi_\chi(y\,\eta')] = i\,\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$$

gdzie $\pi_\chi = \frac{\delta L}{\delta \chi'} = \chi'$

$$H(\eta) = \frac{1}{2}\int d^3x \left(\chi'^2 + (\partial\chi)^2 + m^2_{eff}(\eta)\chi^2\right)$$

jeśli czynniki mali nie zal od czasu $\rightarrow$ fali w Minkowskim jest xxe

$[a_{\vec{k}}\ a^+_{\vec{k}'}] = \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}')$ $\quad$ (z $[\chi\ \pi] = \delta$ i normal wronskjanem)

(e) przestrzeń Hilberta

$a_{\vec{k}}|0\rangle = 0$ $\quad$ elef. próżni

$|0_v\rangle$ zależy od wyboru modów v. w Mink.: wszystkie próżnie rów

$$|n_{\vec{k}_1}, n_{\vec{k}_2}, \dots\rangle = \frac{(a^+_{\vec{k}_1})^{n_{k_1}}(a^+_{\vec{k}_2})^{n_{k_2}}\dots}{\sqrt{n_{k_1}!\, n_{k_2}!\dots}}|0\rangle$$ stany wielocząstkowe

(f) $v^*_k(\eta) = \alpha_k u^*_k(\eta) + \beta_k u_k(\eta)$ $\quad$ $\alpha_k, \beta_k \neq 0 \in \mathbb{C}$ wsp. Bogoliu.

$\mathrm{Im}(v_k\, v^*_k) = 1 = \mathrm{Im}(u_k\, u^*_k) \Rightarrow |\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2 = 1$, $|\alpha_k|^2 \geq 1$

$$\begin{cases} b_{\vec{k}} = \alpha_k a_{\vec{k}} + \beta^*_k a^+_{-\vec{k}} \\ b^+_{\vec{k}} = \alpha^*_k a^+_{\vec{k}} + \beta_k a_{-\vec{k}} \end{cases}$$

$b_{\vec{k}}|0_v\rangle \neq 0$
$b_{\vec{k}}|0_u\rangle = 0$ $\quad$ $|0_v\rangle \neq |0_u\rangle$

$$\boxed{|0_u\rangle = \prod_{\vec{k}} \frac{1}{|\alpha_k|^{1/2}} e^{-\frac{\beta^*_k}{2\alpha_k} a^+_{\vec{k}} a^+_{-\vec{k}}}|0_v\rangle}$$

$b_{\vec{k}}|0_u\rangle = 0$

$$\begin{cases} v^*_k(\eta_0) = \alpha_k u^*_k(\eta_0) + \beta_k u_k(\eta_0) \\ v_k(\eta_0) = \dots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_k = \frac{1}{2i} W[u_k\, v^*_k]|_{\eta_0} \overset{\text{const}}{=} \frac{1}{2i} W[u_k\, v^*_k] \\ \beta_k = \frac{1}{2i} W[u^*_k\, v_k]|_{\eta_0} = \frac{1}{2i} W[u^*_k\, v_k] \end{cases}$$

a^+_k, b^+_k $\rightarrow$ kreują różne cząstki

Ile jest nowych cząstek o pędzie $\vec{k}$ w starej próżni?

$$\langle 0_v| b^+_{\vec{k}} b_{\vec{k}} |0_v\rangle = \langle 0_v|(\alpha^*_k a^+_{\vec{k}} + \beta_k a_{-\vec{k}})(\alpha_k a_{\vec{k}} + \beta^*_k a^+_{-\vec{k}})|0_v\rangle = |\beta_k|^2 \delta^{(3)}(0$$

$$\left\{\begin{array}{l} \delta(\vec{k}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\vec{x}} \\ \hookrightarrow_{\vec{x}\to 0} \quad \delta(0) = \frac{V}{(2\pi)^3} \end{array}\right\} \Rightarrow \langle 0_v| b^+_{\vec{k}} b_{\vec{k}} |0_v\rangle = |\beta_k|^2 \frac{V}{(2\pi)^3}$$

gęst. nowych cząstek w starej próżni

! $a_{\vec{k}}(v_k(\eta)e^{i\vec{k}\vec{x}}) \rightarrow$ sf własny

$p_{ph} = \frac{p_{co}}{a(\eta)}$ $\rightarrow$ pęd mierzony

(9) Wybory próżni lepsze i gorsze

i) mody związane z czasem własnym obserwatora
ii) "chwilowa próżnia"

$\langle 0_\sigma | H(\eta_0) | 0_\sigma \rangle = \mathcal{E}(\sigma)$ → chwilowa energia zmienia się od wyboru modów

$\mathcal{E}(\bar{\sigma}) = \mathcal{E}_{min}$ => $\bar{\sigma}_k$ definiuje chwilowe próżnię.

$\eta_0 + d\eta$ $\bar{\sigma}$ już nie minimal
daje domieszkę innych modów

$$H(\eta) = \frac{1}{4}\int d^3k \left\{ a_{\vec{k}} a_{-\vec{k}} F^*_{\vec{k}} + a^+_{\vec{k}} a^+_{-\vec{k}} F_{\vec{k}} + \left(2a^+_{\vec{k}} a_{\vec{k}} + \delta^{(3)}(0)\right) E_{\vec{k}} \right\}$$

gdzie $E_{\vec{k}} = |\sigma_k'|^2 + \omega_k^2(\eta)|\sigma_k|^2 = E_k$

$F_{\vec{k}} = \sigma_k'^2 + \omega_k^2(\eta)\,\sigma_k^2 = F_k$

? $\langle 0_\sigma | H(\eta_0) | 0_\sigma \rangle = \frac{1}{4}\delta^{(3)}(0)\left(\int d^3k\, E_{\vec{k}}\right)\Big|_{\eta=\eta_0} = \frac{V}{32\pi^3}\left(\int d^3k\, E_{\vec{k}}\right)\Big|_{\eta=\eta_0}$

$\langle \, | \, \rangle_{min}$ → minimal. $E_{\vec{k}}$ dla każdego $\vec{k}$ osobno
(nie mieszaje nie mody w całce)

niech $\sigma_{\vec{k}}(\eta_0) = q \in \mathbb{C}$
$\sigma'_{\vec{k}}(\eta_0) = p \in \mathbb{C}$

$E_{\vec{k}} = |p|^2 + \omega_k^2(\eta_0)|q|^2$ – niezmiennicze wzgl. zmiany fazy =
$q \in \mathbb{R}$ $\quad p = p_1 + ip_2 \quad p_1, p_2 \in \mathbb{R}$

$W[\sigma_k \sigma_k^*] = 2i = \begin{vmatrix} \sigma_k & \sigma_k^{*\prime} \\ \sigma_k & \sigma_k^* \end{vmatrix} = \sigma_k \sigma_k^{*\prime} - \sigma_k^{*}\sigma_k' = 2i$
$\hookrightarrow pq - p^*q = (p - p^*)q = 2i$
$2ip_2 q = 2i \Rightarrow \boxed{p_2 q = 1}$

$E_{\vec{k}} = p_1^2 + p_2^2 + \omega_k^2 \frac{1}{p_2^2}$

$\frac{\partial E_{\vec{k}}}{\partial p_1} = 2p_1 \overset{?}{=} 0 \Rightarrow p_1 = 0$

$\frac{\partial E_{\vec{k}}}{\partial p_2} = 2p_2 - \frac{2\omega_k^2}{p_2^3} \overset{?}{=} 0 \rightarrow p_2 = \sqrt{\omega_k(\eta_0)}$

$\omega_k < 0$ załamuje się interpret. jednocząstkowa

mody minimal E_k: $p_1 = 0 \quad p_2 = \sqrt{\omega_k(\eta_0)} \quad q = \frac{1}{\sqrt{\omega_k(\eta_0)}}$

$$\boxed{\begin{aligned} E_k &= 2\omega_k(\eta_0) = E_{kmin} \\ F_k &= 0 \end{aligned}}$$

diagonalizuje hamilt!

- chwilowa próżnia w $\eta_0 + \delta\eta$

$\forall_{\eta \geq \eta_0} F_k = 0 \Rightarrow$ chwil. próżnia cały czas ta sama

$F_k = \sigma_k'^2 + \omega_k^2(\eta)\sigma_k^2 = 0 \Rightarrow \sigma_k(\eta) = C\exp \pm i\int_{\eta_0}^{\eta} \omega_k(\eta')\,d\eta'$

$\sigma_k'' + \omega_k^2(\eta)\sigma_k \neq 0$ => chwilowa próżnia zmienia się

• kinematyczna produkcja cząstek

$\{\eta_1, v_k\}$ $\{\eta_2, \alpha_k\}$ $v_k = \alpha_k^* u_k + \beta_k^* u_k^*$

$$\langle 0_{\eta_1} | H(\eta_2) | 0_{\eta_1} \rangle = \delta^{(3)}(0) \int d^3k\, \omega_k(\eta_2) \cdot \left[\frac{1}{2} + |\beta_k|^2 \right] = E_{\eta_1} + \Delta E_{\eta_2}$$

en. nowej próżni > en. starej próżni
kinematyczna ewolucja tła → produkcja cząstek
nawet dla $(\eta_1-\eta_2)/\eta_1$ produkcja cz

• kiedy $\omega_k < 0$?

$$\omega_k^2 = k^2 + m_{eff}^2 = k^2 + m^2 a^2 - \frac{a''(\eta)}{a(\eta)}$$

$$\omega^2_{k>k_{cr}} > 0$$

$$k_{cr}^2 = -m_{eff}^2 = \frac{a''}{a} - m^2 a^2$$

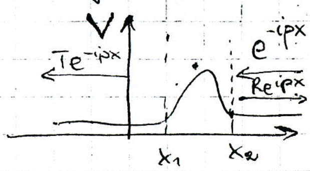
$k \gg 1$ $\lambda \ll 1$ → nie b. mający od wszechświat płaski (prawie)

$\Rightarrow$ $v_k = \frac{1}{\sqrt{k}} e^{ik\eta}$ dla $k > k_{cr}$

(a) $\langle \eta_1, \eta_2 \rangle$ cała metryka ewol. między w tym czasie

$\omega_k = const$ dla $\eta < \eta_1$ i $\eta > \eta_2$
$\eta < \eta_1$ $a'' = 0$ $|0\ in\rangle$ $\eta \to -\infty$
$\eta > \eta_2$ $(k > k_{cr})$ $a'' = 0$ $|0\ out\rangle$ $\eta \to \infty$
} płaskie

(b)



$v_k'' + \omega_k^2(\eta) v_k = 0$ $\eta \to x$

$\frac{d^2\psi}{dt^2} + [E - V(x)]\psi = 0$ $\omega_k^2 \to E - V$, $v_k \to \psi$

e^{-ipx} — $|0_{\eta_1}\rangle$
$e^{-ipx} + Re^{ipx}$ → $|0_{\eta_1}$ + domieszki$\rangle$
$|R|^2 \to |\beta_k|^2$

iii) <u>próżnia adiabatyczna</u>

ω_k zmienia się powoli z czasem

$v_k'' + \omega_k^2 v_k = 0$ $T_k = \frac{2\pi}{\omega_k}$ $\left| \frac{\omega_k(\eta + T_k) - \omega_k(\eta)}{\omega_k(\eta)} \right| \ll 1$

$$\left| \frac{\omega_k(\eta) + \omega_k'(\eta) T_k(\eta) - \omega_k(\eta)}{\omega_k(\eta)} \right| \ll 1 \Rightarrow \underbrace{\left| \frac{\omega_k'}{\omega_k^2} \right|}_{\varepsilon} \ll \frac{1}{2\pi} \ll 1$$

$$\boxed{v_k^{(a)}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{\omega_k(\eta)}} \exp i \int_{\eta_0}^{\eta} \omega_k(\eta')\, d\eta'}$$

rozw. WKB
rozw. przybliżone

$$v_k^{\prime(a)} = v_k^{(a)}\left(i\omega_k - \frac{1}{2}\frac{\omega_k'}{\omega_k^2}\right)$$

$$v_k^{\prime\prime(a)} = \omega_k^2 v_k^{(a)}\left[\frac{3}{4}\left(\frac{\omega_k'}{\omega_k^2}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\omega_k''}{\omega_k^3} - \frac{1}{2}\frac{\omega_k'}{\omega_k^2} + \frac{i}{2}\frac{\omega_k'}{\omega_k^2} - 1\right]$$

$$\frac{1}{\omega_k}\left(\frac{\omega_k'}{\omega_k^2}\right)' = \underbrace{\frac{\omega_k''}{\omega_k^3}}_{\frac{\varepsilon'}{\omega_k}+2\varepsilon^2} - 2\underbrace{\frac{\omega_k'^2}{\omega_k^4}}_{\varepsilon^2} = \frac{1}{\omega_k}\varepsilon'$$

$$v_k^{\prime(a)} = v_k^{(a)}\left(i\omega_k - \frac{1}{2}\varepsilon\right)$$

$$v_k^{\prime\prime(a)} = \omega_k^2 v_k^{(a)}\left[\frac{3}{4}\varepsilon^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon'}{\omega_k} + 2\varepsilon^2\right) - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{i}{2}\varepsilon - 1\right]$$

$$v_k^{\prime\prime(a)} + \omega_k^2 v_k = \omega_k^2 v_k^{(a)}\left(\underbrace{\frac{3}{2}\varepsilon' - \underbrace{\frac{\varepsilon'}{\varepsilon\omega_k}}_{\text{trzeba sprawdzić}} - 2\varepsilon'}_{\emptyset} - (1-i)\right)\frac{\varepsilon}{2}$$

$\emptyset$

Niech
$$\omega_k(\eta) = c\eta^2 + k^2 \qquad c>0$$
$$\omega_k'(\eta) = 2c\eta$$
$$\frac{\omega_k'}{\omega_k^2} = \frac{2c\eta}{(c\eta^2+k^2)^2} = \varepsilon \ll 1$$

$\eta \to 0 \qquad \varepsilon \to \text{const}\cdot\eta \qquad \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \sim \frac{1}{\eta} \gg 1$

$\eta \to \infty \qquad \varepsilon \to \frac{2}{c}\frac{1}{\eta^3} \qquad \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \sim \eta^3 \ll 1 \;\rightarrow$ tu jest adiabat.

def. Mody i próżnia adiabat. v_k^{ad} i $|0_{ad}\rangle$ zadef. przez war. zszycia w pewnej chwili η_0.

$$\begin{cases} v_k^{(ad)}(\eta_0) = v_k^{(a)}(\eta_0) = \frac{1}{\sqrt{\omega_k(\eta_0)}} \\ v_k^{(ad)\prime}(\eta_0) = v_k^{(a)\prime}(\eta_0) = \frac{1}{\sqrt{\omega_k(\eta_0)}}\left(i\omega_k(\eta_0) - \frac{1}{2}\frac{\omega_k'(\eta_0)}{\omega_k(\eta_0)}\right)\end{cases}$$

$$W\left[v_k^{(ad)}\; v_k^{*(ad)}\right]\Big|_{\eta_0} = 2i$$

energia próżni adiabatycznej

$$\frac{1}{4}E_k = \frac{1}{4}\left(|v'^{(ad)}|^2 + \omega_k^2|v_k^{(ad)}|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\omega_k + \frac{1}{\omega_k}\frac{1}{4}\frac{\omega_k'^2}{\omega_k^2} + \omega_k\right) = \frac{1}{4}\omega_k + \frac{\omega_k'^2}{16\omega_k^3} = \frac{1}{2}\omega_k + \frac{\omega_k}{16}$$

$$= \frac{1}{4}E_k(\text{pr. chwilowe}) + \underbrace{\frac{\omega_k}{16}\varepsilon^2}_{\text{poprawka adiabat}}$$

$$\boxed{\frac{1}{4}E_k^a = \frac{1}{4}E_k + \frac{\omega_k}{16}\varepsilon^2}$$

• $a(t) = t^{\alpha}$ $\alpha = \frac{1}{2}$ RD
$\alpha = \frac{2}{3}$ MD

$$\eta = \int_{t_0}^{t} \frac{dt'}{a(t')} \quad \Big\} \quad ds^2 = dt^2 - a^2(t)\,dx^2 = a^2(\eta)\left(d\eta^2 - dx^2\right)$$

$$\eta = \int^{t} \frac{dt'}{t'^{\alpha}} = \frac{1}{1-\alpha} t^{1-\alpha} \ (+\,\text{const}) \quad \text{to tak aby} \quad \text{Const} = 0 .$$

$$a(\eta) = t^{\alpha} = (1-\alpha)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \ \eta^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$a'(\eta) = \frac{\alpha}{1-\alpha}(1-\alpha)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \ \eta^{\frac{-1+2\alpha}{1-\alpha}}$$

$$a''(\eta) = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{(-1+2\alpha)}{1-\alpha}(1-\alpha)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \ \eta^{\frac{3\alpha-2}{1-\alpha}}$$

$$\omega_k^2 = k^2 + m^2 a^2 - \frac{a''}{a} = k^2 + m^2(1-\alpha)^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}} \eta^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}} - \frac{\alpha(2\alpha-1)}{(1-\alpha)^2}\eta^{-2}$$

$\alpha - \frac{1}{2}$
$$\omega_k^2 = k^2 + m^2 \cdot \frac{1}{4}\eta^2$$

$$\omega_k = \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}m^2\eta^2}$$

$$\omega_k' = \frac{\frac{m^2}{4}\eta}{\sqrt{k^2 + \frac{1}{4}m^2\eta^2}}$$

$$\varepsilon = \frac{\omega_k'}{\omega_k^2} = \frac{1}{4}m^2\eta \ \frac{1}{\sqrt{k^2 + \frac{1}{4}m^2\eta^2}^{\,3}}$$

$0 \le t \le \infty \Rightarrow 0 \le \eta \le \infty$ $\eta < 0$ może też być (zmiana parametr.)

dla ustalonych k i m^2
$\eta \to 0$ $\varepsilon \to O(\eta)$ war. adiab. spełniony
$\eta \to \infty$ $\varepsilon \sim O(\frac{1}{\eta^2})$ –"–

w momentach pośrednich η, ε zal od k i m^2

$\alpha = \frac{2}{3}$
$$\eta = 3t^{1/3}$$

$$\omega_k^2 = k^2 + \frac{m^2}{81}\eta^4 - 2\eta^2$$

$$\omega_k' = \frac{\frac{4}{81}m^2\eta^3 - 4\eta}{2\sqrt{k^2 + \frac{m^2}{81}\eta^2 - 2\eta^2}}$$

$$\varepsilon = \frac{\frac{2}{81}m^2\eta^3 - 2\eta}{\left(k^2 + \frac{m^2}{81}\eta^4 - 2\eta^2\right)^{3/2}}$$

$\eta \to 0$ $\varepsilon \sim O(\eta)$

$\eta \to \infty$ $\varepsilon \sim O\left(\frac{1}{\eta^3}\right)$

• $a(t) = e^{Ht}$ $H = const > 0$ desitter

$\eta = \int^t \frac{dt'}{e^{Ht'}} = -\frac{1}{H} e^{-Ht}$

$a(\eta) = -\frac{1}{H\eta}$

$0 \leq t \leq \infty$ $-\frac{1}{H} \leq \eta \leq 0$

$-\infty \leq t < 0$ $-\infty \leq \eta < -\frac{1}{H}$

$a'(\eta) = \frac{1}{H\eta^2}$

$a''(\eta) = \frac{-2}{H\eta^3}$

$\omega_k^2 = k^2 + \frac{m^2}{H^2\eta^2} - \frac{2}{\eta^2} = k^2 - \left(2 - \frac{m^2}{H^2}\right)\frac{1}{\eta^2}$

$\omega_k' = \frac{2\left(2-\frac{m^2}{H^2}\right)\frac{1}{\eta^3}}{\sqrt{k^2 - \left(2 - \frac{m^2}{H^2}\right)\frac{1}{\eta^2}}}$

$\varepsilon = 2\left(2 - \frac{m^2}{H^2}\right)\frac{1}{\eta^3} \frac{1}{\left(k^2 - \left(2 - \frac{m^2}{H^2}\right)\frac{1}{\eta^2}\right)^{3/2}}$

$\eta \to -\infty$ $\varepsilon \sim \frac{1}{k^3}\frac{1}{\eta^3} \sim O\left(\frac{1}{\eta^3}\right)$

$\eta \to 0$ $\varepsilon \sim \frac{\eta^3}{\eta^3}$ $\to$ nie adiabat ?

2) Pole fermionowe

$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - dx^2)$

$S = \int d^3x\, d\eta\ a^4(\eta)\ \psi^+ \gamma^0 \left[i\gamma^\alpha V_\alpha{}^\mu (\partial_\mu + \Gamma_\mu) - m \right] \psi$

$g_{\mu\nu} = a^2 \eta_{\mu\nu} = V_\mu{}^\alpha V_\nu{}^\beta \eta_{\alpha\beta}$ $\Rightarrow$ $V_\mu{}^\alpha = a(\eta)\delta_\mu{}^\alpha$ $V_\beta{}^\nu = \frac{1}{a}\delta_\beta{}^\nu$

$\Gamma_\mu = \frac{1}{2}\Sigma^{\alpha\beta} V_\alpha{}^\nu V_{\beta\nu;\mu}$

$V_{\beta\nu;\mu} = \left(\partial_\mu V_{\beta\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma V_{\beta\sigma}\right)$

$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\delta}\left(\partial_\mu g_{\nu\delta} + \partial_\nu g_{\mu\delta} - \partial_\delta g_{\mu\nu}\right) = \frac{a'}{a}\left(\delta_{\mu 0}\delta^\sigma{}_\nu + \delta_\mu^\sigma \delta_{\nu 0} - \eta^{\sigma 0}\eta_{\mu\nu}\right)$

$\sim \frac{a'}{a}$

$\Gamma_\mu = \frac{1}{2}\Sigma^{\gamma\beta}\left[\frac{1}{a}\delta_\gamma{}^\nu \eta_{\beta\nu}\underbrace{\partial_\mu a}_{\delta_{\mu 0} a'} - \frac{1}{a}\delta_\gamma{}^\nu\, \Gamma_{\mu\nu}^\varkappa V_{\beta\varkappa}\right]$

$S = \int d^3x\, d\eta\ a^3(\eta)\ \psi^+\gamma^0 \left(i\gamma^\alpha \delta_\alpha^\mu \partial_\mu - ma\right)\psi$ $\leftarrow (a')^0$

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - dx^2) = \eta^{(0)}_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu \to (\eta^{(0)}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})\, dx^\mu dx^\nu$$

$$S \ni \underbrace{o(h)}_{\text{poprawki prowadzące do produkcji ferm.}} + o(ha')$$

$$\psi \to \frac{\chi}{a^{3/2}}$$

przedefiniow. p. ferm. aby wyciągnąć $a^3(\eta)$ z S i aby otrzymać równ. analog jak dla bozonów

$$\partial_0 \psi = \partial_0\left(\frac{\chi}{a^{3/2}}\right) = \underbrace{\frac{1}{a^{3/2}}\partial_0 \chi}_{\mathcal{L}_0} - \underbrace{\frac{3}{2}\chi \frac{a'}{a^{5/2}}}_{\text{przesuwamy do } \mathcal{L}_{int}}$$

$$S_0 = \int d^3x\, d\eta\, \chi^+ \gamma^0 (i \gamma^\alpha \partial_\alpha - m a(\eta))\, \chi \quad \leftarrow \text{to kwantujemy}$$

$(\delta_\alpha^\mu \partial_\mu)$

ślad expandującego tła

$$S_{total} = S_0 + S_{int}\left(\frac{a'}{a}, h, h\frac{a'}{a}\right)$$

h_{int} traktujemy jak oddziaływanie

$m = 0 \to$ jak r. Diraca

$m \neq 0 \to$ powtarzamy procedurę bozonową

$$\chi = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k}\vec{x}} \sum_r \left[u_r(\vec{k}\eta)\, a_r(\vec{k}) + v_r(\vec{k}\eta)\, b_r^+(-\vec{k})\right]$$

postulowany kształt pola

$$v_r(\vec{k}) = C \bar{u}_r^T(-\vec{k})$$

C macierz sprzężenia ład. czas rozwiązań → lokalnie współcz. jak w Mink.

$$\{a_r(\vec{k})\, a_s^+(\vec{k}')\} = \delta_{rs}\, \delta(\vec{k} - \vec{k}')$$

jednoczas

$$u_r^+(\vec{k}\eta)\, u_s(\vec{k}\eta) = \delta_{rs} = v_r^+(\vec{k}\eta)\, v_s(\vec{k}\eta)$$

normalizacja pozostałe $= 0$.

war. normaliz. zachowane w ewolucji czasowej

$$H(\eta) = \int d^3x\, \chi^+(-i\partial_0)\chi = \int d^3k \sum_r \Big\{ E_k(\eta) \left[a_r^+(\vec{k}) a_r(\vec{k}) - b_r(\vec{k})\, b_r^+(\vec{k})\right] +$$

$$+ F_k(\eta)\, b_r(-\vec{k})\, a_r(\vec{k}) + F_k^*(\eta)\, a_r^+(\vec{k})\, b_r^+(\vec{k}) \Big\}$$

$$E_k(\eta) = 2k\, \mathrm{Re}(u_+^* u_-) + am\,(1 - 2u_+^* u_+)$$

FLUKTUACJE I FUNKCJE KORELACJI

1) pola bozonowe

$$\chi=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(v_k^* e^{i\vec{k}\vec{x}}a_{\vec{k}}+v_k e^{-i\vec{k}\vec{x}}a_{\vec{k}}^+\right)=\chi(x\,\eta)$$

cięcie jednoczasowe - przestrz. płaska => niezmiennicze wzgl. transl.

$$\langle\psi|\chi(x\,\eta)\,\chi(y=0,\eta)|\psi\rangle=?$$

$$|\psi\rangle=|0\rangle$$

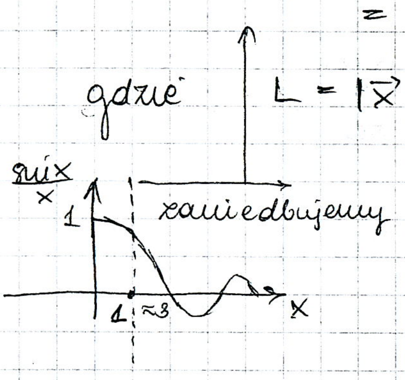
$$\langle 0|\chi(x)\chi(0)|0\rangle=\int\frac{d^3k\,d^3k'}{(2\pi)^3}\frac{1}{2}e^{i\vec{k}\vec{x}}v_k^* v_{k'}\langle 0|a_{\vec{k}}a_{\vec{k}'}^+|0\rangle$$

$$[a_{k'}\;a_k^+]=\delta(k-k')$$

$$(*)\quad\langle 0|\chi(x)\chi(0)|0\rangle=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2}e^{i\vec{k}\vec{x}}|v_k|^2=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-1}^{1}\frac{d(\cos\theta)}{2(2\pi)^3}e^{i|k||x|\cos\theta}\,k^2dk\,|v_k|^2$$

$$=\int\frac{k^2dk}{4\pi^2}|v_k|\frac{\sin(kL)}{kL}$$

gdzie $L=|\vec{x}|$ (odl. współbieżna)



$$k_{cut}=\frac{1}{L}$$

zał: v_k nie rośnie dla dużych k, inaczej dodatkowa renormal.

$$\langle 0|\chi(x)\chi(0)|0\rangle\approx k_{cut}^3\,|v_{k=k_{cut}}|^2$$

a) uśrednione operatory

$$\chi_L(\eta)=\frac{1}{L^3}\int\chi(x,\eta)\,d^3x\quad\rightarrow\quad\text{pozbywamy się } k>\frac{1}{L}\text{ szybkooscylujących modów}$$

fluktuacje uśrednionego pola:

$$(**)\quad\delta\chi_L^2(\eta)=\langle\psi|[\chi_L(\eta)]^2|\psi\rangle\overset{|\psi\rangle=|0\rangle}{=}\frac{1}{L^3}|v_{\frac{1}{L}}|^2=\frac{1}{L^3}|v_{\frac{1}{L}}(\eta)|^2$$

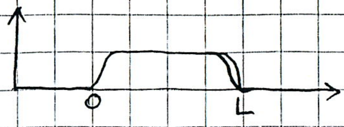
korelator pól w różnych punktach

$(**)\approx(*)$ => te same info

ponieważ jest uśredniowana nieoznaczoność pola wynikająca z expansji tła.

\- spektrum fluktuacji swobodnego pola skalarnego w krzywym tle.

funkcja okna

•  

• $W_L = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{L^3} e^{-\frac{|\vec{x}|}{2L^2}}$ $\quad \int W_L(x)\, d^3x = 1$ — gauss

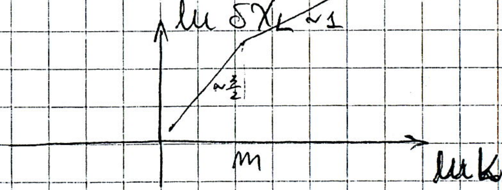
spektrum fluktuacji w pr. Minkowskiego

$$v_k(\eta) = \frac{1}{\sqrt{\omega_k}} e^{i\omega_k \eta} \qquad \omega_k^2 = k^2 + m^2$$

$$\delta X_L = k^{3/2} |v_k(\eta)| \Big|_{k=\frac{1}{L}} = \frac{k^{3/2}}{(k^2+m^2)^{1/4}}$$

$k \to 0$ $\quad \delta X_L \sim k^{3/2} = \frac{1}{L^{3/2}}$ $\quad (mL \ll 1)$

$k \gg m$ $\quad \delta X_L \sim k = \frac{1}{L}$



spektrum fluktuacji w st. wzbudzonym (mixed)

$u_k(\eta)$ baza inna niż $v_k(\eta) = \frac{1}{\sqrt{\omega_k}} e^{i\omega_k\eta}$

$$\delta X_L^{(e)2}(\eta) = \frac{1}{L^3} |u_{\frac{1}{L}}|^2 = \frac{1}{L^3} |\alpha_k v_k - \beta_k^* v_k^*|^2 = \frac{1}{L^3}\Big(|\alpha_k|^2 |v_k|^2 + |\beta_k|^2 |v_k^*|^2 +$$
$$- 2\,\mathrm{Re}(\alpha_k v_k \beta_k v_k)\Big) = \frac{1}{L^3}\frac{1}{\omega_k}\Big(|\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\alpha_k\beta_k e^{2i\omega_k\eta})\Big)$$

$$\frac{\delta X_L^{(e)}}{\delta X_L} = \Big(|\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\alpha_k\beta_k e^{2i\eta\omega_k})\Big)^{1/2} = \Big(1 + 2|\beta_k|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\alpha_k\beta_k e^{2i\eta\omega_k})\Big)$$

$$\Delta\eta \sim T_k = \frac{2\pi}{\omega_k}$$

$$\overline{\left(\frac{\delta X_L^{(e)}}{\delta X_L}\right)^2} \approx 1 + \underbrace{2|\beta_k|^2}_{>0} > 1$$

$$(\delta X_L^{(e)})^2 = \frac{k^3}{\omega_k}\Big(|\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2 + \overset{0}{\langle\ \rangle}\Big) = \frac{k^3}{\omega_k}\Big[1 + 2 n_k^{\beta}\Big]$$

średnia po okresie $T_k = \frac{2\pi}{\omega_k}$

przykład 1

Inne podejście, $m_{eff}^2 = m_{eff}^2(\eta)$ (nie wiem na co)

$$m_{eff}^2(\eta) = \begin{cases} m_0^2 & \eta < 0 \wedge \eta > \eta_1 \\ -m_0^2 & 0 < \eta < \eta_1 \end{cases} \quad \to \text{formalnie próżnia min}$$

$|0\, in\rangle$ $\quad (\eta < 0)$

$|0\, out\rangle$ $\quad (\eta > \eta_1)$

a) ilość wyprodukowanych cząstek między 0 i η_1
b) gęstość energii wyprod. cząstek dla $0<\eta<\eta_1$
c) spektrum fluktuacji dla $\eta>\eta_1$

ad a) $\quad v_k'' + \omega_k^2 v_k = 0$

$\eta<0 \vee \eta>\eta_1 \quad v_k'' + \overbrace{(k^2+m_0^2)}^{\omega_k^2} v_k = 0$

$$\begin{cases} v_k^{(in)}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{\omega_k}} e^{i\eta\omega_k} & \eta<0 \\ v_k^{(out)}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{\omega_k}} e^{i\omega_k(\eta-\eta_1)} & \eta>\eta_1 \quad = u_k \end{cases}$$

$0<\eta<\eta_1 \quad v_k'' + (k^2-m_0^2)v_k = 0 \qquad \Omega_k^2 = k^2-m_0^2$

$$f_{\vec{k}} = \frac{A_k}{\sqrt{\Omega_k}} e^{i\Omega_k\eta} + \frac{B_k}{\sqrt{\Omega_k}} e^{-i\eta\Omega_k}$$

zszywamy w $\eta=0$:

$$v_k^{(in)}(0) = \frac{1}{\sqrt{\omega_k}} = f_k(0) = \frac{A_k}{\sqrt{\Omega_k}} + \frac{B_k}{\sqrt{\Omega_k}}$$

$$v_k'^{(in)}(0) = i\sqrt{\omega_k} = f_k'(0) = i\sqrt{\Omega_k}(A_k-B_k)$$

$$\begin{cases} A+B = \sqrt{\frac{\Omega_k}{\omega_k}} \\ A-B = \sqrt{\frac{\omega_k}{\Omega_k}} \end{cases} \qquad \begin{cases} A = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\Omega_k}{\omega_k}} + \sqrt{\frac{\omega_k}{\Omega_k}}\right) \\ B = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\Omega_k}{\omega_k}} - \sqrt{\frac{\omega_k}{\Omega_k}}\right) \end{cases}$$

~~zszywamy w $\eta=\eta_1$~~

$\cancel{v_k^{(out)}(\eta_1)}$

$$\Rightarrow f_k(\eta) = \frac{1}{\sqrt{\omega_k}}\cos(\Omega_k\eta) + \frac{\sqrt{\omega_k}}{\Omega_k} i\sin(\Omega_k\eta)$$

zszywamy w $\eta=\eta_1$

$$f_k(\eta_1) = \frac{1}{\sqrt{\omega_k}}\cos(\Omega_k\eta_1) + \frac{\sqrt{\omega_k}}{\Omega_k} i\sin(\Omega_k\eta_1)$$

$$f_k'(\eta_1) = -\frac{\Omega_k}{\sqrt{\omega_k}}\sin(\Omega_k\eta_1) + \sqrt{\omega_k}\, i\cos(\Omega_k\eta_1)$$

$$v_k^{out}(\eta_1) = \frac{C}{\sqrt{\omega_k}} e^{i\omega_k(\eta-\eta_1)} + \frac{D}{\sqrt{\omega_k}} e^{-i\omega_k(\eta-\eta_1)}\Big|_{\eta=\eta_1} = \frac{C}{\sqrt{\omega_k}} + \frac{D}{\sqrt{\omega_k}}$$

$$v_k'^{out}(\eta_1) = iC\sqrt{\omega_k} - iD\sqrt{\omega_k}$$

$$\begin{cases} C = \cos(\Omega_k\eta_1) + \frac{i}{2}\sin(\Omega_k\eta_1)\left(\frac{\omega_k}{\Omega_k} + \frac{\Omega_k}{\omega_k}\right) \\ D = \frac{i}{2}\sin(\Omega_k\eta_1)\left(\frac{\omega_k}{\Omega_k} - \frac{\Omega_k}{\omega_k}\right) \end{cases}$$

$$v_k(\eta) = \alpha_k^* u_k(\eta) + \beta_k^* u_k^*(\eta)$$

$\alpha_k = C^* \qquad \beta_k = D^* \qquad$ wsp. Bogolubova

$$n_k = |\beta_k|^2 = \frac{m_0^4}{|k^4 - m_0^4|} \left| \sin\left(\eta_1 \sqrt{k^2 - m_0^2}\right) \right|^2$$

dla $k^2 \gg m_0^2$ $\quad n_k \approx \underbrace{\frac{m_0^4}{k^4}}_{\text{silnie tłumi}} \{\sin^2 k\eta_1\} + o\left(\frac{m_0^5}{k^5}\right)$ $\rightarrow$ nie odczuwają bardzo zmiany tła

dla $k \ll m_0$ $\quad \omega_k^2 = k^2 + m_0^2 \approx m_0^2$

$\Omega_k^2 = k^2 - m_0^2 \approx -m_0^2 \quad \Rightarrow \Omega_k = i\omega_k$

$\sin \rightarrow sh$

$n_k \approx sh^2(m_0\eta_1)\left(1 + o\left(\frac{k^2}{m_0^2}\right)\right)$ $\rightarrow$ długie mody prod. jednorodnie (n nie zal od k)

uwaga: $k \ll m_0$ $\quad e^{\eta_1|\Omega_k|} \approx e^{m_0\eta_1}$

$$|\Omega_k| = |\sqrt{k^2 - m_0^2}| = m_0 \left|\sqrt{\frac{k^2}{m_0^2} - 1}\right| \approx m_0 + \frac{k^2}{2m_0}$$

$$\frac{\eta_1 k^2}{2m_0} \ll 1 \qquad k \ll \sqrt{\frac{m_0}{\eta_1}} \qquad m_0\eta_1 \gg 1$$

ad b) gęstość energii

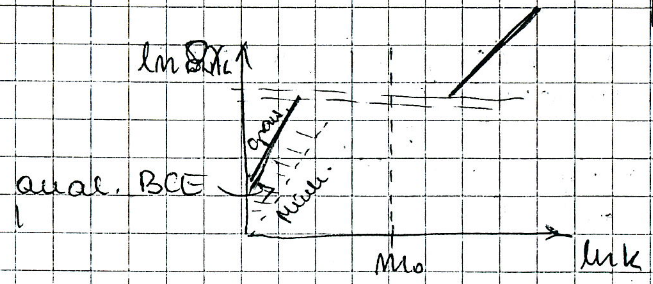
$\varepsilon_0 = \int d^3k\, n_k \omega_k$ $\quad$ energia przekazana od pola do wytworzonych cząstek, po wyłączeniu pola graw.

$$\varepsilon_0 = \int d^3k\, |\beta_k|^2 \sqrt{k^2 + m_0^2} \cong \int^{m_0}_{(k \ll m_0)} 4\pi\, dk\, k^2 |\beta_k|^2 \sqrt{k^2 + m_0^2} \approx m_0^4\, e^{2m_0\eta_1}$$

ad c) spektrum fluktuacji

$$\delta\chi_L = k^{3/2} \frac{1}{\sqrt{\omega_k}} \left(1 + 2|\beta_k|^2\right)^{1/2} = \begin{cases} k & k \gg m_0 \\ k^{3/2} m_0^{-1/2} e^{m_0\eta_1} & k \ll m_0 \quad \left(k \ll \sqrt{\frac{m_0}{\eta_1}}\right) \end{cases}$$

$\hookrightarrow \frac{3}{2}\ln k - \frac{1}{2}\ln m_0 + m_0\eta_1$



przykład 2.

η_1 η_2 $k: \omega_k \geq 0$ dla $\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2$ $|0_{\eta_1}\rangle$ $|0_{\eta_2}\rangle$ chwilowe próżnie

$$u_{k\eta}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{\omega_k(\eta)}}$$

$$u_{k\eta}'(\eta) = i\sqrt{\omega_k(\eta)} = i\omega_k(\eta)u_{k\eta}(\eta)$$

· w $\forall\eta$ $u_k(\eta)$ jest chwilowa próżnia (to nie jest przeewoluowana próżnia z jakiegoś momentu

$$\begin{cases} v_k^* = \alpha_k u_k^* + \beta_k u_k \\ v_k = \alpha_k^* u_k + \beta_k^* u_k^* \end{cases}$$

zał: znamy przeewoluowane do η f-cje v_k

$$\begin{cases} \alpha_k(\eta) = \dfrac{-v_k^{*\prime} + i\omega_k v_k^*}{2i\sqrt{\omega_k}} \\ \beta_k(\eta) = \dfrac{v_k^{*\prime} + i\omega v_k^*}{2i\sqrt{\omega_k}} \end{cases}$$

$$\xi(\eta) = \frac{\beta_k^*(\eta)}{\alpha_k^*(\eta)} = -\frac{v_k^{\prime} + i\omega v_k}{+v_k^{\prime} + i\omega_k v_k}$$

(*) $$\boxed{\frac{d\xi}{d\eta} + 2i\omega\xi = (1-\xi^2)\frac{\omega'}{2\omega}}$$

$\xi \ll 1$ (małe) dla $\frac{\omega'}{\omega^2} \ll 1$

η_1 : $\xi(\eta_1) = 0$

$$\xi' = (1-\xi^2)\frac{\omega'}{2\omega} - 2i\omega\xi$$

$$\frac{\xi'}{\omega} = \underbrace{\frac{\omega'}{2\omega^2}}_{\substack{\text{małe} \\ \text{bo adiabat.} \\ \text{obszar}}} - \underbrace{2i\xi}_{\substack{\text{małe} \\ \text{bo } \xi \text{ małe}}} \Rightarrow \xi' \text{ jest małe} \Rightarrow \xi'' \text{ małe}$$

bo małe

$\Rightarrow$ pole spełniające (*) nigdy nie jest duże
możemy rozw. perturbacyjnie

$$\xi^{(1)} = \int_{\eta_1}^{\eta} d\eta' \frac{1}{2\omega(\eta')} \frac{d\omega(\eta')}{d\eta'} e^{-2i\int_{\eta'}^{\eta}\omega(\eta'')d\eta''}$$ ← rozw (*) z $\xi^2 \simeq$

$$\begin{cases} |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \\ \xi(\eta) = \dfrac{\beta^*(\eta)}{\alpha^*(\eta)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow |\beta|^2 = \frac{|\xi|^2}{1-|\xi|^2}$$

de Sitter

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\,d\bar{x}^2 \qquad a(t) = a_0 e^{H(t-t_0)} = e^{Ht} \qquad H = \text{cst}$$

$$R = -6\left(\frac{\ddot a}{a} + \frac{\dot a^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right) = -12H^2 \neq 0$$

$$p = -\varrho \quad \text{r. stanu} \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot a^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\varrho = H^2 \quad \Rightarrow \quad H =$$

spadek swobodny w przestrzeni de Sittera

$$\tau[x(t)] = \int dt\,\sqrt{1 - a^2(t)\,\dot x^2} \quad - \text{ funkcjonał czasu własnego}$$

$$ds^2 = d\tau^2 = dt^2 - a^2(t)\,d\bar x^2 \Rightarrow d\tau = dt\,(1 - a^2\dot x^2)^{1/2}$$

$$\frac{\delta\tau}{\delta x} = 0 \Rightarrow \frac{\delta L}{\delta x} - \partial_t \frac{\delta L}{\delta \dot x} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{a^2\dot{\vec x}}{\sqrt{1 - a^2\dot x^2}} = \frac{d}{dt}\vec p = 0$$

$$p_i = \frac{a^2\dot x_i}{\sqrt{1 - a^2\dot x^2}} \quad \text{pęd uogólniony}$$

$$\dot x^2 = \frac{p^2}{a^2(p^2 + a^2)}$$

$$t_i = -\infty \qquad t_f = 0$$

$$\tau_0 = \int_{-\infty}^{0} dt\,(1 - a^2(t)\dot x^2)^{1/2} = \int_{-\infty}^{0} dt\,\frac{a(t)}{\sqrt{p^2 + a^2(t)}}$$

$$\frac{a(t)}{p} = \operatorname{sh}\theta \qquad \frac{\dot a(t)}{p}\,dt = \operatorname{ch}\theta\,d\theta$$

$$\tau_0 = \frac{1}{H}\int_{\theta(-\infty)}^{\theta(0)} d\theta = \frac{1}{H}\left[\theta(0) - \theta(-\infty)\right] = \frac{1}{H}\operatorname{arsh}\left(\frac{1}{p}\right) < \infty$$

$$\theta = \operatorname{arsh}\left(\frac{p}{a(t)}\right)^{-1} \Rightarrow \begin{aligned}\theta(0) &= \operatorname{arsh}\left(\frac{1}{p}\right)\\ \theta(-\infty) &= 0\end{aligned}$$

obserwator może opisać chwile $\tau < \tau_0$
nie cała prz. de Sittera jest pokryta przez równanie

horyzont zdarzeń

(t_0, x_0) – emisja sygnału

$ds^2 = 0$ w czasie własnym wiązki światła

$$dt = a(t)\,d\bar x$$

$$dx = \frac{dt}{a(t)}$$

$$\Delta x = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^t e^{-Ht'}\,dt' = -\frac{1}{H}\left(e^{-Ht} - 1\right) = \frac{1}{H}\left(1 - e^{-Ht}\right) \quad - \text{ dystans pok. przez sygnał}$$

$$\Delta x \xrightarrow{t\to\infty} \frac{1}{H} < \infty \quad \text{w prz. de Sittera}$$ max dystans jaki może prze[jść] sygnał jest $< \infty$. Interesuje nas kt. ... nie

równanie na mody

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - dx^2)$$ metryka w czasie konforemnym

$$\begin{cases} \eta = -\frac{1}{H} e^{-Ht} \\ a(\eta) = -\frac{1}{H\eta} \end{cases} \qquad \begin{cases} -\infty < t < \infty \\ -\infty < \eta < 0 \end{cases}$$

$$\phi = \frac{\chi}{a}$$

$$v_k'' + \underbrace{\left[k^2 - \left(2 - \frac{m^2}{H^2}\right)\frac{1}{\eta^2}\right]}_{\omega_k^2} v_k = 0 \qquad \} v_k'' = \partial_\eta^2 v_k$$

$$\omega_k^2 = k^2 + m^2 a^2 - \frac{a''}{a}$$

- $m^2 \gg H^2 \Rightarrow \omega_k > 0 \quad \left(\text{dla } \frac{m^2}{H^2} > 2\right)$
- $\frac{m^2}{H^2} \ll 1 \Rightarrow \omega_k < 0 \vee \omega_k \geq 0$

rozw. => do równ. Bessela

$$s^2 \frac{d^2 f_k}{ds^2} + s\frac{df_k}{ds} + (s^2 - \mu^2) f_k = 0$$

$$s = k|\eta| = -k\eta$$

$$f = \frac{v_k}{\sqrt{k|\eta|}}$$

$$\mu^2 = \frac{9}{4} - \frac{m^2}{H^2}$$

$$f(s) = A J_\mu(s) + B Y_\mu(s)$$

$$v_k(k|\eta|) = \sqrt{k|\eta|}\left[A J_\mu(k|\eta|) + B Y_\mu(k|\eta|)\right]$$

normalizujemy za pomocą wrońskianu

$$\mathrm{Im}(v_k^* v_k') = \frac{W[v_k v_k^*]}{2i} = 1$$

$$AB^* - A^*B = \frac{i\pi}{k}$$

wybór próżni za pomocą fizycznych przesłanek

dla $\eta \to \infty$ $\quad v_k'' + k^2 v_k = 0$ $\quad \to$ rozw. z pr. Minkowskiego

$$v_k(\eta \to -\infty) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{k}} e^{ik\eta}$$

dla $\eta \to 0$

$$\omega_k^2 = -\left(2\xi - \frac{m^2}{H^2}\right)\frac{1}{\eta^2} < 0 \quad \text{możliwe dla } \frac{m^2}{H^2} < 2$$

$$v_k'' - \left(2 - \frac{m^2}{H^2}\right)\frac{1}{\eta^2} v_k = 0$$

$$v_k = A(-\eta)^{n_1} + B(-\eta)^{n_2}$$

$$n_1(n_1 - 1) - \left(2 - \frac{m^2}{H^2}\right) = 0$$

$$\Delta = 4\left(\frac{9}{4} - \frac{m^2}{H^2}\right) > 0 \quad \text{dla } \frac{m^2}{H^2} \ll 1$$

$$n_1 = \frac{1 \pm 2\mu}{2} = \frac{1}{2} \pm \mu$$

$$v_k = A(-\eta)^{\frac{1}{2}+\mu} + B(-\eta)^{\frac{1}{2}-\mu}$$

$$\mu \approx \frac{3}{2}$$

$$v_k \xrightarrow{\eta \to 0} B(|\eta|)^{\frac{1}{2}-\mu} \sim \frac{B}{|\eta|}$$

- asymptotyka f-cji Bessela

$$J_\mu(s) \sim \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(s+1)}\left(\frac{s}{2}\right)^\mu & \text{dla } s \to 0 \\ \sqrt{\frac{2}{\pi s}}\cos\left(s - \frac{\pi\mu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) & \text{dla } s \to \infty \end{cases}$$

$$Y_\mu(s) \sim \begin{cases} -\frac{1}{\pi}\Gamma(\mu)\left(\frac{2}{s}\right)^\mu & \text{dla } s \to 0 \\ \sqrt{\frac{2}{\pi s}}\sin\left(s - \frac{\pi\mu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) & \text{dla } s \to \infty \end{cases}$$

- asymptotyka modów v_k

$$v_k(\eta) \sim \begin{cases} \frac{B}{\pi} 2^\mu \Gamma(\mu)\left(k|\eta|\right)^{\frac{1}{2}-\mu} & \text{dla } k|\eta| \to 0 \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[A\cos\left(|\eta|k - \frac{\pi\mu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + B\sin\left(|\eta|k - \frac{\pi\mu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right] & \text{dla } k \end{cases}$$

$$v_k(\eta \to -\infty) \to \frac{1}{\sqrt{k}} e^{ik\eta} \quad \Rightarrow \quad A = iB$$

$$\text{normalizacja} \quad \Rightarrow \quad B = -i\sqrt{\frac{\pi}{2k}}$$

$$v_k(\eta \to -\infty) \to \frac{1}{\sqrt{k}} e^{ik\eta + \frac{i\mu}{2} + \frac{i\pi}{4}}$$

tylko ta dynamika

$$v_k = \sqrt{k|\eta|}\left[\sqrt{\frac{\pi}{2k}} J_\mu(k|\eta|) - i\sqrt{\frac{\pi}{2k}} Y_\mu(k|\eta|)\right]$$

$k|\eta| \to \infty$ dla $k \to \infty$ (b. krótkie mody)
dla modów o $\lambda = \frac{1}{k} < r_{krzyw} = \frac{1}{H}$ wszechświat
jest jak Minkowski (zas. równoważności)

$\Updownarrow$ wybór próżni Buncha-Daviesa.

$L = \frac{1}{k}$ dł. fali we wsp. współporuszających.

$L_{ph} = \frac{a(\eta)}{k}$ dł. fali fizycznej.

horyzont zdarzeń

$$k|\eta| = \frac{1}{L}\frac{1}{\frac{1}{H|\eta|}H} = \frac{1}{L}\frac{1}{a(\eta)H} = \frac{H^{-1}}{L_{ph}}$$

$k|\eta| \gg 1 \Rightarrow H^{-1} \gg L_{ph}$ – mody mieszczą się w horyzoncie
$k|\eta| \ll 1 \Rightarrow H^{-1} \ll L_{ph}$ – mody nie mieszczą się w horyzoncie
$k|\eta| \sim 1 \Rightarrow H^{-1} \sim L_{ph}$ $\Rightarrow$ dla η_k – moment przejścia horyzontu

$L_{ph} \sim e^{Ht}$ $\Rightarrow$ dla wystarczająco dł. czasu zawsze $k|\eta| \ll 1$

fluktuacje względ. próżni Buncha-Daviesa

$$\delta\chi_L^2 = k^3 |v_k|^2 \Big|_{k=\frac{1}{L}}$$

$$\phi = \frac{\chi}{a}$$

$$\delta\phi_L^2 = \frac{k^3}{a^2}|v_k|^2\Big|_{k=\frac{1}{L}}$$

$v_k \sim \frac{1}{\sqrt{k}} e^{ik\eta+\theta}$ mody podhoryzontalne

$v_k \sim \frac{1}{\sqrt{k}}\left|\frac{\eta}{\eta_k}\right|^{\frac{1}{2}-\mu}$ mody nadhoryz.

$$\delta\phi_L = \frac{k^{3/2}}{a}|v_k|\Big|_{k=\frac{1}{L}} = \begin{cases} \frac{1}{aL} = \frac{1}{L}H|\eta| = \frac{1}{L_{ph}} & \text{dla } |k\eta| \gg 1 \\ \frac{1}{aL}\left|\frac{\eta}{\underbrace{\eta_L}_{=L}}\right|^{\frac{1}{2}-\mu} = \frac{1}{L_{ph}}\left(\frac{\eta}{L}\right)^{\frac{1}{2}-\mu} & \text{dla } |k\eta| \ll 1 \\ \quad = H(L_{ph}H)^{\mu-3/2} & \end{cases}$$

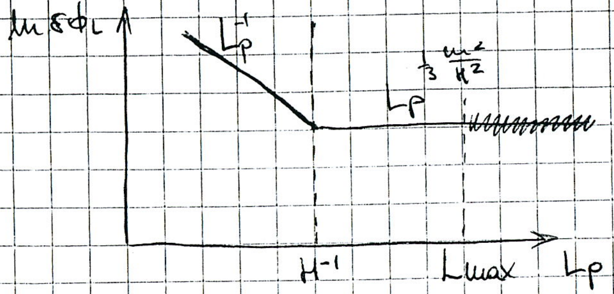
zszywanie w chwili $\eta_k = \omega\eta$ $\quad k=0$

$$v_k \approx \frac{1}{\sqrt{k}} e^{ik\eta} \qquad \eta < \eta_k$$

$$v_k = \underbrace{A_k \frac{1}{\sqrt{k}}\left|\frac{\eta}{\eta_k}\right|^{n_1}}_{\text{małe}} + B_1\frac{1}{\sqrt{k}}\left|\frac{\eta}{\eta_k}\right|^{n_2} = B_1\frac{1}{\sqrt{k}}\left|\frac{\eta}{\eta_k}\right|^{\frac{1}{2}-\mu}$$

$$\mu = \left(\frac{9}{4} - \frac{m^2}{H^2}\right)^{1/2} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{2}{3}\frac{m^2}{H^2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{3}\frac{m^2}{H^2}$$

$$\left|\mu - \frac{3}{2}\right| = \left| -\frac{1}{3}\frac{m^2}{H^2}\right| \ll 1$$



Lmax skala powyżej kt nie nie możemy mewrdzieć
def. próżni kt w której chwili (początkowej) były pod horyzontem, $\omega^2 > 0$ → cząstki
mody kt w chwili początkowej były poza horyzontem $\omega^2 < 0$
nie możemy kwantować

$$a(\eta) H^{-1} = l_{max}(\eta) \qquad (\text{IR cut off})$$

$$l_{max}(\eta) = H^{-1}\left|\frac{\eta_i}{\eta}\right| \quad \to \text{horyzont cząstek w chwili } \eta$$

interpretacja stochastycznego pseudoklas. pola
→ niejednorodności metryki
→ tworzenie się struktur wielkoskalowych

$$v_k = \sqrt{\frac{\pi|\eta|}{2}}\left[\underbrace{J_\mu(k|\eta|) - i Y_\mu(k|\eta|)}_{H_\mu^{(2)}(k|\eta|)}\right] \qquad \text{- f-ja Hankla}$$

$$\mu = \left(\frac{9}{4} - \frac{m^2}{H^2}\right)^{1/2} \overset{m=0}{=} \frac{3}{2}$$

$$H^{(2)}_{3/2} = -\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{-iz}\left(1 + \frac{1}{iz}\right)$$

$$H^{(1)}_{3/2} = \left(H^{(2)}_{3/2}\right)^*$$

$$\phi_k = H|\eta|\sqrt{\frac{\pi|\eta|}{2}}\, H^{(2)}_{3/2}(k|\eta|) = -\frac{H|\eta|}{\sqrt{k}}\, e^{-ik|\eta|}\left(1 + \frac{1}{ik|\eta|}\right)$$

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\left(e^{i\vec{k}\vec{x}}\, \phi_k^*(\eta)\, a_{\vec{k}} + e^{-i\vec{k}\vec{x}}\, \phi_k(\eta)\, a_k^+\right)$$

$$\phi_k \approx \begin{cases} -\frac{H|\eta|}{\sqrt{k}}\, e^{-ik|\eta|} & \eta \gg 1 \\ \frac{H|\eta|}{\sqrt{k}} = \text{cst} \sim H & \eta \ll 1 \end{cases}$$

$$\langle \phi^2 \rangle = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int |\phi_k|^2 d^3k = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \frac{H^2|\eta|^2}{k}\left(1 + \frac{1}{k^2|\eta|^2}\right) d^3k =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \left(\frac{H^2}{2k^3} + \frac{H^2|\eta|^2}{2k}\right)$$ ← średnia próżniowa

$p = ke^{-Ht} = kH|\eta|$ fizyczny pęd modu

$$\langle \phi^2 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{p} \left(\underbrace{\frac{1}{2}}_{\substack{\text{płaska} \\ \text{część} \\ \text{div dla} \\ p \to \infty}} + \underbrace{\frac{H^2}{2p^2}}_{\substack{\text{efekt} \\ \text{względny} \\ \text{de Sittera}}}\right)$$

n_k - liczba obsadzeń

$n_k = \frac{1}{e^{k/T} - 1}$ dla gazu skalarów

n_k dla $p \to 0$ $x_p \to \infty$ $n_k \to \infty$ => kondensat

$\int \phi^2 \rho_c(\phi t)\, d\phi$ - średnia klasyczna $= \langle \phi^2 \rangle$

$k_{max}(\eta) = \frac{1}{p_{min}}$ - dolne ograniczenie na p

$p_{max} = H$ - górne ograniczenie ($p > H$ → mody pozahoryzontalne)

$$\boxed{\langle \phi^2 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{p_{min}}^{p_{max}} \frac{d^3p}{p} \frac{H^2}{2p^2} = \frac{H^3 t(\eta)}{4\pi^2} = \frac{H^2}{4\pi^2} Ht}$$

$= N$ ilość efoldów odliczanych w czasie de Sittera

$N = \ln \frac{a(t_k)}{a(t_p)}$

t_k koniec epoki de Sitt

t_p początek -||-

$$\boxed{\sqrt{\langle \phi^2 \rangle} = \frac{H}{2\pi} \sqrt{N}}$$

T_H temperatura Hawkinga

dla $m \neq 0$ $\frac{m^2}{H^2} \ll 1$

$$\langle \phi^2 \rangle = \frac{3H^4}{8\pi^2 m^2}\left(1 - e^{-\frac{2m^2}{3H^2}t}\right)$$

$t \gg \frac{3H^2}{2m^2}$ $\langle \phi^2 \rangle \approx \boxed{\frac{3H^4}{8\pi^2 m^2}} < \infty$ dla $m \neq \infty$

fluktuacja Buncha

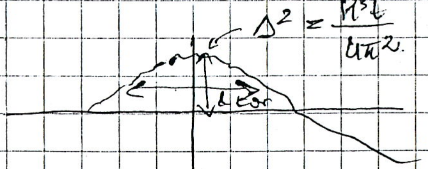
$t \to 0 \quad \langle \phi^2 \rangle \approx \frac{H^3}{4\pi^2} t$

korelator

$\langle \overset{\varphi}{\phi}(x t)\, \overset{\varphi}{\phi}(y t) \rangle = \langle \overset{\varphi}{\phi^2}(x t) \rangle \left(1 - \frac{1}{Ht} \ln Hl \right)$

l - odl. fizyczna $|x-y|\, a(t)$

$\langle \varphi(x t)\, \varphi(y t) \rangle = \Phi_y(x t)$ dla ustalonego y → zadane pole b. piask. od 0 do niewielk. kiedy $1 - \frac{1}{Ht} \ln Hl \approx$



$l = H^{-1} e^{Ht} - l_{max}(t)$ - skala korelacji pola

duże fluktuacje wymuszone zewn. siłę

- stochastyczne tunelowanie
- fluct. wymuszane przez zewn. siłę

nie muszą one respekt. symetrii l. pola → nie ma praw zachow.

postulujemy rozkład prawd. pola stochast.

$m = 0 \qquad p_c(\varphi t): \quad \frac{\partial p_c(\varphi t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p_c(\varphi t)}{\partial \varphi^2}$ równ. dyfuzji

$\langle \varphi^n \rangle_Q = \int \varphi^n p_c(\varphi t)\, d\varphi$ → definicje obserwable

$\parallel$

$\partial_t \,/ \quad \frac{H^3 t}{4\pi^2} \; (n=2)$

$\frac{H^3}{4\pi^3} = \int \varphi^2 \frac{\partial p_c(\varphi t)}{\partial t} d\varphi = D \int \varphi^2 \frac{\partial^2 p_c(\varphi t)}{\partial \varphi^2} d\varphi .$

rozwiąz.

$p_c(\varphi t) = \sqrt{\frac{2\pi}{H^3 t}}\; e^{-\frac{2\pi^2 \varphi^2}{H^3 t}}$

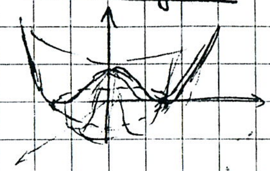
war. pocz.:

$p_c(\varphi, 0) = \delta(\varphi)$

$m \neq 0 \qquad \boxed{\frac{\partial p_c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p_c}{\partial \varphi^2} + b \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(p_c \frac{dV}{d\varphi}\right)}$ r. Starobińskiego

b - wsp. ruchliwości $\quad \varphi' = -b \frac{dV}{d\varphi}$ $\qquad$ (spr. dla $V = \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + V_0$

Wpływ fluktuacji na spontaniczne łamanie sym.



$$\begin{cases} \mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - V(\phi) \\ V = -\frac{1}{2} m^2 \phi^* \phi + \frac{1}{2}\lambda(\phi^* \phi)^2 \end{cases}$$

$$\phi = \sigma(x)\, e^{i\chi(x)}$$

$$\sigma = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} = cst$$

χ - dowolne

$\Box \chi = 0$ => χ podlega nieskończonym fluktuacjom
(ćw. z teo grav.)

$$\begin{cases} \overset{\chi}{\phi} = \overset{\chi}{\phi}{}^+ + \overset{\chi}{\phi}{}^- \\ \overset{\chi}{\phi}{}^+ = \int [dk]\, v_k^* a_k \\ \overset{\chi}{\phi}{}^- = \int [dk]\, v_k a_k^+ \end{cases} \qquad v_k^* = v_k^* e^{-ikx}$$

$$\overset{\chi^+}{\phi^+} |0\rangle = 0 \qquad \langle 0| \overset{\chi^-}{\phi^-} = 0$$

$$\langle \phi \rangle = \langle \sigma e^{i\chi} \rangle = \sigma \langle e^{i\chi} \rangle$$

$$\langle \chi^2 \rangle = \langle (\chi^+ + \chi^-)^2 \rangle = \langle \overset{0}{(\chi^+)^2} + \overset{0}{(\chi^-)^2} + (\chi^+\chi^-) + \overset{0}{(\chi^-\chi^+)} \rangle = \langle \chi^+\chi^- \rangle = \langle \chi^+\chi^- - \chi^-\chi^+ \rangle$$

$$= \langle [\chi^+, \chi^-] \rangle = \frac{H^3 t}{4\pi^2}$$

wzór Hausdorfa $\quad e^A e^B = e^{A + B + \frac{1}{2}[A B] + \dots}$

$$e^{i\chi} = e^{i\chi^+ + i\chi^-} = e^{i\chi^-} e^{-\frac{1}{2}[\chi^- \chi^+]} e^{i\chi^+}$$

$$\langle \phi \rangle = \sigma \langle e^{i\chi} \rangle = \sigma \langle e^{-\frac{1}{2}[\chi^- \chi^+]} \rangle = \sigma \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{H^3 t}{4\pi^2}\right) \xrightarrow{t \to \infty} 0$$

{ im dłuższa epoka de Sittera tym mniejsze $\langle \phi \rangle$ }
tworzą się domeny z wart. pól z koła min V, prawdziwe próżnie znosze.