

Rozdział 3

Pomiędzy czasem a częstotścią

3.1 Zasada nieoznaczoności

Zasada nieoznaczoności (Heisenberga) w mechanice kwantowej nie opisuje granic dokładności pomiarów, lecz fakt, że cząstka *nie może jednocześnie* mieć dobrze określonych np. pędu i położenia: $\Delta x \Delta p_x \geq h/2\pi^1$, gdzie Δ odpowiada wariancji rozkładu prawdopodobieństwa wokół średniej. Podobnie w analizie sygnałów:

Twierdzenie 6 (Zasada nieoznaczoności) *Iloczyn wariancji w czasie σ_t^2 i w częstotści kołowej σ_ω^2 dla funkcji $s \in L^2(\mathbb{R})$ jest nie mniejszy niż $\frac{1}{4}$*

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 \geq \frac{1}{4}$$

gdzie:

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{\|s(t)\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} (t-u)^2 |s(t)|^2 dt$$
$$\sigma_\omega^2 = \frac{1}{2\pi \|s(t)\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega-\xi)^2 |\hat{s}(\omega)|^2 d\omega$$

gdzie:

$$u = \frac{1}{\|s(t)\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} t |s(t)|^2 dt$$
$$\xi = \frac{1}{2\pi \|s(t)\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega |\hat{s}(\omega)|^2 d\omega$$

Dla częstotści $f = \frac{1}{T}$ mamy

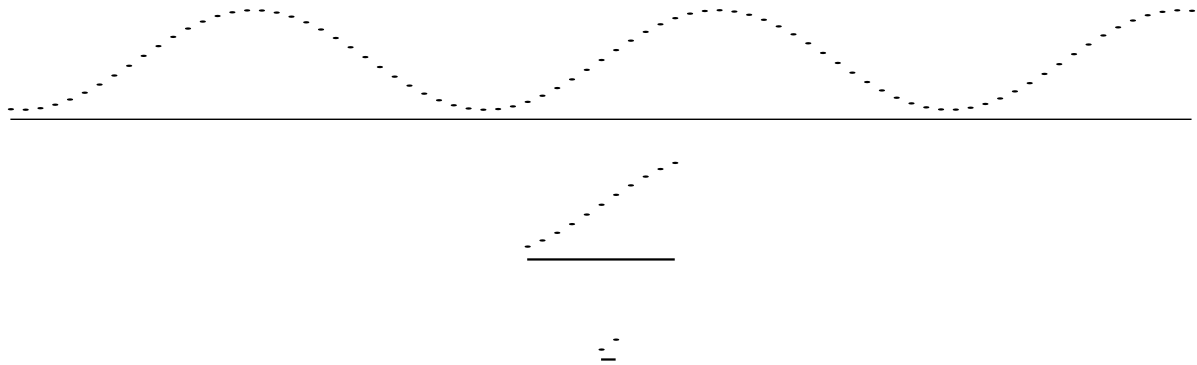
$$\sigma_t^2 \sigma_f^2 \geq \frac{1}{16\pi^2}$$

3.2 Transformata Wignera

Dla sygnałów niestacjonarnych moc widmowa nie musi być stała w czasie, gdyż zawartość częstotści może się zmieniać. Analiza tego typu sytuacji wymaga śledzenia zmian gęstości energii sygnału jednocześnie w czasie i częstotści. Pierwszym pomysłem będzie usunięcie z wzoru (2.29) na moc widmową (twierdzenie Wienera-Chinczyna):

$$\int e^{-i\omega\tau} \left(\int f(t)f(t+\tau)dt \right) d\tau$$

¹stała Plancka $h \approx 10^{-34}$ J s.



Rysunek 3.1: Długi sinus (na górze) ma dobrze określoną częstość, ale nie możemy wiele powiedzieć o jego położeniu w czasie (ciągła linia). Gdy zawężamy (określamy) przedział czasu, w którym sygnał występuje (dolne wykresy), coraz trudniej mówić o częstości

całki po czasie. Dostaniemy w ten sposób² funkcję zależną *explicite* od czasu i częstości — transformatę Wignera-de Ville’a:

$$\mathcal{W}_s(t, \omega) = \int s\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \overline{s\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (3.1)$$

Reprezentacja tej postaci ma podstawowe zalety:

- zachowuje energię sygnału,
- wartości brzegowe: wycałkowana po czasie \mathcal{W}_s daje kwadrat modułu transformaty Fouriera $|s(\omega)|^2$, a wycałkowana po częstości — $|s(t)|^2$,

oraz wady: może być ujemna oraz zawiera *wyrazy mieszane*.

Wyrazy mieszane (*cross-terms*)

Problem ten występuje (z różnym natężeniem) we wszystkich kwadratowych reprezentacjach energii sygnału w przestrzeni czas-częstość; w transformacie Wignera efekt ten jest najbardziej bezpośredni.

Przypomnijmy wzór na kwadrat sumy: $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. Obliczając kwadratową transformatę sygnału złożonego z sumy elementów a i b , dostaniemy reprezentację występujących w sygnale składników a i b oraz wyraz mieszany $2ab$, który może pojawić się w takim rejonie przestrzeni czas-częstość, że w odpowiadającym mu przedziale czasu w sygnale brak jakiegokolwiek aktywności.

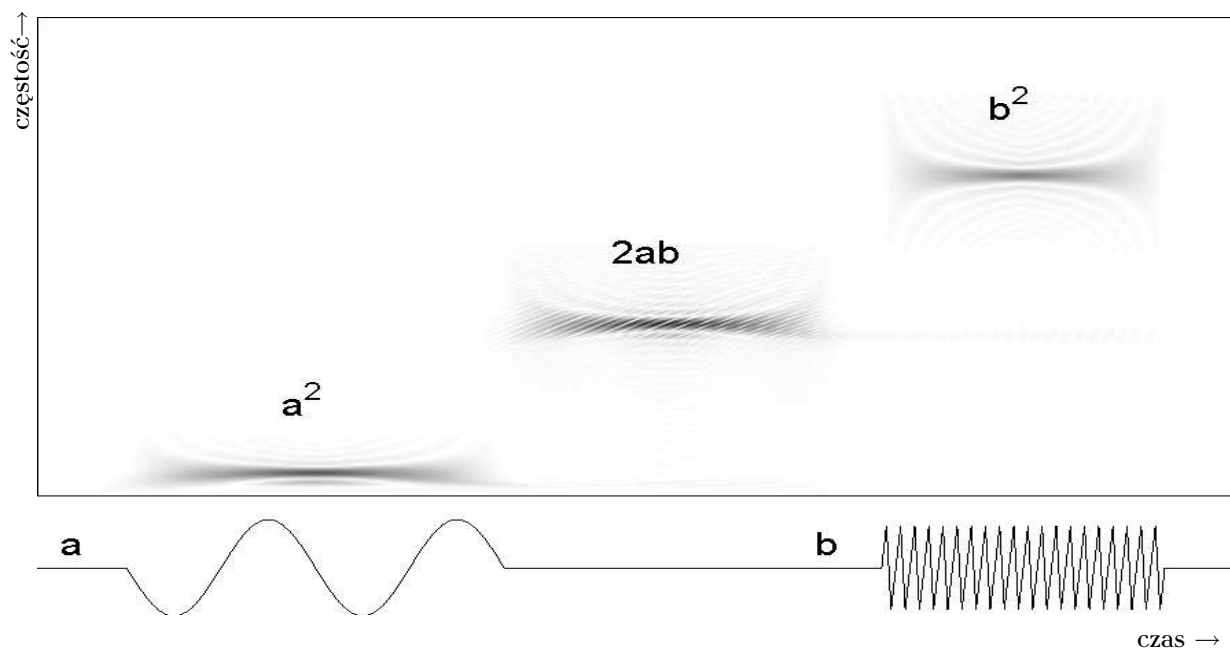
Jednym z głównych zastosowań rozkładów gęstości energii sygnału w przestrzeni czas-częstość (jak ten na rys. 3.2) jest próba odgadnięcia struktury lub własności nieznanego sygnału. W takim przypadku wyrazy mieszane są wysoce mylące — na podstawie samego rozkładu energii z rys. 3.2 moglibyśmy podejrzewać, że w analizowanym sygnale, pomiędzy a i b , znajduje się jeszcze jedna struktura o pośredniej częstości!

Dla zminimalizowania tego efektu możemy wykorzystać spostrzeżenie, że wyrazy mieszane zwykle silnie oscylują, więc lokalne uśrednienie rozkładu (po czasie i częstości) powinno zmniejszyć ich wkład. Różne realizacje tego uśredniania tworzą bogatą klasę rozkładów o zredukowanych interferencjach (ang. *reduced interference distributions, RID*), z których każdy może dawać lepsze od innych rezultaty dla pewnej klasy sygnałów. Jednak w każdym przypadku mamy do czynienia z ogólną prawidłowością: im mniejszy wpływ interferencji (silniejsze uśrednianie) tym gorsza rozdzielczość.

3.3 Spektrogram — oknowana transformata Fouriera

Przepis na krótkoczasową transformatę Fouriera (*Short-Time Fourier Transform, STFT*) polega na wycinaniu kolejnych odcinków sygnału z pomocą okna $g(t)$ ($\|g\| = 1$) i obliczaniu ich transformaty

²Po „wycentrowaniu” autokorelacji $f(t)f(t + \tau)$ do postaci $f\left(t + \frac{\tau}{2}\right)f\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$

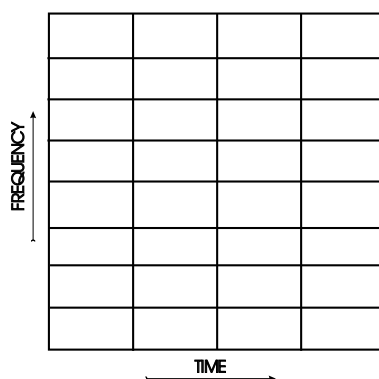


Rysunek 3.2: Sygnał złożony z dwóch sinusów o różnych częstościach (dolny wykres) i moduł jego transformaty Wignera przedstawiony w przestrzeni czas-częstość w odcieniach szarości (powyżej, oś częstości skierowana ku górze). Obserwujemy prawidłowe odtworzenie częstości w okolicy występowania sinusów oraz wyraz mieszany (w środku), występujący w odcinku czasu w którym sygnał jest płaski. Wartości transformaty Wignera w rejonie tej struktury oscylują, co umożliwia zachowanie wartości brzegowych całek po czasie i częstości.

Fouriera. Inaczej można to opisać jako iloczynny skalarne sygnału z oknem g modulowanym częstością ξ :

$$c_{\xi, t_0} = \int s(t)g(t - t_0)e^{i\xi t} dt \quad (3.2)$$

Moduł współczynnika c_{ξ, t_0} mówi o zawartości energii sygnału $s(t)$ w okolicy częstości ξ i czasu t_0 (rys. 3.3).



Rysunek 3.3: Równomierny podział przestrzeni czas-częstość dla oknowanej transformaty Fouriera

3.4 Falki (*wavelets*)

Falka to funkcja $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ o zerowej średniej:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (3.3)$$

Aby spełnić ten warunek, niezerowa funkcja musi oscylować, choć niekoniecznie (wręcz raczej nie) w sposób okresowy, jak „duże” fale e^{ikt} —stąd nazwa.

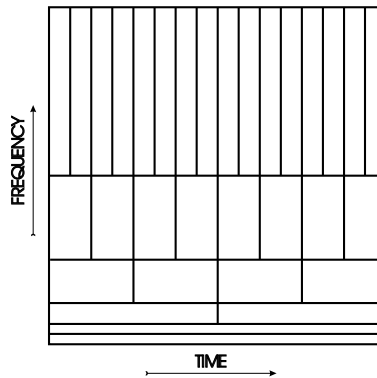
Reprezentacja konstruowana jest ze „współczynników falkowych” - iloczynów skalarnych sygnału ze znormalizowanymi ($\|\psi\| = 1$) funkcjami generowanymi jako przesunięcia i rozciągnięcia falki ψ :

$$c_{s,u} = \langle s, \psi_{s,u} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) dt \quad (3.4)$$

Transformacja odwrotna istnieje, jeśli zbiór falek $\{\psi_i\}_{i \in I}$ tworzy ramę (ang. *frame*):

$$\forall_f \exists A > 0, B < \infty \quad A \|s\|^2 \leq \sum_{i \in I} |\langle \psi_i, s \rangle|^2 \leq B \|s\|^2 \quad (3.5)$$

Dopiero w latach 80. XX wieku udowodniono, że ze specjalnie dobranych falek można skonstruować ortogonalną bazę, jeśli kolejne skale s będą tworzyły sekwencję diadyczną, czyli $s_n = 2^n s_0$. Doprowadziło to do eksplozji zastosowań czasowo-częstościowych metod analizy sygnałów — nie tylko ze względu na cenione przez fizyków własności baz ortogonalnych, jak zachowanie energii reprezentacji czy prosta formuła rekonstrukcji, ale głównie dzięki powstaniu szybkich algorytmów obliczeniowych.



Rysunek 3.4: Podział przestrzeni czas-częstość dla wielorozdzielczej analizy falkowej.

3.4.1 Reprezentacje czas-częstość

Transformata Wignera i jej pochodne dają jako pierwotny wynik estymatę gęstości energii sygnału w przestrzeni czas-częstość; jej pełny obraz zawiera rzędu N^2 wartości — dla sygnału o długości N punktów mamy w każdym punkcie $N/2$ częstości. Z kolei przekształcenia Fouriera czy falkowe opisują sygnał w kategorii współczynników określających „dopasowanie” sygnału do konkretnych funkcji: $e^{i\omega t}$, $g(t)e^{i\omega t}$ czy $\psi\left(\frac{t-u}{s}\right)$. Ilość tych funkcji, których iloczyn z sygnałem będziemy traktować jako jego reprezentację, ustalamy właściwie dowolnie, ale zwykle jest ona bliższa rozmiarowi sygnału N niż N^2 . W szczególnym przypadku bazy ortogonalnej, którą można stworzyć z funkcji $e^{i\omega t}$ lub falek $\psi\left(\frac{t-u}{s}\right)$, będzie ich dokładnie N .

Z tych współczynników możemy również utworzyć mapę gęstości energii sygnału w przestrzeni czas-częstość. Każdy iloczyn określa zawartość energii sygnału w pewnym przedziale czasu i częstości. Ze względu na zasadę nieoznaczoności, iloczyn tych przedziałów („pole”) nie może być dowolnie mały. Dla spektrogramu będą to jednolite przedziały o rozmiarach wyznaczonych przez szerokość okna $g(t)$. Z kolei w przypadku transformacji falkowej wzrost częstości funkcji związany jest ze zmianą skali s , czyli „rozciąganiem” ψ , dlatego funkcje o niższej częstości będą zajmowały większy przedział czasu.

Okazuje się, że tworzone w ten sposób estymaty gęstości energii są równoważne pewnym sposobom uśredniania transformaty Wignera.

Która z tych metod jest najlepsza? Przede wszystkim musimy ustalić, co w tym miejscu znaczy „lepszy”. Mamy do czynienia z reprezentacjami sygnału w postaci iloczynów z ustalonymi zestawami funkcji; najlepsza będzie taka reprezentacja, dla której większość z tych iloczynów jest bliska zera. Dlaczego? Przede wszystkim oznacza to, że najważniejsze (lub raczej najsilniejsze) cechy sygnału udało się wyrazić z pomocą niewielu znanych funkcji, których iloczyn z sygnałem są istotnie różne od zera. Tak zwięzyły

opis sygnału odkrywa zwykle jego podstawowe cechy i ułatwia dalszą analizę. Poza poznaniem głównych cech badanego sygnału, wymiernym celem jest często kompresja.

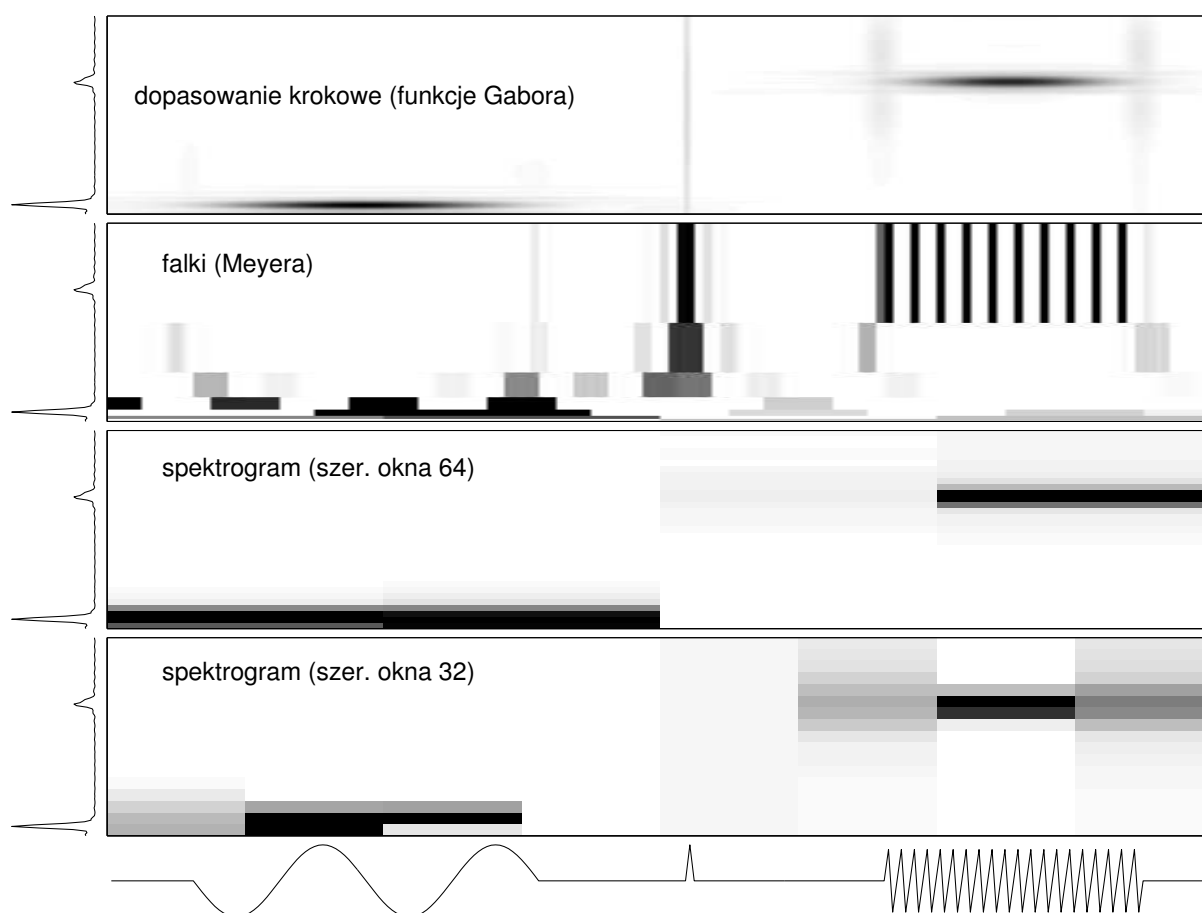
Jeśli funkcje używane do analizy sygnału tworzą bazę ortogonalną, jak w przypadku transformaty Fouriera czy niektórych falek, to reprezentacja w takiej bazie zawiera dokładnie ilość informacji potrzebną do odtworzenia sygnału. Jeśli ilość funkcji wybranych do reprezentacji jest większa niż wymiar bazy, to mamy do czynienia z redundancją, ale odtworzenie sygnału z wartości iloczynów jest zwykle również możliwe. Tak więc jeśli zapiszemy tylko wartości większych iloczynów, to odtworzony z nich sygnał powinien być podobny do oryginału — jest to kompresja stratna, stosowana np. w popularnych formatach mp3 czy jpeg.

mp3, jpeg

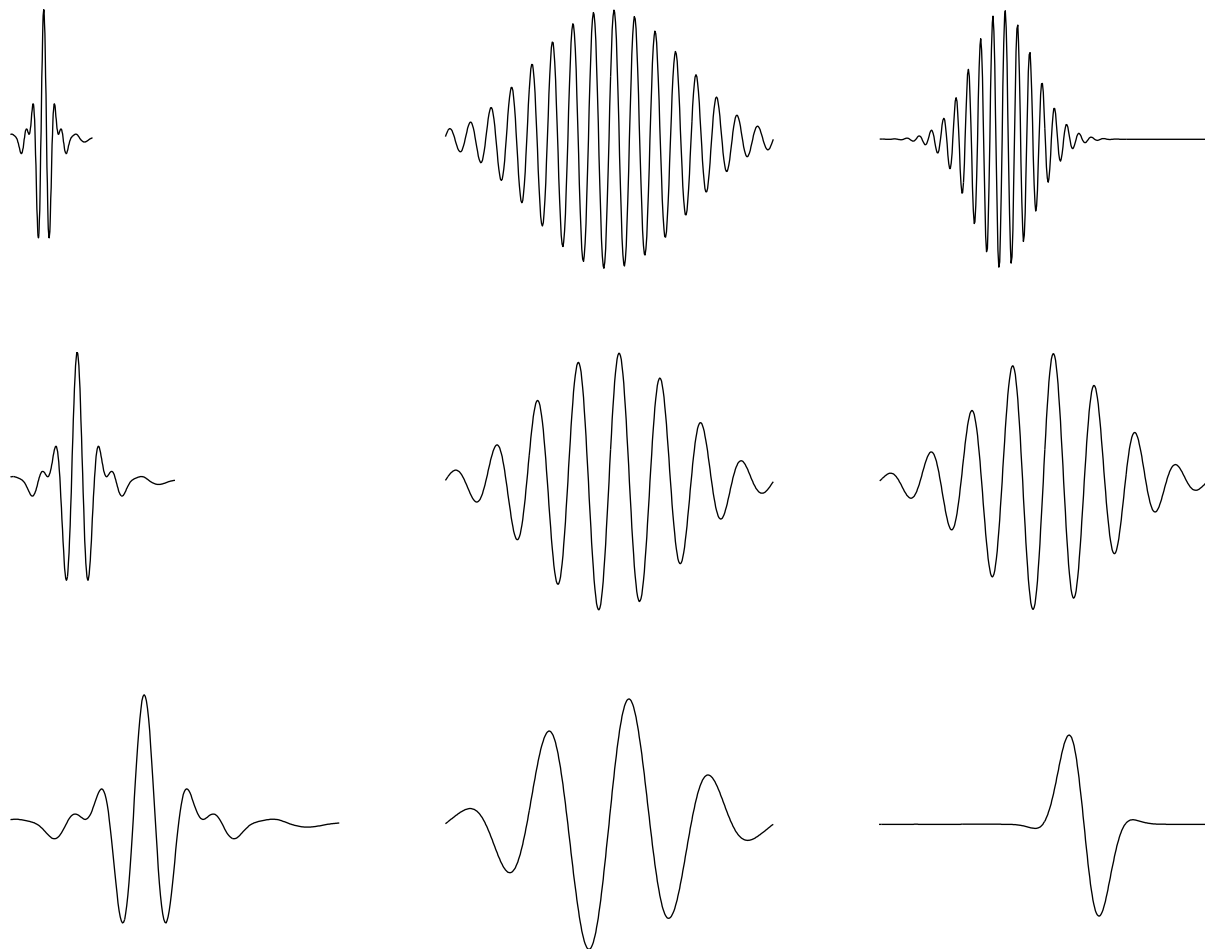
Problem wyboru reprezentacji pozostaje otwarty:

- transformata Fouriera opisuje zwięźle sygnały stacjonarne, w których dominuje niewielka ilość częstości (sinusoidalnych)
- w krótkoczasowej transformacie Fouriera trudno odgadnąć dla nieznanego sygnału optymalną szerokość okna (por. dolne wykresy na rys. 3.5),
- w reprezentacji falkowej (a z różnych falek możemy konstruować różne reprezentacje) zwięźle opiszemy krótkie struktury przejściowe (ang. *transients*), ale np. długi sinus będzie dawał duże wartości iloczynów z wieloma falkami (rys. 3.5)

Dla każdego sygnału zwięźłą reprezentację możemy uzyskać wyrażając go w innym zestawie funkcji. A gdyby tak dopasować reprezentację do sygnału, wybierając odpowiednie funkcje z ogromnego (względem rozmiaru bazy, czyli redundantnego) zestawu? To podejście opisane jest w rozdziale 4.2.



Rysunek 3.5: Reprezentacje gęstości energii sygnału (długości 256 punktów), przedstawionego na dole rysunku, w przestrzeni czas-częstość, liczone na podstawie (od dołu): spektrogramów z oknami szerokości 32 i 64 punkty, transformacji falkowej w bazie ortogonalnych falek (falki Meyera) i algorytmu dopasowania krokowego 4.2. Po lewej stronie każdego wykresu przedstawione widmo mocy sygnału. W każdym przypadku oś częstości skierowana ku górze.



transformata falkowa: rozciąganie i przesuwanie falki bazowej

spektrogram: stała obwiednia modulowana różnymi częstotliwościami

aproksymacje adaptacyjne: zmienna obwiednia i częstota modułacji

Rysunek 3.6: Przykłady funkcji używanych do reprezentacji sygnału na rys. 3.5, w kolumnach od lewej: falki, funkcje używane w spektrogramie, elementy słownika Gabora (dopasowanie krokowe).

Rozdział 4

Reprezentacje przybliżone

W rozdziałach 2.4 i 3 przedstawiliśmy elegancki matematycznie opis właściwości sygnału. Elegancję uzyskano dzięki przyjęciu szeregu upraszczających założeń:

- całki we wzorach na transformaty (Fouriera i Wignera) przebiegają od $-\infty$ do ∞ . W rzeczywistości mamy do czynienia ze skończonymi odcinkami sygnałów
- również falki (rozdział 3.4), których iloczyn skalarny z sygnałem daje szukane współczynniki, są zwykle niezerowe również poza analizowanym odcinkiem sygnału
- nie braliśmy wreszcie pod uwagę faktu, że sygnał może być niedokładną realizacją dopasowywanego modelu, tzn. może w nim występować, poza elementami opisywanymi przez model, *szum*

Szum jest pojęciem względnym; informacja kluczowa dla pewnych zastosowań może stanowić nie pasujące do modelu zakłócenia przy innej analizie tego samego sygnału:

- шум może być wynikiem występowania w sygnale zjawisk nie przewidzianych przez zastosowany do analizy model
- sam model generacji może zawierać elementy stochastyczne (przypadkowe), jak np. przy opisie rozpadu jąder promieniotwórczych
- nawet jeśli sygnał powstaje w wyniku interakcji ściśle deterministycznych procesów, ich ilość i stopień złożoności mogą być tak duże, że dużą ich część (możliwie słabszych) musimy traktować jak szum
- wreszcie *każdy* pomiar sygnału, będący pierwszym stadium analizy, niesie ze sobą błędy pomiarowe

Stopień „zaszumienia” sygnału opisuje stosunek (energii) sygnał/szum (*Signal to Noise ratio*) – S/N. Liczony jest zwykle w decybelach (dB)¹ jako logarytm dziesiętny stosunku całkowitej mocy sygnału P_{syg} do mocy szumu P_{szum} :

$$S/N = 10 \log_{10} \frac{P_{syg}}{P_{szum}} \text{ [dB]} \quad (4.1)$$

Tak więc czas pogodzić się z faktem, że w praktyce najczęściej będziemy zadowalać się, zamiast dokładnego wzoru (1.1), reprezentacjami przybliżonymi typu

$$s(t) \approx \sum_k \alpha_k g_k \quad (4.2)$$

¹najczęstszym zastosowaniem decybeli jest określanie głośności dźwięku, stąd logarymiczna skala odpowiadająca ludzkiej percepcji. W mianowniku pojawia się wtedy moc najcichszego słyszalnego dźwięku (próg słyszalności). Próg bólu to w tej skali ok. 120 dB

4.1 Procesy stochastyczne

Traktowanie szumu jako zakłócenia to tylko jedno z możliwych podejść; np. w modelu AR (par. 2.8) szum jest podstawowym elementem procesu. Model generacji jest do tego stopnia oparty na elemencie stochastycznym, że kolejne realizacje $x_1[n], x_2[n] \dots$ mogą np. w konkretnym punkcie $n = n_0$ nie mieć ze sobą nic wspólnego poza tym, że losowane są z tego samego rozkładu prawdopodobieństwa. Stałe pozostają tylko parametry statystyczne sygnałów $s_i[n]$. W przypadku procesów stacjonarnych (do rzędu n) momenty statystyczne (do rzędu n) będą stałe w czasie.

Przyjmijmy terminologię z fizyki statystycznej: mierzony konkretnie sygnał $s_i[n]$ to realizacja procesu, a zbiór wszystkich możliwych realizacji $\{s_i\}$ to zespół statystyczny. Bezpośrednio daje się przenieść również twierdzenie o ergodyczności, mówiące, że dla stacjonarnych procesów stochastycznych średnia po zespole statystycznym (tj. wszystkich możliwych realizacjach) jest równa średniej po (nieskończonym) czasie.

4.1.1 Estymacja widma mocy na podstawie periodogramu

Periodogram to

$$P_N(\omega_k) = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N x[n] e^{-i\omega_k n} \quad (4.3)$$

gdzie $\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$. Poznajemy, że to po prostu transformata Fouriera sygnału dyskretnego próbkowana w dyskretnych punktach ω_k . Równomierne próbkowanie periodogramu w takiej ilości punktów, ile punktów jest w badanym sygnale, to konwencja dająca przy okazji statystyczną niezależność wielkości $P_N(\omega_k)$. Jeśli w sygnale występuje dokładnie któraś z częstości ω_k , to dla tej wartości otrzymamy wysoki pik. Jednak te akurat częstości nie są w ogólnym przypadku w żaden sposób wyróżnione.

Ta estymata obarczona jest dużym błędem...

Efekt okna prostokątnego

Obliczanie transformaty Fouriera dla skończonego odcinka niesie ze sobą dodatkowe komplikacje. Znamy wartości sygnału $x[n]$ dla $i = 1 \dots N$. Odpowiada to iloczynowi sygnału $\{s[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$ z oknem prostokątnym $w_p[k]$:

$$w_p[k] = \begin{cases} 1 & \text{dla } k = 1..N \\ 0 & \text{dla } k < 0 \vee k > N \end{cases}$$

W efekcie (patrz twierdzenie o splocie na str. 16) otrzymujemy spłot transformaty Fouriera sygnału (nieskończonego) z transformatą Fouriera okna $\hat{w}_p[k]$. Dlatego w praktyce stosujemy okna o łagodniejszym przebiegu transformaty Fouriera—np. Gauss.

Estymacja w praktyce

Praktyczna estymacja widma w oparciu o periodogram przebiega w następujących krokach:

1. Obliczamy iloczyn sygnału $s[n]$ z wybranym oknem $w[n]$, dopasowanym do jego rozmiaru
2. Obliczamy periodogram sygnału $s[n]w[n]$

Dla zmniejszenia błędu estymaty stosuje się jeszcze podział sygnału na krótsze (zachodzące na siebie) odcinki i uśrednianie wyników powyższej procedury dla tych odcinków.

4.2 Przybliżenia adaptacyjne (*adaptive approximations*)

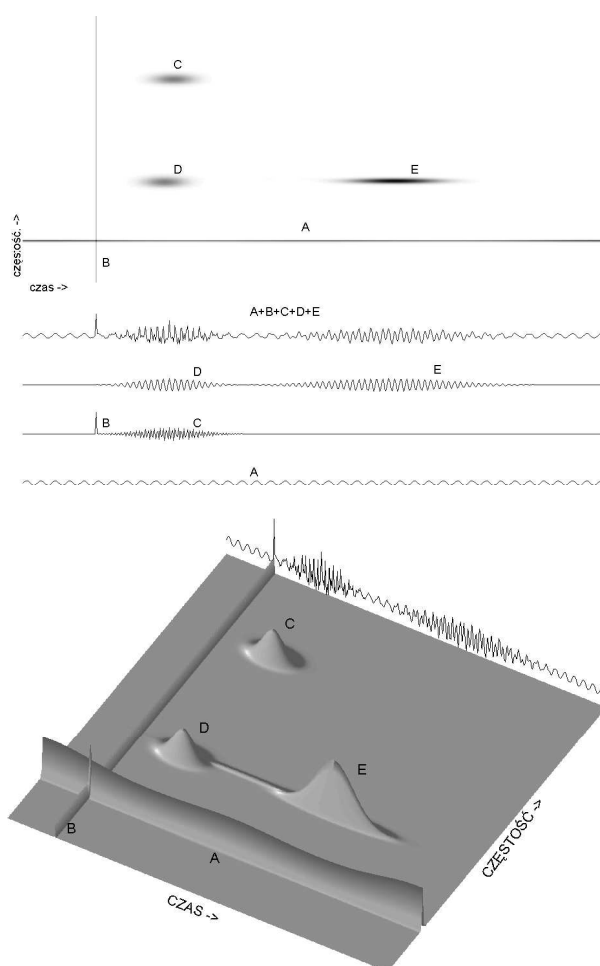
Zrozumieć w kulturze europejskiej znaczy często *powiedzieć własnymi słowami*. Podobnie analiza funkcji polegać może na jej przedstawieniu—lub przybliżeniu—z pomocą funkcji o znanych właściwościach. Kontynuując tę analogię, zbiór znanych funkcji, z pomocą których będziemy chcieli wytłumaczyć funkcję nieznaną, nazwiemy słownikiem. Szczególnym przypadkiem słownika jest baza ortogonalna—najmniejszy kompletny słownik.

Z pomocą niewielu prostych i podstawowych słów można wytłumaczyć niemal dowolnie skomplikowane idee. Jednak opis z użyciem ubogiego słownika nie będzie zwięzły ani elegancki. Dla trafnego wyrażenia subtelnych i nieuchwytnych idei—bądź słabych i przejściowych składowych sygnału—potrzebujemy obszerniejszego słownika, wzbogaconego o wyrażenia fachowe lub licencję poetycką. W analizie sygnałów słownik możemy rozszerzać niemal dowolnie—wystarczy sparametryzować ogólną postać funkcji składowych.

Dokładny opis sygnału (tj. badanej funkcji) w słowniku większym niż baza wprowadza redundancję. Zwięzłość osiągnąć możemy godząc się na *przybliżenie* sygnału, ale za to z pomocą możliwie niewielkiej ilości funkcji. Jeśli ilość wybranych do reprezentacji sygnału funkcji słownika nazwiemy rozmiarem reprezentacji, to dążyć będziemy zwykle do sytuacji, w której:

$$\text{rozmiar reprezentacji} < \text{wymiar bazy} \ll \text{rozmiar słownika}$$

Reprezentację optymalną możemy określić jako taki podzbiór elementów słownika, którego liniowa kombinacja tłumaczy największy procent energii sygnału wśród wszystkich podzbiorów o tej samej liczebności. Wybór takiej reprezentacji jest obliczeniowo NP-trudny², toteż w praktyce zadowalamy się iteracyjnym rozwiązaniem sub-optymalnym—zaproponowanym w 1993 przez S. Mallata i Z. Zhanga [11] algorytmem Matching Pursuit (MP).



Rysunek 4.1: Uzyskana z rozkładu MP gęstość energii sygnału w przestrzeni czas-częstość.

W analizie sygnałów używamy zwykle słowników złożonych z funkcji Gabora (Gauss modulowany sinusem) ze względu na ich optymalną lokalizację w przestrzeni czas-częstość. Reprezentacja złożona z

²NP-hard—klasa problemów, których złożoność obliczeniowa rośnie z rozmiarem problemu szybciej niż dowolny wielomian [8]. Klasycznym przykładem jest problem komiuwojażera, polegający na znalezieniu najkrótszej drogi łączącej określoną liczbę miast. Zobacz również Dodatek A.4.

funkcji Gabora pozwala również na konstrukcję eleganckiej estymaty gęstości energii sygnału w przestrzeni czas-częstość, usuwającej a priori problem wyrazów mieszanych obecny w tego typu dystrybucjach.

4.2.1 Algorytm MP i słowniki czas-częstość

Niech dany będzie (słownik) zbiór funkcji $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ takich, że $\|g_i\| = 1$. Algorytm Matching Pursuit (MP) [11] jest procedurą iteracyjną. W pierwszym kroku wybierana jest funkcja g_{γ_0} dająca największy iloczyn skalarny z sygnałem s , po czym w każdym następnym kroku funkcja g_{γ_n} jest analogicznie dopasowywana do residuum sygnału $R^n s$, pozostałego po odjęciu wyniku poprzedniej iteracji:

$$\begin{cases} R^0 s = s; \\ R^n s = \langle R^n s, g_{\gamma_n} \rangle g_{\gamma_n} + R^{n+1} s; \quad g_{\gamma_n} = \arg \max_{g_{\gamma_i} \in G} |\langle R^n s, g_{\gamma_i} \rangle| \end{cases} \quad (4.4)$$

Ortogonalność $R^{n+1} s$ i g_{γ_n} w każdym kroku procedury implikuje zachowanie energii:

$$\|s\|^2 = \sum_{n=0}^{m-1} |\langle R^n s, g_{\gamma_n} \rangle|^2 + \|R^m s\|^2 \quad (4.5)$$

Jeśli słownik jest kompletny, procedura zbiega do f :

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} \langle R^n s, g_{\gamma_n} \rangle g_{\gamma_n} \quad (4.6)$$

Dyskretny słownik funkcji Gabora

Funkcję (atom) słownika czasowo-częstotliwościowego można wyrazić jako translację (u), rozciągnięcie (s) i modulację (ω) funkcji okna $g(t) \in L^2(\mathbb{R})$

$$g_{\gamma}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} g\left(\frac{t-u}{s}\right) e^{i\omega t} \quad (4.7)$$

Optymalną lokalizację w przestrzeni czas-częstość otrzymujemy dla Gaussowskiej obwiedni $g(t)$, co w przypadku analizy sygnałów o wartościach rzeczywistych daje słownik rzeczywistych atomów Gabora:

$$g_{\gamma}(t) = K(\gamma, \phi) e^{-\pi\left(\frac{t-u}{s}\right)^2} \sin(\omega(t-u) + \phi) \quad (4.8)$$

$K(\gamma, \phi)$ zapewnia normalizację $\|g_{\gamma, \phi}\| = 1$. Pomimo, że analizujemy sygnały dyskretne, parametry dopasowywanych funkcji mogą przyjmować wartości z przedziałów ciągłych. W praktyce korzystamy z relatywnie małych podzbiorów przestrzeni parametrów $\gamma = \{u, s, \omega\}$ ³

Gęstość energii w przestrzeni czas-częstość

Z definicji transformaty Wignera (wzór 3.1, strona 24) i reprezentacji sygnału w postaci sumy dopasowanych przez algorytm funkcji Gabora (równanie 4.6) możemy skonstruować estymatę gęstości energii sygnału w przestrzeni czas-częstość. Transformata Wignera równania (4.6) daje

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_s &= \sum_{n=0}^{\infty} |\langle R^n s, g_{\gamma_n} \rangle|^2 \mathcal{W}_{g_{\gamma_n}} + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m \neq n} \langle R^n s, g_{\gamma_n} \rangle \overline{\langle R^m s, g_{\gamma_m} \rangle} \mathcal{W}_{g_{\gamma_n}, g_{\gamma_m}} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Podwójna suma zawiera wyrazy mieszane, znacząco fałszujące obraz rozkładu energii sygnału w klasycznej transformacie Wignera i pochodnych; minimalizacja ich wkładu w tych rozkładach jest przedmiotem zastosowań zaawansowanych technik matematycznych. Dzięki rozkładowi sygnału postaci równania

³faza Φ jest zwykle przedmiotem osobnej optymalizacji dla każdej dopasowywanej funkcji

(4.6), możliwe jest ich usunięcie *explicite* – po prostu pomijamy podwójną sumę, definiując wielkość $Es(t, \omega)$:

$$Es(t, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle R^n s, g_{\gamma_n} \rangle|^2 \mathcal{W}_{g_{\gamma_n}}(t, \omega) \quad (4.10)$$

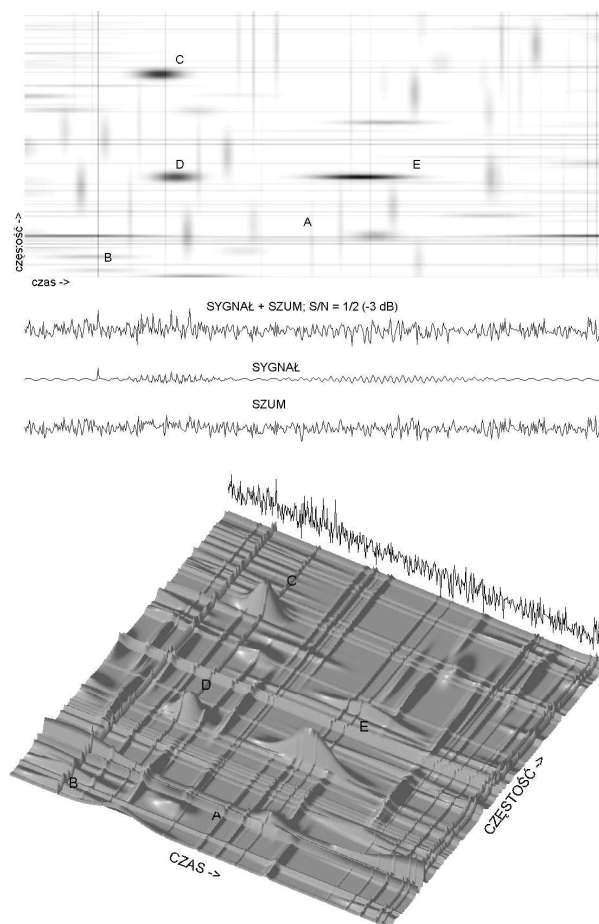
Dystrybucja Wignera pojedynczego atomu g_{γ} spełnia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{W}_{g_{\gamma}}(t, \omega) dt d\omega = \|g_{\gamma}\|^2 = 1 \quad (4.11)$$

co w połączeniu z zachowaniem energii rozwinięcia MP (eq. 4.6) daje

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Es(t, \omega) dt d\omega = \|s\|^2 \quad (4.12)$$

Uzasadnia to interpretację wielkości $Ef(t, \omega)$ jako gęstości energii sygnału $s(t)$ w przestrzeni czas-częstość.



Rysunek 4.2: Dekompozycja sygnału z rys. 4.1 z liniowym dodatkiem szumu o dwukrotnie większej energii ($S/N = -3dB$)

Wynik działania algorytmu ze słownikiem funkcji Gabora przedstawia rysunek 4.1; sygnał zasymulowano jako sumę sinusa, delty Diraca (jednopunktowej nieciągłości) i trzech funkcji Gabora o parami jednakowych położeniach w czasie i częstościach. Rysunek 4.2 przedstawia dekompozycję tegoż sygnału z dodanym liniowo szumem o dwukrotnie większej energii.

