RENORMALIZACJA $\lambda\varphi^4$

$$L_0 = \frac{1}{2}(\partial\varphi_0)^2 - \frac{1}{2}m_0^2\varphi_0^2 - \frac{1}{4}\lambda_0\varphi_0^4 \qquad m_0^2 < 0$$

Przesunięcie pól $\varphi_0^N = \varphi_0 - v_0$

Wtedy $L_0 = \frac{1}{2}(\partial\varphi_0^N)^2 - \frac{1}{2}m_0^2(\varphi_0^N)^2 - \frac{3}{2}\lambda_0 v_0^2(\varphi_0^N)^2 - m_0^2 v_0\varphi_0^N - \lambda_0 v_0^3\varphi_0^N - \lambda_0(\varphi_0^N)^3 v_0 - \frac{1}{4}\lambda_0\varphi_0^4$

Przesunięty L_0 (pomijamy indeks N):

$$L_0 = \frac{1}{2}(\partial\varphi_0)^2 - \frac{1}{2}(m_0^2 + 3\lambda_0 v_0^2)\varphi_0^2 - v_0(m_0^2 + \lambda_0 v_0^2)\varphi_0 - \lambda_0 v_0\varphi_0^3 - \frac{1}{4}\lambda_0\varphi_0^4$$

MODEL I

Jako wyjściową teorię bierzemy teorię z dowolnym v, ale za to z dodatkowym warunkiem, aby w każdym rzędzie rachunku zaburzeń znikał człon liniowy.
Na poziomie drzewowym daje to ograniczenie $m_0^2 = -\lambda_0 v_0^2$

Renormalizacja:

$\varphi_R = Z_\varphi^{-1/2}\varphi_0$ $\qquad\qquad$ $\varphi_0 = Z_\varphi^{1/2}\varphi_R$

$\lambda_R = Z_\lambda^{-1} Z_\varphi^2 \lambda_0$ $\qquad\qquad$ $\lambda_0 = Z_\lambda Z_\varphi^{-2}\lambda_R$

$v_R = Z_\varphi^{-1/2} v_0 - \delta v_0$ $\qquad\qquad$ $v_0 = Z_\varphi^{1/2}(v_R + \delta v_0)$

$m_R^2 = Z_\varphi (m_0^2 - \delta m_0^2$ $\qquad\qquad$ $m_0^2 = Z_\varphi^{-1}(m_R^2 + \delta m_0^2)$

$$L_0 = \frac{1}{2}Z_\varphi(\partial\varphi_R)^2 - \frac{1}{2}\left(Z_\varphi^{-1}(m_R^2 + \delta m_0^2) + 3Z_\lambda Z_\varphi^{-2}\lambda_R Z_\varphi(v_R + \delta v_0)^2\right)Z_\varphi\varphi_R^2 -$$
$$- Z_\varphi^{1/2}(v_R + \delta v_0)\left(Z_\varphi^{-1}(m_R^2 + \delta m_0^2) + Z_\lambda Z_\varphi^{-2}\lambda_R Z_\varphi(v_R + \delta v_0)^2\right)Z_\varphi^{1/2}\varphi_R - Z_\lambda Z_\varphi^{-2}\lambda_R Z_\varphi^{1/2}(v_R + \delta v_0)Z_\varphi^{3/2}\varphi_R^3$$
$$- \frac{1}{4}Z_\lambda Z_\varphi^{-2}\lambda_R Z_\varphi^2\varphi_R^4 =$$

$$= \frac{1}{2}Z_\varphi(\partial\varphi_R)^2 - \frac{1}{2}\left(m_R^2 + \delta m_0^2 + 3Z_\lambda\lambda_R(v_R + \delta v_0)^2\right)\varphi_R^2 - (v_R + \delta v_0)(m_R^2 + \delta m_0^2 + Z_\lambda\lambda_R(v_R + \delta v_0)^2)\varphi_R$$
$$- Z_\lambda\lambda_R(v_R + \delta v_0)\varphi_R^3 - \frac{1}{4}Z_\lambda\lambda_R\varphi_R^4$$

$$L_0 = \frac12 Z_\varphi (\partial\varphi_R)^2 - \frac12\left(m_R^2 + \delta m_0^2 + 3Z_\lambda\lambda_R(v_R+\delta v_0)^2\right)\varphi_R^2 - \frac14 Z_\lambda\lambda_R\varphi_R^4$$
$$- Z_\lambda\lambda_R(v_R+\delta v_0)\,\varphi_R^3 - (v_R+\delta v_0)\left(m_R^2+\delta m_0^2+Z_\lambda\lambda_R(v_R+\delta v_0)^2\right)\varphi_R$$

Teraz $Z_i \to 1+\delta Z_i$, w przybl. „one loop" pomijamy człony $\delta Z_i\,\delta Z_j$ i wyższe

$$L_0 = \frac12(\partial\varphi_R)^2 + \frac12\delta Z_\varphi(\partial\varphi_R)^2 - \frac12(m_R^2+3\lambda_R v_R^2)\varphi_R^2 - \frac12(\delta m_0^2 + 3\delta Z_\lambda\lambda_R v_R^2 + 6\lambda_R v_R\delta v_0)\varphi_R^2$$
$$-\frac14\lambda_R\varphi_R^4 - \frac14\delta Z_\lambda\lambda_R\varphi_R^4 - \lambda_R v_R\varphi_R^3 - \lambda_R(\delta Z_\lambda v_R + \delta v_0)\varphi_R^3 - v_R(m_R^2+\lambda_R v_R^2)\varphi_R$$
$$-\left[\delta v_0(m_R^2+3\lambda_R v_R^2) + v_R(\delta m_0^2 + \delta Z_\lambda\lambda_R v_R^2 + 2\lambda_R v_R\delta v_0)\right]\varphi_R$$

$$L_0 = L_R + \Delta L \qquad\qquad m_F^2 = m_R^2 + 3\lambda_R v_R^2$$

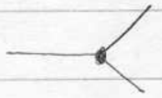
$$L_R = \frac12(\partial\varphi_R)^2 - \frac12 m_F^2\varphi_R^2 - v_R(m_R^2+\lambda_R v_R^2)\varphi_R - \lambda_R v_R\varphi_R^3 - \frac14\lambda_R\varphi_R^4$$

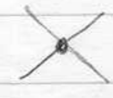
$$\Delta L = \frac12\delta Z_\varphi(\partial\varphi_R)^2 - \frac12(\delta m_0^2 + 3\delta Z_\lambda\lambda_R v_R^2 + 6\lambda_R v_R\delta v_0)\varphi_R^2 - \frac14\delta Z_\lambda\lambda_R\varphi_R^4$$
$$-\lambda_R(\delta v_0 + v_R\delta Z_\lambda)\varphi_R^3 - \left(m_F^2\delta v_0 + v_R(\delta m_0^2 + \delta Z_\lambda\lambda_R v_R^2)\right)\varphi_R$$

Reguły Feynmana pola φ_R:

Propagator $\frac{i}{p^2-m_F^2}$

Wierzchołki:


$-6i\lambda_R v_R$

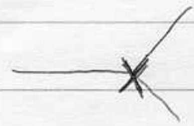

$-6i\lambda_R$

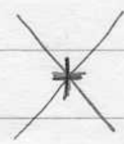

$-iv_R(m_R^2+\lambda_R v_R^2)$

Kontrczłony:


$-i(m_F^2\delta v_0 + v_R\delta m_0^2 + \delta Z_\lambda\lambda_R v_R^3)$


$i[\delta Z_\varphi p^2 - \delta m_0^2 - 3\delta Z_\lambda\lambda_R v_R^2 - 6\lambda_R v_R\delta v_0]$


$-6i\lambda_R(\delta v_0 + v_R\delta Z_\lambda)$


$-6i\lambda_R\delta Z_\lambda$

„TYPOWE" TADPOLE:

Poziom drzewowy:

$$T_1 = \frac{-i}{m_F^2}(-iv_R)(m_R^2+\lambda_R v_R^2) = -\frac{1}{m_F^2} v_R (m_R^2+\lambda_R v_R^2)$$

Poziom one-loop:

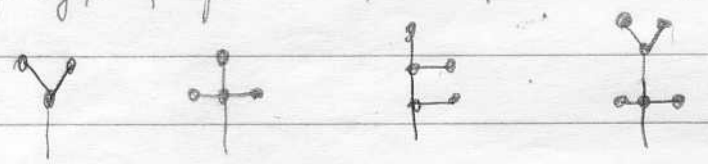
1) $$T_2 = \frac{-i}{m_F^2}\, C\, (-6i\lambda_R v_R)\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{(k^2-m_F^2)}$$ $C=\frac{1}{2}$ - wsp. kombinatoryczny

$$T_2 = \frac{3}{16\pi^2}\lambda_R v_R \left(\Delta - \ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2}+1\right) \qquad \Delta = \frac{2}{4-D}-\gamma$$

2) $$T_3 = \frac{-i}{m_F^2}(-i)(m_F^2\delta v_0 + v_R\delta m_0^2 + \delta Z_\lambda \lambda_R v_R^3) = -\frac{1}{m_F^2}(m_F^2\delta v_0+v_R\delta m_0^2+\delta Z_\lambda\lambda_R v_R^3)$$

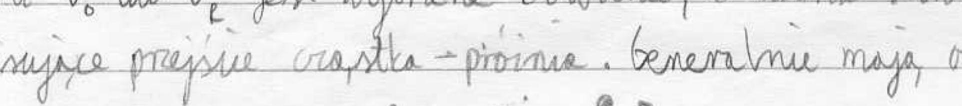
„NIETYPOWE" TADPOLE:

Jeśli v_0 lub v_R jest wybrane dowolnie, to można skonstruować grafy drzewowe (?) opisujące przejście cząstka-próżnia. Generalnie mają one postać drzewek:

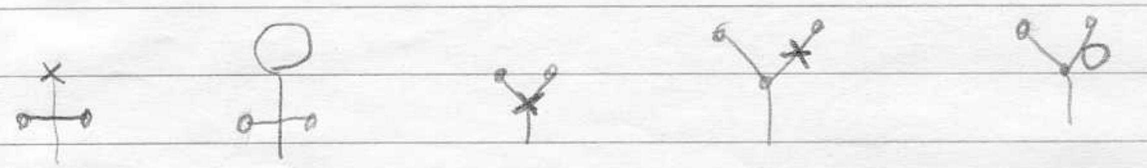


- - - itp.

Sumę takich drzewek oznaczam przez T_4. Powodują one skończoną renormalizację T_1 - widać, że teoria broni się przed rozwinięciem wokół takiej próżni. Próbowałem policzyć T_4, ale nie przebrnąłem przez kombinatorykę. Ważne jest jednak, że T_4 jest proporcjonalne do $(\lambda_R v_R^2+m_R^2)^2$ (chyba, że zsumowany szereg zawiera biegun w tym punkcie, ale nie wygląda na to). Oczywiście T_4 daje też skończoną renormalizację masy



Takie drzewka możemy przenieść na poziom one-loop, dodając odpowiednie pętle lub kontrczłony



Sumę takich grafów oznaczam przez T_5 — jest ona proporcjonalna do $(m_R^2+\lambda_R v_R^2)$

Właściwie nie wiem, czy takie grafy jak T_4 powinny być rozpatrywane już na poziomie drzewowym, czy dopiero sukcesywnie w wyższych rzędach rachunku zaburzeń.

Warunek znikania tadpoli:

Widzę tu 2 możliwości:

I) Wzmacniamy warunek, aby tadpol, ~~znikał sukcesywnie~~ traktowany jako suma wszystkich możliwych grafów znikał i żądamy, aby takie kasowanie zachodziło w każdym rzędzie rachunku zaburzeń niezależnie. Wtedy branie lub nie branie pod uwagę grafów typu T_4 nie prowadzi do jednoznaczności. Na poziomie drzewowym zarówno warunek $T_1=0$, jak i $T_1+T_4=0$ daje po prostu:

$$m_R^2 = -\lambda_R v_R^2$$

Wtedy $T_5\equiv 0$ i na poziomie „one-loop" warunek $T_2+T_3=0$ wiąże nam δv_0 z innymi stałymi renormalizacyjnymi.

$$\frac{3}{16\pi^2}\lambda_R v_R\left(\Delta-\ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2}+1\right)-\frac{1}{m_F^2}\left(m_F^2\delta v_0+v_R\delta m_0^2+\delta Z_\lambda\lambda_R v_R^3\right)=0$$

$$m_F^2=m_R^2+3\lambda_R v_R^2=-2m_R^2 \qquad \lambda_R v_R^2=-m_R^2$$

$$\frac{3}{16\pi^2}\frac{-m_R^2}{v_R}\left(\Delta-\ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2}+1\right)-\delta v_0-\frac{v_R}{m_F^2}\delta m_0^2-\frac{\delta Z_\lambda(-m_R^2)v_R}{-2m_R^2}=0$$

$$\frac{3}{16\pi^2}\lambda_R v_R\left(\Delta-\ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2}+1\right)-\delta v_0-v_R\frac{\delta m_0^2}{m_F^2}-\frac{1}{2}v_R\delta Z_\lambda=0$$

$$(*)\quad \frac{\delta v_0}{v_R}=-\frac{1}{2}\delta Z_\lambda-\frac{\delta m_0^2}{m_F^2}+\frac{3}{16\pi^2}\lambda_R\left(\Delta-\ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2}+1\right)$$

Co wydaje się ciekawe, jeśliby w jakimś schemacie (MS?) δZ_λ i δm_0^2 miałyby tylko część nieskończoną, proporcjonalną do Δ, to w $\frac{\delta v_0}{v_R}$ pojawia się skończony dodatek $-\frac{3}{16\pi^2}\lambda_R\left(1-\ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2}\right)$

Przy takim podejściu nigdzie nie ma miejsca na kłopoty z logarytmami v_R, i v_R jako funkcja m_R i λ_R wyznaczone jest już na poziomie drzewowym, a znikanie tadpola 1-loop wyznacza zależność δv_0 od pozostałych stałych renormalizacji. Pytanie, czy kasowanie rząd po rzędzie jest – konsystentne – nie potrafię podać przewidywań. A może takie podejście jest typowe, to znaczy w każdej renormalizacji kasuje się wszystko rząd po rzędzie – nigdy nie wyszedłem w swoich rachunkach poza 1 rząd, więc nie mam tego przemyślanego.

II) Żądamy tylko $T=T_1+T_2+T_3=0$ (pomijam dla uproszczenia T_4, T_5)
Wtedy możemy podzielić stałe renormalizacyjne na część skończoną i nieskończoną:

$$\delta Z_i=\delta Z_i^{INF}+\delta Z_i^{FIN}\qquad \delta Z_i^{INF}\propto\Delta$$

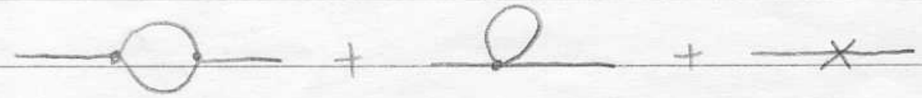
Warunek $T=0$ daje nam wtedy analog (*) dla δv_0^{INF} (tylko z dowolnym v_R) i drugie złożone równanie łączące δv_0^{FIN}, v_R i całą resztę. ~~Ale~~ Wydaje się, że warunek $T=0$ wyznacza δv_0, ale zostawia v_R dowolne – być może jest po prostu za słaby, że wyskakuje równoważność z teorią, która nie ma v_R jako wolnego parametru. A może pomaga (ale jak?) uwzględnienie T_4 i T_5

$$T_1+T_2+T_3=0 \iff -\frac{1}{m_F^2}v_R(m_R^2+\lambda_R v_R^2)+\frac{3}{16\pi^2}\lambda_R v_R\left(\Delta-\ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2}+1\right)-\frac{1}{m_F^2}(m_F^2\delta v_0+v_R\delta m_0^2+\delta Z_\lambda\lambda_R v_R^3)=0$$

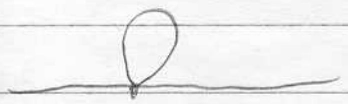
$$m_F^2\frac{\delta v_0}{v_R}=\frac{3}{16\pi^2}\lambda_R m_F^2\left(\Delta-\ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2}+1\right)-m_R^2-\lambda_R v_R^2-\delta m_0^2-\delta Z_\lambda\lambda_R v_R^2$$

Wkład do energii własnej

Niezależnie, czy wybierzemy jako warunek znikania tadpoli I czy II, to pozostają grafy



1)

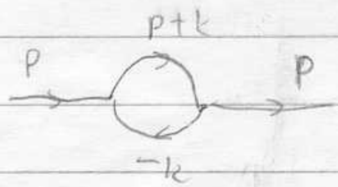


$$C = \frac{1}{2}$$

$$i\Sigma_1 = \left(-6i\lambda_R\right) C \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2-m_F^2} = -3i\lambda_R \frac{i^2}{(4\pi)^2} m_F^2 \left(\Delta - \ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2} + 1\right)$$

$$\Sigma_1 = \frac{3}{16\pi^2} \lambda_R m_F^2 \left(\Delta - \ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2} + 1\right)$$

2)



$$C = \frac{1}{2}$$

$$i\Sigma_2 = \left(-6i\lambda_R v_R\right)^2 C\, i^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2-m_F^2)((p+k)^2-m_F^2)}$$

$$= \frac{18\lambda_R^2 v_R^2\, i}{16\pi^2} B_0(p, m_F^2, m_F^2) \qquad m_F^2 = 2\lambda_R v_R^2$$

$$\Sigma_2 = \frac{9}{16\pi^2}\lambda_R m_F^2 B_0(p, m_F^2, m_F^2) = \frac{9}{16\pi^2}\lambda_R m_F^2 \left(\Delta - \ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2} + F(p, m_F^2, m_F^2)\right)$$

$$F(p, m_F^2, m_F^2) = -\int_0^1 dx \ln\frac{m_F^2 - p^2 x(1-x)}{m_F^2} \qquad F(0, m_F^2, m_F^2) = 0$$

$$\Sigma_2 = \frac{9}{16\pi^2} \underbrace{\lambda_R m_F^2}_{\text{Tu } 2\lambda_R^2 v_R^2} \left(\Delta - \ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2} + F(p^2, m_F^2, m_F^2)\right)$$

3) —×—

$$i\Sigma_3 = i\left[\delta Z_\Phi p^2 - \delta m_0^2 - 3\,\delta Z_\lambda \lambda_R v_R^2 - 6\lambda_R v_R \delta v_0\right]$$

$$\Sigma_3 = \delta Z_\Phi p^2 - \delta m_0^2 - 3\,\delta Z_\lambda \lambda_R v_R^2 - 6\lambda_R v_R^2 \frac{\delta v_0}{v_R}$$

Razem: (bez założenia $m_R^2 = -\lambda_R v_R^2$)

$$\Sigma_1 = \frac{3}{16\pi^2}\lambda_R m_F^2\left(\Delta - \ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2} + 1\right)$$

$$\Sigma_2 = \frac{9}{16\pi^2} 2\lambda_R^2 v_R^2\left(\Delta - \ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2} + F(p^2, m_F^2, m_F^2)\right)$$

$$\Sigma_3 = \delta Z_\Phi p^2 - \delta m_0^2 - 3\,\delta Z_\lambda \lambda_R v_R^2 - 6\lambda_R v_R^2 \frac{\delta v_0}{v_R}$$

$$\frac{\delta v_0}{v_R} = -\frac{m_R^2 + \lambda_R v_R^2}{m_F^2} - \frac{\delta m_0^2}{m_F^2} - \frac{\delta Z_\lambda \lambda_R v_R^2}{m_F^2} + \frac{3}{16\pi^2}\lambda_R\left(\Delta - \ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2} + 1\right)$$

Teraz można wyeliminować z równań δv_0, ale warunki na $\Sigma(m_F^2)$ i np. $\frac{\partial\Sigma}{\partial p^2}\Big|_{m_F^2}$ chociaż wyznaczą δZ_Φ i δm_0^2, to v_R dalej jest dowolne. Dalej biorę korzystając z warunku $\lambda_R v_R^2 = -m_R^2$, $m_F^2 = -2m_R^2 = 2\lambda_R v_R^2$

$$\Sigma_1 = \frac{3}{16\pi^2}\lambda_R m_F^2\left(\Delta - \ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2} + 1\right)$$

$$\Sigma_2 = \frac{9}{16\pi^2}\lambda_R m_F^2\left(\Delta - \ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2} + F(p, m_F^2, m_F^2)\right)$$

$$\Sigma_3 = \delta Z_\Phi p^2 - \delta m_0^2 - \cancel{\tfrac{3}{2} m_F^2 \delta Z_\lambda} + 3m_F^2\left(-\frac{\delta m_0^2}{m_F^2} - \cancel{\tfrac{1}{2}\delta Z_\lambda} + \frac{3}{16\pi^2}\lambda_R\left(\Delta - \ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2} + 1\right)\right) =$$

$$\cancel{= \delta Z_\Phi p^2 + 2\delta m_0^2 - \frac{9}{16\pi^2}\lambda_R m_F^2\left(\Delta - \ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2} + 1\right)}$$

$$= \delta Z_\Phi p^2 + 2\delta m_0^2 - \frac{9}{16\pi^2}\lambda_R m_F^2\left(\Delta - \ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2} + 1\right)$$

$$\Sigma^R = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3$$

$$\Sigma^R = \delta Z_\Phi p^2 + 2\delta m_0^2 + \frac{3}{16\pi^2}\lambda_R m_F^2\left(\Delta - \ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2}\right)\left[1+3-3\right] + \frac{3}{16\pi^2}\lambda_R m_F^2\left[1-3\right] + \frac{9}{16\pi^2}\lambda_R m_F^2 F(p, m_F^2, m_F^2)$$

$$\Sigma^R = \delta Z_\Phi p^2 + 2\delta m_0^2 + \frac{3}{16\pi^2}\lambda_R m_F^2\left(\Delta - \ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2}\right) - \frac{3}{8\pi^2}\lambda_R m_F^2 + \frac{9}{16\pi^2}\lambda_R m_F^2 F(p, m_F^2, m_F^2)$$

Teraz można narzucić warunki renormalizacyjne – np. na powłoce masy:

$$\Sigma^R(m_F^2) = 0$$

$$\frac{\partial \Sigma^R}{\partial p^2}(m_F^2) = 0$$

$$\begin{cases} F(m_F^2, m_F^2, m_F^2) = 2 - \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{dx}{1-x+x^2} = 2 - \frac{2\pi\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\partial F}{\partial p^2}(m_F^2, m_F^2, m_F^2) = \frac{1}{m_F^2}\left(-1 + \int_0^1 \frac{dx}{1-x+x^2}\right) = \frac{1}{m_F^2}\left(\frac{4\pi\sqrt{3}}{9} - 1\right) \end{cases}$$

$$0 = \delta Z_\Phi + \frac{9}{16\pi^2}\lambda_R m_F^2 \frac{\partial F}{\partial p^2}(m_F^2) = \delta Z_\Phi + \frac{9}{16\pi^2}\lambda_R\left(\frac{4\pi\sqrt{3}}{9} - 1\right)$$

$$\delta Z_\Phi = \frac{9}{16\pi^2}\lambda_R\left(1 - \frac{4\pi\sqrt{3}}{9}\right)$$

$$0 = \frac{9}{16\pi^2}\lambda_R m_F^2\left(1 - \frac{4\pi\sqrt{3}}{9}\right) + 2\delta m_0^2 + \frac{3}{16\pi^2}\lambda_R m_F^2\left(\Delta - \ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2}\right) - \frac{3}{8\pi^2}\lambda_R m_F^2 + \frac{9}{16\pi^2}\lambda_R m_F^2\, 2\left(1 - \frac{\pi\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\delta m_0^2 = \frac{3}{16\pi^2}\lambda_R m_F^2 - \frac{3}{32}\lambda_R m_F^2\left(\Delta - \ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2}\right) - \frac{9}{32}\lambda_R m_F^2\left(3 - \frac{10\pi\sqrt{3}}{9}\right)$$

$$\Sigma^{REN} = \frac{9}{16\pi^2}\lambda_R\left[\left(p^2 - m_F^2\right)\left(1 - \frac{4\pi\sqrt{3}}{9}\right) + m_F^2\left(F(p, m_F^2, m_F^2) - 2 + \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}\right)\right]$$

$$m_F^2 = -2m_R^2 = 2\lambda_R v_R^2$$

MODEL II

$$L_0 = \frac{1}{2}(\partial\varphi_0)^2 - \frac{1}{2}(m_0^2 + 3\lambda_0 v_0^2)\varphi_0^2 - v_0(m_0^2 + \lambda_0 v_0^2)\varphi_0 - \lambda_0 v_0 \varphi_0^3 - \frac{1}{4}\lambda_0\varphi_0^4$$

Teraz od razu wybieram $\lambda_0 v_0^2 = -m_0^2$, wstawiam do L_0, zapominam o istnieniu v_0 i dalej ~~se~~ używam tylko parametrów λ i m

$$L_0 = \frac{1}{2}(\partial\varphi_0)^2 + m_0^2\varphi_0^2 - \sqrt{-\lambda_0 m_0^2}\,\varphi_0^3 - \frac{1}{4}\lambda_0\varphi_0^4$$

Renormalizacja

$$\varphi_R = Z_\varphi^{-1/2}\varphi_0 \qquad \varphi_0 = Z_\varphi^{1/2}\varphi_R$$
$$\lambda_R = Z_\lambda^{-1}Z_\varphi^{2}\lambda_0 \qquad \lambda_0 = Z_\lambda Z_\varphi^{-2}\lambda_R$$
$$m_R^2 = Z_\varphi m_0^2 - \delta m_0^2 \qquad m_0^2 = Z_\varphi^{-1}(m_R^2 + \delta m_0^2)$$

$$L_0 = \frac{1}{2}Z_\varphi(\partial\varphi_R)^2 + Z_\varphi^{-1}(m_R^2 + \delta m_0^2)Z_\varphi\varphi_R^2 - \sqrt{-Z_\lambda Z_\varphi^{-2}\lambda_R Z_\varphi^{-1}(m_R^2+\delta m_0^2)}\,Z_\varphi^{3/2}\varphi_R - \frac{1}{4}Z_\lambda\lambda_R\varphi_R^4$$

$$= \frac{1}{2}Z_\varphi(\partial\varphi_R)^2 + (m_R^2 + \delta m_0^2)\varphi_R - Z_\lambda^{1/2}\sqrt{-\lambda_R(m_R^2+\delta m_0^2)}\,\varphi_R^3 - \frac{1}{4}Z_\lambda\lambda_R\varphi_R^4$$

Teraz $Z_i \to 1 + \delta Z_i$ i rozwijamy do wyrazów liniowych

$$Z_\lambda^{1/2}\sqrt{1 + \frac{\delta m_0^2}{m_R^2}} \cong \left(1 + \frac{1}{2}\delta Z_\lambda\right)\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\delta m_0^2}{m_R^2}\right) \cong 1 + \frac{1}{2}\delta Z_\lambda + \frac{1}{2}\frac{\delta m_0^2}{m_R^2}$$

$$L_0 = \frac{1}{2}(\partial\varphi_R)^2 + \frac{1}{2}\delta Z_\varphi(\partial\varphi_R)^2 + m_R^2\varphi_R^2 + \delta m_0^2\varphi_R^2 - \sqrt{-\lambda_R m_R^2}\,\varphi_R^3 - \frac{1}{2}\left(\delta Z_\lambda + \frac{\delta m_0^2}{m_R^2}\right)\sqrt{-\lambda_R m_R^2}\,\varphi_R^3$$
$$- \frac{1}{4}\delta Z_\lambda\lambda_R\varphi_R^4 - \frac{1}{4}\lambda_R\varphi_R^4$$

$$L_R = \frac{1}{2}(\partial\varphi_R)^2 - \frac{1}{2}m_F^2\varphi_R^2 - \sqrt{\frac{1}{2}\lambda_R m_F^2}\,\varphi_R^3 - \frac{1}{4}\lambda_R\varphi_R^3 \qquad \boxed{m_F^2 = -2m_R^2}$$

$$\Delta L = \frac{1}{2}\delta Z_\varphi(\partial\varphi_R)^2 + \delta m_0^2\varphi_R^2 - \frac{1}{2}\left(\delta Z_\lambda - \frac{2\delta m_0^2}{m_F^2}\right)\sqrt{\frac{1}{2}\lambda_R m_F^2}\,\varphi_R^3 - \frac{1}{4}\delta Z_\lambda\lambda_R\varphi_R^4$$

Wierzchołki:

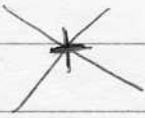
 $-6i\sqrt{\frac{1}{2}\lambda_R m_F^2}$

 $-6i\lambda_R$

Kontrtermy:

 $i\left[\delta Z_\Phi p^2 - 2\delta m_0^2\right]$

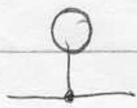
 $6i\sqrt{\frac{1}{2}\lambda_R m_F^2}\left(\frac{\delta m_0^2}{m_F^2} - \frac{1}{2}\delta Z_\lambda\right)$

 $-6i\delta Z_\lambda \lambda_R$

TADPOLE:

1) $T_1 =$  $= \frac{-i}{m_F^2}\cdot\frac{1}{2}\left(-6i\sqrt{\frac{1}{2}\lambda_R m_F^2}\right)\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{k^2-m_F^2} = \frac{3}{16\pi^2}\sqrt{\frac{1}{2}\lambda_R m_F^2}\left(\Delta - \ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2}+1\right)$

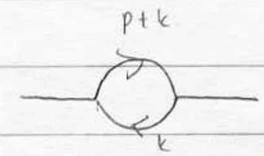
ENERGIA WŁASNA:

$\Sigma =$  $+$  $+$  $+$ 

1) 

$$i\Sigma_1 = (-6i\lambda_R)\frac{1}{2}\int\frac{d^4k}{k^2-m_F^2}(i)$$

$$\Sigma_1 = \frac{3}{16\pi^2}\lambda_R m_F^2\left(\Delta - \ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2}+1\right)$$

2) 

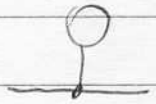
$$i\Sigma_2 = \left(-6i\sqrt{\frac{1}{2}\lambda_R m_F^2}\right)^2\frac{1}{2}i^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{(k^2-m_F^2)((p+k)^2-m_F^2)}$$

$$\Sigma_2 = \frac{9}{16\pi^2}\lambda_R m_F^2\left(\Delta - \ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2} + F(p^2, m_F^2, m_F^2)\right)$$

3) 

$$i\Sigma_3 = i\left[p^2\delta Z_\Phi - 2\delta m_0^2\right]$$

$$\Sigma_3 = p^2\delta Z_\Phi - 2\delta m_0^2$$

4)  $C = \frac{1}{2}$

$$i\Sigma_4 = \left(-6i\sqrt{\tfrac{1}{2}\lambda_R m_F^2}\right) C \cdot \frac{3}{16\pi^2}\sqrt{\tfrac{1}{2}\lambda_R m_F^2}\left(\Delta - \ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2} + 1\right)$$

$$\Sigma_4 = -3\left(\tfrac{1}{2}\lambda_R m_F^2\right)\frac{3}{16\pi^2}\left(\Delta - \ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2} + 1\right) = -\frac{9}{32\pi^2}\lambda_R m_F^2\left(\Delta - \ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2} + 1\right)$$

Razem

$$\Sigma^R = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4$$

$$\Sigma^R = \frac{3}{16\pi^2}\lambda_R m_F^2\left(\Delta - \ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2} + 1\right) + \frac{9}{16\pi^2}\lambda_R m_F^2\left(\Delta - \ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2} + F\right) + p^2\delta Z_\Phi - 2\delta m_0^2 -$$

$$- \frac{9}{32\pi^2}\lambda_R m_F^2\left(\Delta - \ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2} + 1\right)$$

$$= \frac{3}{16\pi^2}\lambda_R m_F^2\left(\Delta - \ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2}\right)\left[1 + 3 - \frac{3}{2}\right] + \frac{3}{16\pi^2}\lambda_R m_F^2\left[1 - \frac{3}{2}\right] + \frac{9}{16\pi^2}\lambda_R m_F^2 F + p^2\delta Z_\Phi - 2\delta m_0^2$$

$$\Sigma^R = \frac{15}{32}\lambda_R m_F^2\left(\Delta - \ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2}\right) - \frac{3}{32}\lambda_R m_F^2 + \frac{9}{16\pi^2}\lambda_R m_F^2 F(p, m_F^2, m_F^2) + p^2\delta Z_\Phi - 2\delta m_0^2$$

Renormalizacja na powłoce masy:

$$0 = \delta Z_\Phi + \frac{9}{16\pi^2}\lambda_R m_F^2 \frac{\partial F}{\partial p^2}\Big|_{m_F^2} \Longrightarrow \delta Z_\Phi = \frac{9}{16\pi^2}\lambda_R\left(1 - \frac{4\pi\sqrt{3}}{9}\right)$$

$$0 = \frac{15}{32}\lambda_R m_F^2\left(\Delta - \ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2}\right) - \frac{3}{32}\lambda_R m_F^2 + \frac{9}{16\pi^2}\lambda_R m_F^2\left(2 - \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{9}{16\pi^2}\lambda_R m_F^2\left(1 - \frac{4\pi\sqrt{3}}{9}\right) - 2\delta m_0^2$$

$$2\delta m_0^2 = \frac{15}{32}\lambda_R m_F^2\left(\Delta - \ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2}\right) - \frac{3}{32}\lambda_R m_F^2 + \frac{9}{16\pi^2}\lambda_R m_F^2\left(3 - \frac{10\pi\sqrt{3}}{9}\right)$$

$$\delta m_0^2 = \frac{15}{64}\lambda_R m_F^2\left(\Delta - \ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2}\right) - \frac{3}{64}\lambda_R m_F^2 + \frac{9}{32\pi^2}\lambda_R m_F^2\left(3 - \frac{10\pi\sqrt{3}}{9}\right)$$

$$\Sigma^{REN} = \frac{9}{16\pi^2}\lambda_R\left[(p^2 - m_F^2)\left(1 - \frac{4\pi\sqrt{3}}{9}\right) + m_F^2\left(F(p, m_F^2, m_F^2) - 2 + \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}\right)\right]$$

$$m_F^2 = -2m_R^2$$

Widać, że w modelu II, z $v_0 \equiv \sqrt{-\frac{m_0^2}{\lambda_0}}$, tadpol nie znika, ale już na poziomie Σ^{REN} teoria daje dokładnie ten sam wynik. Dla pokazania równoważności trzeba by jeszcze w zasadzie porównać one-loop wierzchołki, ale już nie zdążyłem.

Chociaż Σ^{REN} wychodzi takie same (δZ_φ także), ale δm_0^2 jest w modelu I i II inne.

Σ^{REN} w renormalizacji na powłoce masy ma tę samą postać w I i II, ale dotyczy innych pól – w I $\langle\varphi_R\rangle = 0$, w II $\langle\varphi_R\rangle \neq 0$.

W II $\langle\varphi_R\rangle \overset{?}{=} T = \infty$ – co to znaczy?

$\boxed{\text{Porównanie I i II w } \overline{MS}}$

I) $\Sigma^{BARE} = \Sigma_1 + \Sigma_2 = \frac{3}{16\pi^2}\lambda_R m_F^2\left(\Delta - \ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2} + 1\right) + \frac{9}{16\pi^2}\lambda_R m_F^2\left(\Delta - \ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2} + F\right)$

$\Sigma^{REN} = \Sigma^{BARE}_{FIN} = \Sigma^{BARE} + \Sigma_3$

$$\Sigma^{REN} = \frac{-3}{16\pi^2}\lambda_R m_F^2 \ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2}(1+3) + \frac{3}{16\pi^2}\lambda_R m_F^2(1+3F)$$

$$= \frac{-3}{4\pi^2}\lambda_R m_F^2 \ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2} + \frac{3}{16\pi^2}\lambda_R m_F^2(1+3F)$$

$$0 = \frac{12}{16\pi^2}\lambda_R m_F^2\Delta + \delta Z_\Phi p^2 + 2\delta m_0^2 - \frac{9}{16\pi^2}\left(\Delta - \ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2} + 1\right)\lambda_R m_F^2$$

$$\delta Z_\Phi = 0$$

$$0 = 2\delta m_0^2 + \frac{3}{16\pi^2}\lambda_R m_F^2\Delta - \frac{9}{16\pi^2}\left(1 - \ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2}\right)\lambda_R m_F^2$$

$$\begin{cases} \delta Z_\Phi = 0 \\ \delta m_0^2 = -\frac{3}{32\pi^2}\lambda_R m_F^2\Delta + \frac{9}{32\pi^2}\lambda_R m_F^2\left(1 - \ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2}\right) = \frac{3}{32\pi^2}\lambda_R m_F^2\left(-\Delta + 3 - 3\ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2}\right) \\ \Sigma_I^{REN} = \frac{3}{16\pi^2}\lambda_R m_F^2\left(1 - 4\ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2} + 3F(p, m_F^2, m_F^2)\right) \end{cases}$$

Model II) $\Sigma^{BARE} = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_4$ $\qquad \Sigma^{BARE}_{FIN} = \Sigma_{REN} = \Sigma^{BARE} + \Sigma_3$

$$\Sigma^{BARE} = \frac{3}{16\pi^2}\lambda_R m_F^2\left(\Delta - \ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2} + 1\right) + \frac{9}{16\pi^2}\lambda_R m_F^2\left(\Delta - \ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2} + F\right) - \frac{9}{32\pi^2}\lambda_R m_F^2\left(\Delta - \ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2} + 1\right)$$

$$\Sigma^{REN} = -\frac{3}{32\pi^2}\lambda_R m_F^2\left(1 - \ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2}\right) + \frac{9}{16\pi^2}\lambda_R m_F^2\left(F - \ln\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2}\right)$$

$$0 = \frac{3}{16\pi^2}\lambda_R m_F^2\Delta\left(1 + 3 - \frac{3}{2}\right) + p^2\delta Z_\Phi - 2\delta m_0^2$$

$$\delta Z_\Phi = 0$$

$$2\delta m_0^2 = \frac{15}{32\pi^2}\lambda_R m_F^2\Delta$$

$$\begin{cases} \delta Z_\Phi = 0 \\ \delta m_0^2 = \frac{15}{64} \lambda_R m_F^2 \Delta \\ \Sigma_{II}^{REN} = \frac{3}{16\pi^2} \lambda_R m_F^2 \left(-\frac{1}{2} - \frac{5}{2} \ln \frac{m_F^2}{4\pi\mu^2} + 3F(p, m_F^2, m_F^2) \right) \end{cases}$$

W $\overline{MS}$ m_F^2 w I i II nie jest masą fizyczną – tę można otrzymać z równania:

$$M_F^2 - m_F^2 + \Sigma^{REN}(M_F^2) = 0$$

W I i II w $\overline{MS}$ różnią się zarówno Σ^{REN}, jak i δm_0^2. Co ciekawe, δm_0^2 w I zawiera nie tylko człony proporcjonalne do Δ!

~~MODEL $U(1) \times \lambda\Phi^4$~~

$$\cancel{L_0 = -\frac{1}{4} F_0^2 + \overline{D_\mu \Phi_0} D\Phi_0 - \frac{\lambda_0}{2} \left(|\Phi_0|^2 - \frac{m_0^2}{2\lambda_0} \right)^2}$$

$$\cancel{D_\mu \Phi_0 = (\partial_\mu - i g_0 A_{\mu 0}) \Phi_0}$$

~~I) Renormalizacja z V_0 dowolnym + warunek znikania tadpoli~~

$$\cancel{F_0^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu}$$

$$\cancel{F_0^2 = (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = \partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu - \partial^\nu A^\mu \partial_\mu A_\nu + \partial^\nu A^\mu \partial_\nu A_\mu =}$$

$$\cancel{= 2\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - 2\partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu = 2\left[-A_\nu \partial_\mu \partial^\mu A_\nu + A_\mu \partial_\nu \partial^\mu A^\nu \right] =}$$

$$\cancel{= 2\left[-A_\mu \partial^2 A_\nu g^{\mu\nu} + A_\mu \partial^\nu \partial^\mu A_\nu \right] = 2A_\mu (-\partial^2 g^{\mu\nu} + \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu}$$

KONWENCJE:

Pola i stałe: - tylko 3 generacje fermionów

(L, Ψ_L) (R, Ψ_R) (Q, Ψ_Q) (D, Ψ_D) (U, Ψ_u)

(H^1, Ψ_{H_1}) (H^2, Ψ_{H_2}) (B, λ_B) (A, λ_A) (G, λ_G)

SUPERPOTENCJAŁ:

$$W = \mu \epsilon_{ij} H_i^1 H_j^2 + l \epsilon_{ij} H_i^1 L_j R + u \epsilon_{ij} H_i^2 Q_j U + d \epsilon_{ij} H_i^1 Q_j D$$

SOFT TERMS:

$$L_S = -m_1^2 H_i^{1*} H_i^1 - m_2^2 H_i^{2*} H_i^2 + m_{12}^2 (\epsilon_{ij} H_i^1 H_j^2 + c.c.)$$

$$- m_Q^2 Q_i^* Q_i - m_D^2 D^* D - m_U^2 U^* U - m_L^2 L_i^* L_i - m_R^2 R^* R$$

$$+ M_1 \lambda_B \lambda_B + M_2 \lambda_A^i \lambda_A^i + M_3 \lambda_G^a \lambda_G^a + c.c.$$

Średnie $\langle H^1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\langle H^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix}$

stałe renormalizacyjne: - sektor Higgsa

$$H_1^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} Z_{H_1}^{1/2} (v_1^R - \delta v_1 + H_R^0 \cos\alpha_R - h_R^0 \sin\alpha_R + i A_R^0 \sin\beta_R + i G_R^0 \cos\beta_R)$$

$$H_2^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} Z_{H_2}^{1/2} (v_2^R - \delta v_2 + H_R^0 \sin\alpha_R + h_R^0 \cos\alpha_R + i A_R^0 \cos\beta_R + i G_R^0 \sin\beta_R$$

Porównanie z pracą: ROSIEK

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix} v_1^0 \\ v_2^0\end{pmatrix} + Z_R\begin{pmatrix} H_1^0 \\ H_2^0\end{pmatrix} + i Z_H \begin{pmatrix} H_3^0 \\ H_4^0\end{pmatrix}\right] \equiv \begin{pmatrix} H_1^1 \\ H_2^2\end{pmatrix} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} Z_{H_1}^{1/2} & 0 \\ 0 & Z_{H_2}^{1/2}\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} v_1^R - \delta v_1 \\ v_2^R - \delta v_2\end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix} \cos\alpha_R & -\sin\alpha_R \\ \sin\alpha_R & \cos\alpha_R\end{pmatrix}\begin{pmatrix} H_R^0 \\ h_R^0\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} -\sin\beta_R & \cos\beta_R \\ \cos\beta_R & \sin\beta_R\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_R^0 \\ G_R^0\end{pmatrix}\right]$$

$$H_2^1 = Z_{H_1}^{1/2}\left(\sin\gamma_R H_R^- - \cos\gamma_R G_R^-\right)$$
$$H_1^2 = Z_{H_2}^{1/2}\left(\cos\gamma_R H_R^+ + \sin\gamma_R G_R^+\right)$$

$$\begin{pmatrix} H_2^{1*} \\ H_1^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{H_1}^{1/2} & 0 \\ 0 & Z_{H_2}^{1/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin\gamma_R & -\cos\gamma_R \\ \cos\gamma_R & \sin\gamma_R\end{pmatrix}\begin{pmatrix} H_R^+ \\ G_R^+\end{pmatrix} \equiv Z_H\begin{pmatrix} H_1^+ \\ H_2^+\end{pmatrix}$$

$$m_i^2 = Z_{H_i}^{-1}\left(m_i^{R2} + \delta m_i^2\right)$$
$$m_{12}^2 = Z_{H_1}^{-1/2} Z_{H_2}^{-1/2}\left(m_{12}^{R2} + \delta m_{12}^{R2}\right)$$
$$\mu = Z_{H_1}^{-1/2} Z_{H_2}^{-1/2}\left(\mu^R + \delta\mu\right)$$

Inne pola:

$$A_\mu^i = \left(Z_2^A\right)^{1/2} A_{\mu R}^i \qquad B_\mu = \left(Z_2^B\right)^{1/2} B_\mu^R$$

$$\Psi_L = Z_L^{1/2}\Psi_L^R \quad \Psi_R = Z_R^{1/2}\Psi_R^R \quad \Psi_Q = Z_Q^{1/2}\Psi_Q^R \quad \Psi_D = Z_D^{1/2}\Psi_D^R \quad \Psi_u = Z_u^{1/2}\Psi_u^R$$

stałe gauge: (ustalić numerację!)

$$g_B = Z_1^B \left(Z_2^B\right)^{-3/2} g_B^R \qquad g_A = Z_1^A \left(Z_2^A\right)^{-3/2} g_A^R$$

stałe Yukawy:

$$l, d = Z_{H_1}^{-1/2} Z_{l,d}\, l^R, d^R$$
$$u = Z_{H_2}^{-1/2} Z_u u^R$$

Gauge fixing $L_G = -\frac{1}{2}\left(\partial^\mu G_\mu^a\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\partial_\mu Z_\mu^R - C_R^0 G_R^0\right)^2 - \left|\partial^\mu W_\mu^+ + i C_R^+ G_R^+\right|^2$

ROSIEK

Wybór C_R^0, C_R^+ – mają się kasować wektory mieszające Goldstone – gauge boson w zwer. Lagr.

Wybór $\sin^2\theta_W$ – ma diagonalizować fizyczną macierz Y, Z^R.

Reszta konwencji + znaki + Lagr. – jak w mojej pracy.

POTENCJAŁ HIGGSA

$$\left.\begin{aligned} D_A^i &= g_A\left(H^{1*}T^iH^1 + H^{2*}T^iH^2\right) \\ D_B &= \tfrac{1}{2}g_B\left(-H_i^{1*}H_i^1 + H_i^{2*}H_i^2\right) \\ V_D &= \tfrac{1}{2}\left(D_A^iD_A^i + D_BD_B\right) \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} F_{H_1}^*F_{H_1} &= \mu^2 H_i^{2*}H_i^2 \\ F_{H_2}^*F_{H_2} &= \mu^2 H_i^{1*}H_i^1 \\ V_F &= F_{H_1}^*F_{H_1} + F_{H_2}^*F_{H_2} \end{aligned}\right\}$$

$$V_{SOFT} = \left[-m_{H_1}^2 H_i^{1*}H_i^1 - m_{H_2}^2 H_i^{2*}H_i^2 + m_{12}^2\,\epsilon_{ij}\left(H_i^1H_j^2 + H_i^{1*}H_j^{2*}\right)\right] \times (-1)$$

$$D_A^iD_A^i = g_A^2\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 T^i_{\alpha\beta}T^i_{\gamma\delta}\left(H_\alpha^{1*}H_\beta^1 + H_\alpha^{2*}H_\beta^2\right)\left(H_\gamma^{1*}H_\delta^1 + H_\gamma^{2*}H_\delta^2\right)$$

$$\sum_i T^i_{\alpha\beta}T^i_{\gamma\delta} = 2\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma} - \delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}$$

$$D_A^iD_A^i = \tfrac{1}{4}g_A^2\left[2\left(H_\alpha^{1*}H_\beta^1 + H_\alpha^{2*}H_\beta^2\right)\left(H_\beta^{1*}H_\alpha^1 + H_\beta^{2*}H_\alpha^2\right) - \left(H_i^{1*}H_i^1 + H_i^{2*}H_i^2\right)^2\right]$$

$$= \tfrac{1}{4}g_A^2\left[2\left(H_i^{1*}H_i^1\right)^2 + 2\left|H_i^{2*}H_i^2\right|^2 + 2\left(H_i^{1*}H_i^2\right)\left(H_j^1H_j^{2*}\right) + 2\left(H_i^{2*}H_i^1\right)\left(H_j^1H_j^{2*}\right) - \left(H_i^{1*}H_i^1 + H_i^{2*}H_i^2\right)^2\right]$$

$$D_A^i D_A^i = \frac{1}{4} g_A^2 \left[\left(H_i^{1*} H_i^1\right)^2 + \left(H_i^{2*} H_i^2\right)^2 + 4 \left(H_i^{1*} H_i^2\right)\left(H_j^1 H_j^{2*}\right) - 2 \left(H^{1*} H^1\right)\left(H^{2*} H^2\right) \right]$$

$$= \frac{1}{4} g_A^2 \left(H_i^{1*} H_i^1 - H_i^{2*} H_i^2\right)^2 + g_A^2 \left|H_i^{1*} H_i^2\right|^2$$

$$V_D = \frac{1}{8}(g_A^2 + g_B^2)\left(H_i^{1*} H_i^1 - H_i^{2*} H_i^2\right)^2 + \frac{1}{2} g_A^2 \left| H_i^{1*} H_i^2 \right|^2$$

$$V_F = \mu^2 \left(H_i^{1*} H_i^1 + H_i^{2*} H_i^2\right)$$

$$V_{SOFT} = m_{H_1}^2 H_i^{1*} H_i^1 + m_{H_2}^2 H_i^{2*} H_i^2 + 2 m_{12}^2 \operatorname{Re}\left(+ H_1^1 H_2^2 - H_2^1 H_1^2\right)$$

Łacznie $V = V_D + V_F + V_{SOFT}$

SPRZĘŻENIA HIGGS — GAUGE BOSON

$$L_{HG} = \overline{H^1}\left(\overleftarrow{\partial}_\mu + \frac{i}{2} g_B B_\mu - i g_A T^a A_\mu^a\right)\left(\overrightarrow{\partial}_\mu - \frac{i}{2} g_B B_\mu + i g_A T^a A_\mu^a\right) H^1$$

$$+ \overline{H^2}\left(\overleftarrow{\partial}_\mu - \frac{i}{2} g_B B - i g_A T^a A_\mu^a\right)\left(\overrightarrow{\partial}_\mu + \frac{i}{2} g_B B_\mu + i g_A T^a A_\mu^a\right) H^2$$

Ogólna postać $L = \overline{H}\left(\overleftarrow{\partial}_\mu + \frac{1}{2} i \varepsilon g_B B_\mu - i g_A T^a A_\mu^a\right)\left(\overrightarrow{\partial}_\mu - \frac{1}{2} i \varepsilon g_B B_\mu + i g_A T^a A_\mu^a\right) H$

$$L = (\partial \overline{H})(\partial H) + (\partial \overline{H})\left(-\frac{1}{2} i \varepsilon g_B B + i g_A T^a A^a\right) H + \overline{H}\left(\frac{1}{2} i \varepsilon g_B B - i g_A T^a A^a\right)(\partial H)$$

$$+ \overline{H}\left(\frac{1}{2} i \varepsilon g_B B - i g_A T^a A^a\right)\left(-\frac{1}{2} i \varepsilon g_B B + i g_A T^a A^a\right) H$$

$\varepsilon = \pm 1$, $\varepsilon^2 = 1$, $\partial \overline{H}\, \partial H$ — nieistotne

<u>człon mieszający</u>

$$L_M = -\frac{1}{2} i (\partial \overline{H})\left(\varepsilon g_B B - g_A T^a A^a\right) H + \frac{1}{2} i\, \overline{H}\left(\varepsilon g_B B - g_A T^a A^a\right)(\partial H)$$

$$\cancel{L_M} \qquad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$L_M = \frac{1}{2} i \left[\bar{H} \left(\varepsilon g_B B - g_A \tau^a A^a \right) \partial H - (\partial \bar{H}) \left(\varepsilon g_B B - g_A \tau^a A^a \right) H \right]$$

$$\varepsilon g_B B - g_A \tau^a A^a = \begin{pmatrix} \varepsilon g_B B & 0 \\ 0 & \varepsilon g_B B \end{pmatrix} - g_A \begin{pmatrix} A^3 & A_1 - iA_2 \\ A_1 + iA_2 & -A^3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \varepsilon g_B B - g_A A^3 & A_1 - iA_2 \\ A_1 + iA_2 & \varepsilon g_B B + g_A A^3 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon g_B B - g_A \tau^a A^a = \begin{pmatrix} \varepsilon g_B B - g_A A^3 & A_1 - iA_2 \\ A_1 + iA_2 & \varepsilon g_B B + g_A A^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \bar{c} \\ c & b \end{pmatrix} \equiv T$$

$$\bar{H} T \partial H = \begin{pmatrix} \bar{H}_1 \\ \bar{H}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \bar{c} \\ c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial H_1 \\ \partial H_2 \end{pmatrix} = \left(\bar{H}_1, \bar{H}_2 \right) \begin{pmatrix} a \partial H_1 + \bar{c} \partial H_2 \\ c \partial H_1 + b \partial H_2 \end{pmatrix} =$$

$$= a \bar{H}_1 \partial H_1 + \bar{c} \bar{H}_1 \partial H_2 + c \bar{H}_2 \partial H_1 + b \bar{H}_2 \partial H_2$$

$$\partial \bar{H} \, T H = \left(\partial \bar{H}_1, \partial \bar{H}_2 \right) \begin{pmatrix} a & \bar{c} \\ c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} = \left(\partial \bar{H}_1, \partial \bar{H}_2 \right) \begin{pmatrix} a H_1 + \bar{c} H_2 \\ c H_1 + b H_2 \end{pmatrix} =$$

$$= a H_1 \partial \bar{H}_1 + \bar{c} H_2 \partial \bar{H}_1 + c H_1 \partial \bar{H}_2 + b H_2 \partial \bar{H}_2$$

$$\bar{H} T \partial H - \partial \bar{H} T H = a \left(\bar{H}_1 \partial H_1 - H_1 \partial \bar{H}_1 \right) + b \left(\bar{H}_2 \partial H_2 - H_2 \partial \bar{H}_2 \right) +$$

$$+ c \left(\bar{H}_2 \partial H_1 - H_1 \partial \bar{H}_2 \right) + \bar{c} \left(\bar{H}_1 \partial H_2 - H_2 \partial \bar{H}_1 \right)$$

$$L_M = \frac{1}{2} i \sum_{\text{dubl}} \left\{ \bar{H} T \partial H - \partial \bar{H} T H \right\} \qquad \varepsilon = \begin{matrix} +1 & H_i^1 \\ -1 & H_i^2 \end{matrix}$$

L_M – wylicza mieszanie, wierzchołki i kontrterminy do obu – czyli wszystko.
Generalnie L_M zawiera 2 i 3 rząd w polach

Człon czwartego rzędu:

$$L_4 = \bar{H}\left(\tfrac{1}{2} i \varepsilon g_B B - i g_A T^a A^a\right)\left(-\tfrac{1}{2} i \varepsilon g_B B + i g_A T^a A^a\right) H =$$

$$= \left(\tfrac{1}{2} i\right)\left(-\tfrac{1}{2} i\right) \bar{H}\left(\varepsilon g_B B - g_A T^a A^a\right)\left(\varepsilon g_B B - g_A T^a A^a\right) H =$$

$$= \tfrac{1}{4} \bar{H} T^2 H$$

$$T^2 = \begin{pmatrix} \varepsilon g_B B - g_A A^3 & A_1 - i A_2 \\ A_1 + i A_2 & \varepsilon g_B B + g_A A^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon g_B B - g_A A^3 & A_1 - i A_2 \\ A_1 + i A_2 & \varepsilon g_B B + g_A A^3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a & \bar{c} \\ c & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & \bar{c} \\ c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + |c|^2 & (a+b)\bar{c} \\ (a+b) c & b^2 + |c|^2 \end{pmatrix} = \cancel{\begin{pmatrix} A & \bar{B} \\ B & C \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} A & \bar{C} \\ C & B \end{pmatrix}$$

$$a + b = 2 \varepsilon g_B B$$

$$L_4 = \tfrac{1}{4} \begin{pmatrix} \bar{H}_1 \\ \bar{H}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \bar{C} \\ C & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{4} \left(\bar{H}_1, \bar{H}_2\right) \begin{pmatrix} A H_1 + \bar{C} H_2 \\ C H_1 + B H_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \tfrac{1}{4}\left[A |H_1|^2 + B |H_2|^2 + \bar{C} \bar{H}_1 H_2 + C H_1 \bar{H}_2\right]$$

$$L_4 = \tfrac{1}{4} \sum_{\text{doubl}} \left[A |H_1|^2 + B |H_2|^2 + C H_1 \bar{H}_2 + \bar{C} \bar{H}_1 H_2\right]$$

L_4 – 2, 3 i 4 rząd w polach. Wyliczyć człony masowe, wierzchołki oraz kontrczłony 2 i 3 rzędu.

ODWRACANIE MACIERZY Σ

$$\begin{pmatrix} \Sigma_T g^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\Sigma_L & \Sigma^{12} p^\mu & \Sigma^{13} p^\mu \\ \Sigma^{12}p^\mu & \Sigma^{22} & \Sigma^{23} \\ \Sigma^{13}p^\mu & \Sigma^{23} & \Sigma^{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} D_T g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} D_L & D^{12}p^\mu & D^{13}p^\mu \\ D^{12}p^\mu & D^{22} & D^{23} \\ D^{13}p^\mu & D^{23} & D^{33}\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4\Sigma_T D_T + \Sigma_L D_L + \Sigma_T D_L + \Sigma_L D_T + p^2\Sigma^{12}D^{12} + p^2\Sigma^{13}D^{13} & p^\mu(\Sigma_T D^{12} + \Sigma_L D^{12} + \Sigma^{12}D^{22} + \Sigma^{13}D^{23}) & p^\mu(\Sigma_T D^{13} + \Sigma_L D^{13} + \Sigma^{12}D^{23} + \Sigma^{13}D^{33}) \\ p^\mu(\Sigma^{12}D_T + \Sigma^{12}D_L + \Sigma^{22}D^{12} + \Sigma^{23}D^{13}) & p^2\Sigma^{12}D^{12} + \Sigma^{22}D^{22} + \Sigma^{23}D^{23} & p^2\Sigma^{12}D^{13} + \Sigma^{22}D^{23} + \Sigma^{23}D^{33} \\ p^\mu(\Sigma^{13}D_T + \Sigma^{13}D_L + \Sigma^{23}D^{12} + \Sigma^{33}D^{13}) & p^2\Sigma^{13}D^{12} + \Sigma^{23}D^{22} + \Sigma^{33}D^{23} & p^2\Sigma^{13}D^{13} + \Sigma^{23}D^{23} + \Sigma^{33}D^{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4) $p^2\Sigma^{12}D^{12} + \Sigma^{22}D^{22} + \Sigma^{23}D^{23} = 1$

$\cancel{p^2\Sigma^{13}D^{12} + \Sigma^{23}D^{22} + \Sigma^{33}D^{23} = 0}$

1) $\Sigma_T D^{13} + \Sigma_L D^{13} + \Sigma^{12}D^{23} + \Sigma^{13}D^{33} = 0 \longrightarrow D^{33} = -\frac{\Sigma^{12}}{\Sigma^{13}}D^{23} - \frac{(\Sigma_T+\Sigma_L)}{\Sigma^{13}}D^{13}$

2) $p^2\Sigma^{12}D^{13} + \Sigma^{22}D^{23} + \Sigma^{23}D^{33} = 0$

3) $p^2\Sigma^{13}D^{13} + \Sigma^{23}D^{23} + \Sigma^{33}D^{33} = \cancel{0}\ 1$

(2) $p^2\Sigma^{12}D^{13} + \Sigma^{22}D^{23} - \left(\frac{\Sigma^{12}}{\Sigma^{13}}D^{23} + \frac{(\Sigma_T+\Sigma_L)}{\Sigma^{13}}D^{13}\right)\Sigma^{23} = 0$

$$D^{13}\left(p^2\Sigma^{12} - \frac{\Sigma^{23}}{\Sigma^{13}}(\Sigma_T+\Sigma_L)\right) + \left(\Sigma^{22} - \frac{\Sigma^{12}\Sigma^{23}}{\Sigma^{13}}\right)D^{23} = 0$$

$$D^{23} = -D^{13}\,\frac{p^2\Sigma^{12}\Sigma^{13} - \Sigma^{23}(\Sigma_T+\Sigma_L)}{\Sigma^{22}\Sigma^{13} - \Sigma^{12}\Sigma^{23}}$$