

Dodatek A

Trochę matematyki

A.1 Przestrzeń Hilberta

Grupa

Grupą nazywamy strukturę algebraiczną $(G, +)$, gdzie G jest zbiorem niepustym, a $+$ jest odwzorowaniem $G \times G \ni (g, h) \rightarrow g + h \in G$, spełniającym następujące aksjomaty:

1. $\forall_{g_1, g_2, g_3 \in G} g_1 + (g_2 + g_3) = (g_1 + g_2) + g_3$ (własność łączności)
2. $\exists_{e \in G} \forall_{g \in G} e + g = g + e = g$ (istnienie elementu neutralnego)
3. $\forall_{g \in G} \exists_{h \in G} g + h = h + g = e$ (istnienie elementu odwrotnego)

grupa abelowa spełnia również warunek przemienności działania $+$:

4. $\forall_{g, h \in G} g + h = h + g$

Przykłady: $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, *)$.

Ciało

Ciałem zwiemy strukturę algebraiczną $(K, +, *)$, w której działania $K \times K \ni (g, h) \rightarrow g + h \in K$ oraz $K \times K \ni (g, h) \rightarrow g * h \in K$ spełniają:

1. $(K, +)$ jest grupą abelową
2. $K \setminus \{0, *\}$, gdzie 0 - element neutralny grupy $(K, +)$, jest również grupą abelową
3. $\forall_{f, g, h \in K} f * (g + h) = f * g + f * h$

Przykład: $(\mathbb{R}, +, *)$

Przestrzeń wektorowa

Przestrzenią wektorową (ew. przestrzenią liniową) nad ciałem K zwiemy taką strukturę algebraiczną $(V, +, K, +, *, *)$, że $(V, +)$ jest grupą abelową, $(K, +, *)$ jest ciałem, a działanie $*$: $K \times V \ni (\alpha, v) \rightarrow \alpha * v \in V$ spełnia warunki:

1. $\alpha * (v + w) = \alpha * v + \alpha * w$
2. $(\alpha + \beta) * v = \alpha * v + \beta * v$
3. $\alpha * (\beta * v) = (\alpha * \beta) * v$
4. jeśli elementem neutralnym grupy K jest 1 , to $1 * v = v$

Przykład: $V = \mathbb{R}^3, K = \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \forall_{x, y \in \mathbb{R}^3} x + y &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \\ \forall_{\alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^3} \alpha * x &= (\alpha * x_1, \alpha * x_2, \alpha * x_3) \end{aligned}$$

Przestrzeń unormowana

... to przestrzeń wektorowa, w której każdemu elementowi v przypisujemy jednoznacznie normę $\|v\|$:

1. $\|v\| \geq 0$
2. $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
3. $\|u\| + \|v\| \geq \|u + v\|$
4. $\|\alpha \star v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$

Odległość w przestrzeni unormowanej określamy jako normę różnicy ($\|u - v\|$).

Przestrzeń Banacha

Mówimy, że ciąg $\{x_n\}$ spełnia warunek Cauchy'ego, jeśli $\|x_n - x_{n-1}\| \rightarrow 0$ gdy $n \rightarrow \infty$.

Zbieżność ciągu $\{x_n\}$ do x_∞ oznacza, że $\|x_n - x_\infty\| \rightarrow 0$ gdy $n \rightarrow \infty$.

Przestrzeń wektorową, w której każdy ciąg spełniający warunek Cauchy'ego jest zbieżny (zupełność według normy $\|\cdot\|$), nazywamy przestrzenią Banacha.

Przestrzeń Hilberta

Wprowadźmy w przestrzeni wektorowej H iloczyn skalarny $\langle u, v \rangle : V \times V \rightarrow V$, spełniający dla $u, v, w \in H$ i $\alpha \in R$

1. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
2. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$
3. $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$
4. $\langle v, v \rangle \geq 0$; $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$

Jeśli H jest zupełna według normy $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$, zwiemy ją przestrzenią Hilberta.

Baza i wymiar przestrzeni

Wektory przestrzeni $(V, +, K, +, *, \star)$, tworzące zbiór $\{v_i\}_{i=1..N, v_i \in V}$ nazywamy liniowo niezależnymi, jeśli dla każdego zestawu $\{\alpha_i\}_{i=1..N, \alpha_i \in K}$

$$\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \star v_i = 0 \right) \Rightarrow (\alpha_i \equiv 0)$$

Zbiór wektorów przestrzeni V nazywamy jej bazą, jeśli każdy wektor z V daje się jednoznacznie przedstawić jako kombinacja liniowa wektorów tego zbioru. Wymiar przestrzeni wektorowej mającej bazę złożoną ze skończonej ilości elementów definiujemy jako ilość elementów bazy.

A.2 Twierdzenie o zamianie kolejności całkowania (Fubinięgo)

Twierdzenie 7 (Fubinięgo) *Jeśli*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, x_2)| dx_1 \right) dx_2 < +\infty$$

to

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1$$

A.3 Przekształcenie Z

$$Z\{s(n)\} = S(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) z^{-n}$$

gdzie $S(z)$ – przekształcenie Z sekwencji $s(n)$.

Własności przekształcenia Z – m. in. liniowość, oraz:

$$Z(s(n - n_0)) = z^{-n_0} S(z)$$

A.4 Złożoność obliczeniowa.

A.4.1 Problem stopu

Problem stopu: dla danego algorytmu i danych wejściowych stwierdzić, czy program realizujący algorytm zatrzyma się. Na przykład

```
x=xstart;
do {
  if(x%2==0) x/=2;
  else x=3*x+1;}
while(x!=1);
```

Dla wszystkich danych początkowych ($xstart \in N$) testowanych dotychczas, algorytm zatrzymywał się. Brak jednak dowodu, że zatrzyma się dla *każdego* $xstart$.

Inny przykład: rozważmy dyskretny sygnał s , określony w następujący sposób: $s(n) = 1$ jeśli w rozwinięciu dziesiętnym liczby π występuje sekwencja dokładnie n kolejnych ósemek, $s(n) = 0$ w przeciwnym razie. Ile wynosi np. $s(100)$?

Ogólnie problem stopu jest nierozstrzygalny.

A.4.2 Notacja $\mathcal{O}(\cdot)$

Złożoność obliczeniowa określa to *największą* ilość kroków potrzebnych do wykonania algorytmu. Ze względu na różne architektury komputerów etc. trudno jest podać ogólną definicję „kroku”. W rozważaniach podstawowych wystarczająca jest analiza wzrostu złożoności obliczeniowej z rozmiarem problemu, czyli danych wejściowych. Opisuje ją notacja $\mathcal{O}(\cdot)$. Złożoność „bezmądrze” przeszukiwania listy długości N : $\mathcal{O}(N)$. Przeszukiwanie binarne - $\mathcal{O}(\log_2(N))$.

A.4.3 Problem komiwojażera

Czy istnieje droga przechodząca przez wszystkie z N zadanych miast, krótsza niż X km? Jedyne znany algorytm¹ polega na kompletnym przeglądzie przestrzeni rozwiązań; ponieważ ilość możliwych dróg rośnie z ilością miast jak $N!$, złożoność problemu wynosi $\mathcal{O}(N!)$. Jednak jeśli „zgodniemy” sekwencję kolejnych miast, to możemy w czasie wielomianowym² udowodnić, że przebyta droga spełnia warunki zadania. Jednak nie znamy *deterministycznego* algorytmu znajdowania rozwiązania lub udowadniania, że nie istnieje. Stąd problemy o tych własnościach nazywamy „niedeterministycznie wielomianowymi” – *nondeterministic polynomial*, czyli NP. Do tej klasy należy łamanie szyfrów, stosowanych aktualnie do zabezpieczania transakcji z użyciem kart kredytowych w Internecie. Co ciekawsze, nie udowodniono dotychczas, że rozwiązanie tych problemów w czasie wielomianowym *nie istnieje*.

Sugeruje to, że niektóre z problemów rozstrzygalnych, dla których możemy bez kłopotu ocenić maksymalną ilość kroków potrzebnych do znalezienia rozwiązania, w skali naszego Wszechświata mogą być mimo to uznane za nieobliczalne:

Zainteresowanym tą tematyką polecam książkę [8] „o istocie informatyki”.

¹znany jest szereg algorytmów, opartych np. na sieciach neuronowych, znajdujących rozwiązanie sub-optymalne (*bliskie* najkrótszej drodze)

²wykonywalność w czasie wielomianowym oznacza, że złożoność problemu rośnie z rozmiarem nie szybciej niż dowolny wielomian. I choć konkretne czasy obliczeń mogą być ogromne, to jednak takie problemy zaliczamy do kategorii „łatwo obliczalnych”

Porównajmy dla przykładu, ile cyfr ma...

100^5	11 cyfr
2^{100}	31 cyfr
$100!$	161 cyfr
100^{100}	201 cyfr

... a ile jest cyfr w liczbach określających

<i>liczbę protonów w znanym wszechświecie</i>	126 cyfr
<i>liczbę mikrosekund od Wielkiego Wybuchu</i>	24 cyfry

OBLICZALNOŚĆ

w teorii

nie	problemy nierozstrzygalne (np. stopu)
tak	problemy trudno rozwiązywalne (w czasie wykładniczym)
tak	problemy łatwo rozwiązywalne (w czasie wielomianowym)

w praktyce

nie
nie
tak

Dodatek B

Elektroencefalogram: historia pewnego sygnału

Początki badania bioelektryczności sięgają okresu jedności nauk przyrodniczych. W roku 1786 Luigi Galvani wykonał słynne doświadczenie: jednoczesne dotknięcie mięśnia wypreparowanej kończyny żaby dwoma (połączonymi ze sobą) różnymi metalami wywołuje skurcz. Mimo błędnej interpretacji, doświadczenie to wpłynęło stymulująco na badania elektryczności — prawidłową interpretację podał Alessandro Volta w roku 1796. Minęło 50 lat, nim do istoty „elektryczności zwierzęcej” zbliżył się Du Bois-Reymond, wykazując w roku 1848, że aktywności w nerwie obwodowym towarzyszy niezmiennie zmiana potencjału na jego powierzchni.

Pierwszy opis czynności elektrycznej mózgu [5] pojawił się w roku 1875 w sprawozdaniu z grantu przyznanego przez British Medical Association. Richard Caton wykazał korelację między prostymi czynnościami (ruch głową, przeżuwanie) a zmianą potencjału w odpowiednich obszarach kory mózgowej kotów i królików. Zawarte w raporcie zdanie „*feeble currents of varying directions pass through the multiplier when the electrodes are placed on two points of external surface...*” stanowiło ponadto pierwszy opis elektroencefalogramu. Jednak publikacje Catona w czasopiśmie czysto medycznym przeszły nie zauważone.



Rysunek B.1: Adolf Beck (1863-1942) w szatach rektora Uniwersytetu we Lwowie; w rękach trzyma napisaną wspólnie z Cybulskim „Fizjologię Człowieka”, na palcu złoty sygnet z napisem *Bene merenti facultas medica*, ofiarowany przez Uniwersytet w 40-lecie pracy naukowej. Portret pędzla S. Batowskiego (1934)

W roku 1886 23-letni Adolf Beck rozpoczął pracę na wydziale fizjologii Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie pod kierunkiem profesora Cybulskiego. W roku 1890 obronił rozprawę doktorską *Oznaczenie lokalizacji w mózgu i rdzeniu za pomocą zjawisk elektrycznych* [2]. Podobnie jak inni, zajmujący się podówczas podobną tematyką, nie wiedział o wcześniejszych pracach Catona. Mimo tego, rozprawa jego stanowiła znacznie głębsze studium problemu lokalizacji funkcji sensorycznych w mózgu jak i samego elektroencefalogramu (odkrył m. in. jego desynchronizację w odpowiedzi na bodźce). Wyniki te opublikował w najszerzej czytany piśmie fizjologicznym – *Centralblatt für Physiologie* [1]. Jego krótki artykuł rozpętał burzę pretensji do palmy pierwszeństwa – m. in. Ernest Fleischl von Marxow dowodził, że obserwacje czynności elektrycznej mózgu spisał wcześniej w liście złożonym w ...sejście Cesarskiej Akademii Nauk w Wiedniu (był to pono zwyczaj podówczas nierzadki na niektórych uniwersytetach Europy). Beck odpowiedział skromnie, że technikę badania potencjałów nerwów i konstrukcję elektrod opracował Du Bois-Reymond, więc zastosowanie znanej techniki do rozwiązania nowego problemu nie zasługuje na miano odkrycia. Stwierdził ponadto, że motywem podjęcia tych eksperymentów był konkurs ogłoszony w październiku 1888 przez prof. Cybulskiego, który jest w związku z tym autorem idei. Dyskusję uciął Caton, cytując publikacje swoich wspomnianych powyżej prac.



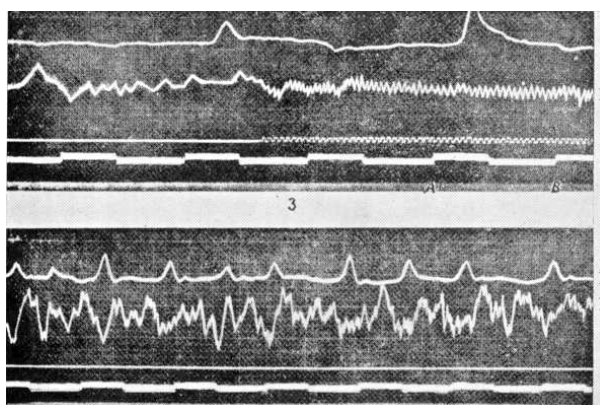
Rysunek B.2: Napoleon Nikodem Cybulski (1854–1919)

Głównym celem opisywanych dotychczas badań było wykorzystanie elektrofizjologii do lokalizacji funkcji w mózgu. Wróćmy jednak do „ubocznego” ich efektu, czyli elektroencefalogramu, dla którego Beck zaproponował nazwę *aktywny prąd niezależny*, w odróżnieniu od prądów wywołanych stymulacją. Ogromne postępy w zakresie jego badania i interpretacji poczynił wspomniany już profesor Napoleon Nikodem Cybulski, choć wieloletni brak funduszy na sprzęt fotograficzny odebrał mu szansę na pierwszeństwo w opublikowaniu zdjęcia elektroencefalogramu (rys. B.3).

Eksperymenty te prowadzono na odsłoniętych mózgach zwierząt. Pierwszy zapis elektroencefalogramu człowieka (z powierzchni czaszki swego syna) uzyskał w roku 1925 Hans Berger, jednak wyniki trzymał w tajemnicy aż do skompletowania bogatego materiału, który opublikował w 1929 w artykule *Über das Elektrenkephalogramm des Menschen* [3]. Artykuł ten stanowi wielką klasykę elektroencefalografii klinicznej, rozpoczął również serię corocznych (do 1938) publikacji Bergera o niemal jednobrzmiących tytułach. Berger potwierdził występowanie w mózgu człowieka większości efektów opisywanych u zwierząt, odrzucił jednak zaproponowaną przez Włodzimierza Włodzimierzowicza Prawdzicz-Niemińskiego (który pierwszy opublikował w 1912 zdjęcie elektroencefalogramu) nazwę „elektrocerebrogram” jako barbarzyński zlepek greki i łaciny.

Historię początków encefalografii opisuje bliżej (po angielsku) książka Mary Brazier [5].

Obecnie, dzięki postępowi fizyki i technologii, dostępnych jest szereg technik obrazowania czynności i struktury mózgu, jak: tomografia komputerowa (CT), magnetyczny rezonans jądrowy (strukturalny i funkcjonalny – MRI, fMRI), pozytonowa tomografia emisyjna (PET) i magnetoencefalografia (MEG).



Rysunek B.3: Fotografia napadu epileptycznego wywołanego drażnieniem kory mózgowej psa. Kolejność w czasie: panel górny, potem dolny, od prawej do lewej. Sygnały (od dołu): znacznik czasu (1 Hz), bodziec, elektrokortikogram (ECoG, potencjał z powierzchni kory), oddech. Początek napadu widać w ECoG po wyłączeniu bodźca z prawej strony górnego panelu i w panelu dolnym w postaci silnie zwiększonej amplitudy w niskich częstotliwościach. Zdjęcie z pracy *Prądy czynnościowe kory mózgowej*, Cybulski i Jeleńska-Macieszyna 1914 [6]

Elektroencefalogram (EEG) wyróżnia się spośród nich, poza najdłuższą historią aplikacji klinicznych, wysoką rozdzielczością czasową, relatywnie niskim kosztem oraz faktem, że nie obciąża pacjenta szkodliwym promieniowaniem. W dniu dzisiejszym technologia zapisu EEG zapewnia wystarczające próbkowanie w czasie i przestrzeni: 10^2 – 10^4 Hz i do ok. 128 obserwowanych jednocześnie odprowadzeń (elektrod na czaszce). Wiele do zrobienia pozostaje natomiast w dziedzinie analizy i interpretacji otrzymanych w ten sposób danych. Znajduje tu zastosowanie większość opisanych w tej książce metod.

Bibliografia

- [1] Adolf Beck. Die ströme der nervencentren. *Centerblatt für Physiologie*, 4:572–573, 1890.
- [2] Adolf Beck. Oznaczenie lokalizacji w mózgu i rdzeniu za pomocą zjawisk elektrycznych. In *Rozpr. Wydz. mat.-przyr.*, number I in Seria II, pages 186–232. Polska Akad. Um., 1891. przedstawiono 20 października 1890.
- [3] Hans Berger. Über das elektrenkephalogramm des menschen. *Arch. f. Psychiat.*, 87:527–570, 1929.
- [4] G. E. P. Box and G. M. Jenkins. *Analiza szeregów czasowych*. PWN, Warszawa, 1983.
- [5] Mary A. B. Brazier. *A History of the Electrical Activity of the Brain, The First Half-Century*. Pitman Medical Publishing, 39 Parker Street, London W.C. 2, 1961.
- [6] Napoleon Cybulski and Jeleńska-Macieszyna. Prądy czynnościowe kory mózgowej. In *Bull. int. Acad. Cracovie*, Seria B, pages 776–781. 1914.
- [7] David E. Goldberg. *Algorytmy genetyczne i ich zastosowania*. WNT, Warszawa, 1995.
- [8] Dawid Harel. *Rzecz o Istocie Informatyki, Algorytmika*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1992.
- [9] J. H. Holland. *Adaptation in natural and artificial systems*. Ann Arbor: The University of Michigan Press, 1975.
- [10] A. G. Piersol J. S. Bendat. *Metody analizy szeregów czasowych*. PWN, Warszawa, 1976.
- [11] Stéphane Mallat and Zhifeng Zhang. Matching pursuit with time-frequency dictionaries. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41:3397–3415, Dec 1993.
- [12] W. S. Sarle. Neural network FAQ. Periodic posting to the newsgroup comp.ai.neural.nets, 2001. URL: <ftp://ftp.sas.com/pub/neural/FAQ.html>.
- [13] Mieczysław Szymczak, editor. *Słownik Języka Polskiego*. PWN, Warszawa, 1989.
- [14] Ryszard Tadeusiewicz. *Sieci Neuronowe*. Akademicka Oficyna Wydawnicza RM, Warszawa, 1993. Dostępna również w Internecie: <http://winntbg.bg.agh.edu.pl/skrypty/1/>.