

Fizyka I (Mechanika)

Zadania na ćwiczenia - seria 15

Tydzień 24.01.22-28.01.22

Zadanie 1 (transformacja Lorentza pędu i energii)

Podaj postać transformacji Lorentza pędu i energii.

Rozwiązanie

$$\left\{ \begin{array}{l} cp'_x = \gamma(cp_x - \beta E), \\ cp'_y = cp_y, \\ cp'_z = cp_z, \\ E' = \gamma(E - \beta cp_x), \end{array} \right. \quad \text{oraz transformacja odwrotna:} \quad \left\{ \begin{array}{l} cp_x = \gamma(cp'_x + \beta E'), \\ cp_y = cp'_y, \\ cp_z = cp'_z, \\ E = \gamma(E' + \beta cp'_x), \end{array} \right.$$

Zadanie 2 (jednostki eV, eV/c i eV/c²)

Masa protonu wynosi (około) $1,67 \cdot 10^{-27}$ kg. Ile wynosi jego energia spoczynkowa? Wynik podaj w jednostkach MeV. Podaj masę protonu w jednostkach MeV/c². Zapamiętaj tę wartość, jak również wartość $0,5 \text{ MeV}/c^2$ masy spoczynkowej elektronu oraz fakt, że ma on masę (około) 1840 razy mniejszą od masy protonu. Podaj, w jednostkach MeV/c, pęd protonu, jeśli porusza się on z prędkością $0,8c$.

Rozwiązanie

Energia spoczynkowa protonu:

$$E_0 = mc^2 = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 9 \cdot 10^{16} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 15,03 \cdot 10^{-11} \text{ J} = 15,03 \cdot 10^{-11} \frac{\text{J} \cdot \text{e} \cdot \text{V}}{\text{e} \cdot \text{V}} = 15,03 \cdot 10^{-11} \frac{\text{J} \cdot \text{e} \cdot \text{V}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot \text{V}} = 9,38 \cdot 10^8 \frac{\text{J} \cdot \text{eV}}{\text{J}}$$

$\approx 940 \text{ MeV}$

Masa spoczynkowa i pęd:

$$m = \frac{E_0}{c^2} = 940 \frac{\text{MeV}}{c^2}, \quad p = \gamma \beta cm = \frac{0,6}{0,8} cm = 0,75 c \cdot 940 \frac{\text{MeV}}{c^2} \approx 700 \frac{\text{MeV}}{c}.$$

Uzupełnienie: jednostki keV, MeV, GeV i TeV.

Zadanie 3 (rozpad – warunek mas – zasada zachowania energii)

Jaki warunek muszą spełniać masy m_b , i m_c cząstek b oraz c , aby mogły powstać z rozpadu cząstki a o masie m_a ?

Rozwiązanie

Rozpatrzmy rozpad w układzie odniesienia, w którym cząstka a spoczywa. W układzie takim, jej energia dana jest całkowitą energią spoczynkową, czyli jej masą. W wyniku rozpadu, cząstki b oraz c mają pędy $\mathbf{p}_b$ i $\mathbf{p}_c$. Zasada zachowania energii mówi, że energia całkowita przed rozpadem musi być taka sama jak łączna energia całkowita wszystkich produktów uzyskanych w wyniku rozpadu

$$m_a c^2 = \sqrt{m_b^2 c^4 + c^2 p_b^2} + \sqrt{m_c^2 c^4 + c^2 p_c^2}.$$

Spełnienie tego związku wymaga, aby suma mas produktów rozpadu była mniejsza lub co najwyżej równa masie cząstki rozpadającej się

$$m_a \geq m_b + m_c.$$

W szczególności, w żadnym wypadku w wyniku rozpadu nie może pojawić się cząstka o masie większej niż masa cząstki rozpadającej się. W reakcjach rozpadu, obok takiego typu warunku, występują często dodatkowe reguły wyboru, związane z zasadami zachowania pewnych liczb kwantowych.

Zadanie 4 (rozpad mezonu π^+)

Mezon π^+ o masie (spoczynkowej) $m_\pi = 140 \text{ MeV}/c^2$ rozpada się w spoczynku na lepton μ^+ o masie (spoczynkowej) $m_\mu = 105 \text{ MeV}/c^2$ i neutrino, którego masa jest na tyle mała, że możemy bezpiecznie przyjąć, że jest równa zero. Znajdź pędy i energie (całkowite) produktów rozpadu.

Rozwiązanie

Zasada zachowania pędu mówi, że suma pędów produktów rozpadu musi być równa pędowi cząstki rozpadającej się, a to implikuje równość wartości pędów

$$0 = \mathbf{p}_\pi = \mathbf{p}_\mu + \mathbf{p}_\nu \Rightarrow p \equiv p_\mu = p_\nu$$

i przeciwne zwroty. Podstawiając ten wynik do zasady zachowania energii, kiedy to całkowita wartość energii układu po reakcji musi być taka sama jak przed reakcją. Kiedy mezon π jest w spoczynku, więc jego całkowita energia jest dana jego energią spoczynkową, otrzymujemy równanie na nieznaną pęd p

$$E_\pi = E_\mu + E_\nu \Rightarrow m_\pi c^2 = \sqrt{c^2 p^2 + m_\mu^2 c^4} + cp,$$

które rozwiązujemy

$$m_{\pi}c^2 - cp = \sqrt{c^2 p^2 + m_{\mu}^2 c^4} \Rightarrow (m_{\pi}c^2 - cp)^2 = c^2 p^2 + m_{\mu}^2 c^4 \Rightarrow m_{\pi}^2 c^4 - 2m_{\pi}c^3 p = m_{\mu}^2 c^4 \Rightarrow cp = \frac{m_{\pi}^2 c^4 - m_{\mu}^2 c^4}{2m_{\pi}c^2} = 30,6 \text{ MeV}.$$

Znalezione wyrażenie jest także pędem (i energią = 30,6 MeV) neutrina. Energię mionu otrzymujemy ze związku

$$E_{\mu} = \sqrt{\left(\frac{m_{\pi}^2 c^4 - m_{\mu}^2 c^4}{2m_{\pi}c^2}\right)^2 + m_{\mu}^2 c^4} = \frac{1}{2m_{\pi}c^2} \sqrt{(m_{\pi}^2 c^4 - m_{\mu}^2 c^4)^2 + 4m_{\pi}^2 c^4 m_{\mu}^2 c^4} = \frac{m_{\pi}^2 c^4 + m_{\mu}^2 c^4}{2m_{\pi}c^2} = 109,4 \text{ MeV}.$$

Zadanie 5 (ruch układu środka masy)

Dany jest układ n cząstek o masach m_i , pędach $\mathbf{p}_i$ oraz energiach całkowitych $E_i = \sqrt{m_i^2 c^4 + c^2 p_i^2}$. Z jaką prędkością i w którą stronę porusza się układ ich środka masy?

Rozwiązanie

Całkowity pęd układu cząstek wynosi: $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i$. Zorientujmy układ U (ten, w którym zadane są pędy $\mathbf{p}_i$) oraz poszukiwany układ U' tak, aby oś X każdego z nich była skierowana zgodnie ze zwrotem wektora $\mathbf{P}$. Z transformacji Lorentza mamy

$$cp'_{ix} = \gamma (cp_{ix} - \beta E_i).$$

Zsumujmy wszystkie pędy

$$cP'_x = c \sum_{i=1}^n p'_{ix} = \gamma \left(c \sum_{i=1}^n p_{ix} - \beta \sum_{i=1}^n E_i \right)$$

i zażądajmy, by pęd ten był równy zero

$$0 = cP'_x = \gamma \left(c \sum_{i=1}^n p_{ix} - \beta \sum_{i=1}^n E_i \right) \Rightarrow \beta = \frac{c \sum_{i=1}^n p_{ix}}{\sum_{i=1}^n E_i} \Rightarrow \boldsymbol{\beta} = \frac{c \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i}{\sum_{i=1}^n E_i}.$$

Pozostałe składowe wektora pędu $\mathbf{P}$ są równe zero z konstrukcji. Układ n cząstek możemy potraktować jako jedną cząstkę „złożoną” o masie własnej M (zwanej **masą niezmienniczą** układu cząstek), pędzie $\mathbf{P}$ i energii $E = \sum_{i=1}^n E_i$. Skąd: $\boldsymbol{\beta} = \frac{c\mathbf{P}}{E}$.

Zadanie 6 (reakcja $a + b \rightarrow d + e$)

Cząstka a o masie m_a i pędzie $\mathbf{p}_a$ w laboratorium zderza się ze spoczywającą cząstką b o masie m_b . W wyniku reakcji $a + b \rightarrow d + e$ powstają cząstki d oraz e o masach m_d i m_e . Jakie są pędy tych cząstek w układzie środka masy i układzie laboratoryjnym? Cząstka d emitowana jest pod kątem φ' w układzie środka masy. Pod jakim kątem uleci ona oraz cząstka e w układzie laboratoryjnym?

Rozwiązanie

Przejdźmy do układu środka masy cząstek a oraz b . W układzie tym mamy jedną, spoczywającą „kwazicząstkę” o masie M

$$\begin{aligned} M^2 c^4 &= E^2 - c^2 \mathbf{P}^2 = \left(\sum_{i=1}^n E_i \right)^2 - \left(c \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i \right)^2 = (E_a + m_b c^2)^2 - c^2 p_a^2 = E_a^2 + 2E_a m_b c^2 + m_b^2 c^4 - c^2 p_a^2 \\ &= m_a^2 c^4 + 2E_a m_b c^2 + m_b^2 c^4. \end{aligned}$$

Dalej zadanie rozpatrujemy jak rozpad tej cząstki „złożonej” na cząstki d oraz e .

Zadanie 7 (stała Plancka)

Podaj wartość stałej Plancka $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ w jednostkach $\text{MeV}\cdot\text{fm}/c$. Fotony światła widzialnego o jaskrawej barwie pomarańczowej, emitowane przez rozgrzany sód mają długość fali $\lambda = 590 \text{ nm}$. Oblicz energię takiego fotonu.

Rozwiązanie

$$h \approx 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} = 4,1 \cdot 10^{-21} \frac{\text{MeV} \cdot \text{s} \cdot c}{c} = 4,1 \cdot 10^{-21} \frac{\text{MeV} \cdot \text{s}}{c} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 10^{15} \frac{\text{fm}}{\text{s}} = 12,3 \cdot 10^2 \frac{\text{MeV} \cdot \text{fm}}{c}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \approx 200 \frac{\text{MeV} \cdot \text{fm}}{c}$$

Energia fotonu:

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{12,3 \cdot 10^2 \frac{\text{MeV} \cdot \text{fm}}{c} \cdot c}{590 \cdot 10^6 \text{ fm}} = \frac{12,3 \cdot 10^2}{590} \text{ eV} = \frac{1230}{590} \text{ eV} \approx 2,08 \text{ eV}.$$

Zadanie 8 (krawędź Comptona)

Maksymalna energia kinetyczna E_k , jaką spoczywający elektron może przejść w wyniku rozpraszania Comptonowskiego odgrywa rolę w pomiarach widma promieniowania gamma za pomocą detektorów scyntylacyjnych. Wspomniana wartość nazywana jest **krawędzią Comptona**. W pewnym eksperymencie stwierdzono, że krawędź Comptona wynosi 510 keV. Oblicz energię E padającego promieniowania gamma.

Rozwiązanie

Elektron uzyska maksymalną energię w zderzeniu, jeśli zostanie popchnięty w kierunku lotu kwantu, a kwant się odbije. Niech dodatni kierunek osi Ox wyznacza kierunek lotu pierwotnego kwantu. Wprowadźmy oznaczenia:

E – energia kwantu przed zderzeniem,
 p – pęd kwantu przed zderzeniem,
 p_γ – pęd kwantu po zderzeniu,
 E_γ – energia kwantu po zderzeniu,
 E_e – energia elektronu po zderzeniu,
 p_e – pęd elektronu po zderzeniu.

Wypisujemy zasady zachowania:

$$E + mc^2 = E_\gamma + E_e \quad p = p_e - p_\gamma.$$

i przepisujemy je do postaci:

$$E + mc^2 - E_e = E_\gamma \quad p - p_e = -p_\gamma.$$

Podnosimy obustronnie do kwadratu, mnożymy drugie przez c^2 i odejmujemy je od pierwszego:

$$(E + mc^2 - E_e)^2 - (p - p_e)c^2 = E_\gamma^2 - c^2 p_\gamma^2 = 0.$$

Wykonujemy kwadraty po lewej stronie:

$$E^2 + m^2 c^4 + E_e^2 + 2mc^2 E - 2EE_e - 2mc^2 E_e - c^2 (p^2 - 2pp_e + p_e^2) = 0.$$

i porządkujemy:

$$m^2 c^4 + mc^2 E - EE_e - mc^2 E_e + c^2 pp_e = 0.$$

Otrzymaliśmy już równanie z poszukiwaną energią E , ale wyrażone przez pęd fotonu i elektronu oraz energię całkowitą elektronu. Wyeliminujmy najpierw oba pędy, podstawiając: $E = cp$ oraz $cp_e = \sqrt{E_e^2 - c^4 m^2}$:

$$m^2 c^4 + mc^2 E - EE_e - mc^2 E_e + E\sqrt{E_e^2 - c^4 m^2} = 0$$

oraz porządkujemy:

$$E(\sqrt{E_e^2 - c^4 m^2} - (E_e - mc^2)) = mc^2 (E_e - mc^2)$$

W końcu, wprowadźmy energię kinetyczną elektronu po zderzeniu: $E_k = E_e - mc^2$:

$$E(\sqrt{E_k(E_k + 2mc^2)} - E_k) = mc^2 E_k$$

a trzymujemy

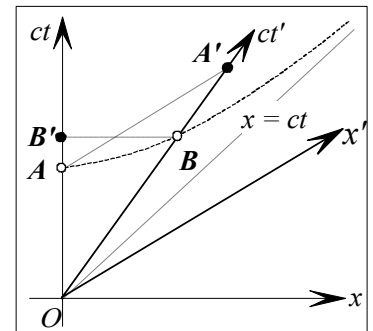
$$E = \frac{mc^2 E_k}{\sqrt{E_k(E_k + 2mc^2)} - E_k} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 + 2\frac{mc^2}{E_k}} - 1} \approx \frac{510}{\sqrt{3} - 1} \approx 700 \text{ keV}.$$

Zadanie 9 (dylatacja czasu)

Układ odniesienia U' porusza się z prędkością v względem układu U wzdłuż jego osi Ox . W chwili, gdy początki obu układów mijają się, zegary są synchronizowane, tj. ich wskazania ustawiane są na zero i układy podróżują dalej. Co powiedzą obserwatorzy w każdym z układów o tym, jak płynie czas w drugim układzie w czasie dalszej podróży?

Rozwiązanie

Układ $U(x, ct)$ to układ, w którym obserwujemy układ $U'(x', ct')$ oddalający z prędkością v wzdłuż osi Ox . Niech w układzie U na zegarze, który znajduje się w początku układu współrzędnych, upłynie jedna godzina od momentu, kiedy to początki obu układów się minęły – na wykresie Minkowskiego obrazuje go puste kółko określone symbolem A . W układzie U' współrzędna czasowa ct' tego zdarzenia prezentuje pełne kółko oznaczone literą A' . Podobnie, jeśli na zegarze znajdującym się w początku układu współrzędnych układu U' minęła godzina, co pokazuje puste kółko oznaczone symbolem B , to współrzędna czasowa ct' tego zdarzenia w układzie U określona jest punktem B' . Na rysunku narysowana jest także, linią przerywaną, hiperbola skalująca osie czasowe wszystkich układów. Jasno widać (nawet jeśli hiperbola nie jest wiernie oddana), że każdy z obserwatorów będzie twierdził, że zegary „tego drugiego” się późnią.



Sprawdźmy to rachunkiem. Zdarzenie A w układzie U ma współrzędne $(0, ct)$, co obserwatorzy w układzie U' opiszą współrzędną $ct' = \gamma ct$, która jest ewidentnie, o czynnik γ , większa od jednostki czasu w układzie U , a więc zegar w układzie U się późni. Wybierzmy teraz zdarzenie B o współrzędnych $(0, ct')$ w układzie U' . W układzie U zdarzenie to będzie miało współrzędną $ct = \gamma ct'$, a więc większą niż wartość ct' – zegar w układzie U' się późni.

Zadanie 10 (względność równoczesności i kontrakcja Lorentza)

W początek i koniec jadącego z prędkością v pociągu o długości L_0 w jego układzie własnym uderzyły dwa pioruny, zostawiając ślady na torach i na pociągu. Obserwatorzy w układzie pociągu stwierdzili, że pioruny te uderzyły jednocześnie. Co powiedzą obserwatorzy w układzie związanym z torami? Jaki odstęp czasowy między uderzeniami pioruna oni odnotuje? Ile wynosi odległość między śladami na torach? Jaka jest długość pociągu w układzie odniesienia związanym z torami?

Rozwiązanie:

Z rysunku wynika, że w układzie związanym z torami odnotujemy najpierw uderzenie pioruna w koniec pociągu (punkt A), a następnie w jego początek (punkt B). Aby znaleźć odstęp czasowy między zdarzeniami, musimy przetransformować punkty $A = (0, -L_0/2)$, $B = (0, L_0/2)$ wyrażone w układzie pociągu, do układu dróżnika. W tym celu skorzystamy z transformacji Lorentza, z której znajdujemy

$$\left. \begin{aligned} ct_A &= \gamma(ct' + \beta x'_A) = -\gamma\beta \frac{L_0}{2} \\ ct_B &= \gamma(ct' + \beta x'_B) = \gamma\beta \frac{L_0}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow t_B - t_A = \gamma\beta \frac{L_0}{2c} + \gamma\beta \frac{L_0}{2c} = \frac{\gamma\beta L_0}{c}.$$

Przykład ten **nie** może posłużyć do znalezienia długości pociągu, jaką zmierzmy w układzie związanym z torami metodą pomiaru odległość między śladami na torach

$$x = \gamma(x' + \beta ct') \Rightarrow \left\{ x'_A = -\gamma \frac{L_0}{2}, x'_B = \gamma \frac{L_0}{2} \right\} \Rightarrow \Delta x = x_B - x_A = \gamma L_0,$$

gdyż w tym układzie pioruny nie uderzyły jednocześnie. W trakcie między jednym a drugim uderzeniem pioruna, pociąg przejechał pewien odcinek po torze. Musimy więc od wielkości Δx odjąć odcinek δx

$$\delta x = (t_B - t_A)v = \frac{\gamma\beta L_0}{c} v = \gamma\beta^2 L_0,$$

jaki przejechał pociąg. W wyniku otrzymujemy

$$L = \Delta x - \delta x = \gamma L' - \gamma\beta^2 L_0 = \gamma(1 - \beta^2) L_0 = \frac{1 - \beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} L_0 = \sqrt{1 - \beta^2} L_0 = \frac{1}{\gamma} L_0.$$

Jest to przykład kontrakcji Lorentza: obiekty w ruchu są krótsze o czynnik $1/\gamma$ od obiektów w spoczynku.

Zadanie 11 (efekt Dopplera)

Układ U' wiążemy z relatywistycznym świetlikiem poruszającym się ze stałą prędkością, zadaną parametrem β , względem układu U . Świetlik ten oddala się po linii prostej, mrugając z okresem T_0 w układzie własnym. Jaką częstotliwość mrugania odnotują obserwatorzy związani z układem U ? Jaką częstotliwość ν mruga świetlika zmierzy pojedynczy widz usadowiony w początku układu U ?

Rozwiązanie

Zacznijmy od wykresu Minkowskiego. Na linii świata ct' świetlika zaznaczone są trzy punkty czasowe O, A i B, w których świetlik mruga. Odstęp czasowy OA oraz AB, mierzony w układzie własnym świetlika, wynosi T_0 . Pozycja x' świetlika w jego układzie własnym wynosi zawsze $x' = 0$. Pozwala nam to, z transformacji Lorentza, znaleźć współrzędną czasową punktu A w naszym układzie (widza)

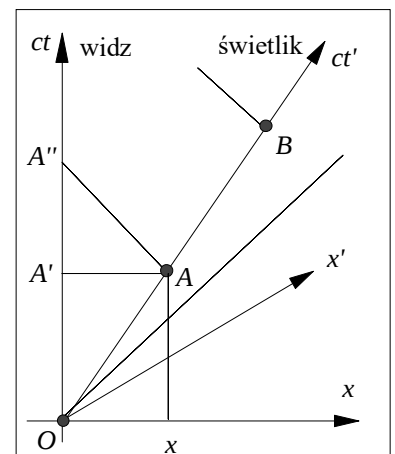
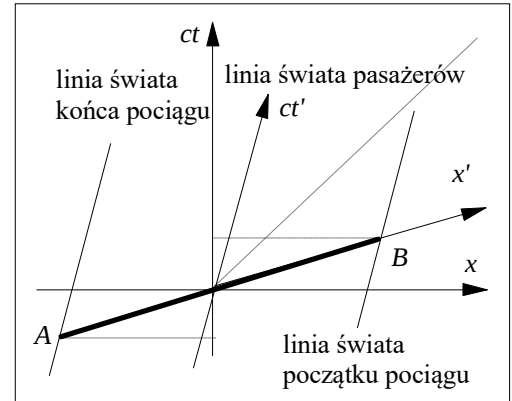
$$cT = \gamma(ct' + \beta x') = \gamma cT_0.$$

Jest to sławetne wyrażenie na dylatację czasu.

Pojedynczy widz dostrzeże pierwszy błysk dopiero wtedy, gdy znajdzie się w punkcie A'' , gdyż musi odczekać dodatkowy przedział czasu, nim światło dotrze do niego. Ten przedział czasu określony jest przez odległość x , jaką przebył świetlik do momentu wysłania sygnału w punkcie A. Odległość tę znajdujemy z transformacji Lorentza

$$x = \gamma(x' + \beta ct') = \gamma\beta cT_0$$

Dzieląc tę odległość przez prędkość światła, otrzymujemy czas, jaki światło potrzebuje na propagację z punktu A do A'' , a dodając go do wyrażenia na dylatację czasu, znajdujemy



$$T'' = \gamma T_0 + \gamma \beta T_0 = \gamma (1 + \beta) T_0 = \frac{1 + \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} T_0 = \frac{1 + \beta}{\sqrt{(1 - \beta)(1 + \beta)}} T_0 = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} T_0.$$

Wyrażenie to pozwala znaleźć częstotliwość ν , mierzoną przez pojedynczego widza, z jaką mruga świetlik

$$\nu = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \nu_0 = \sqrt{\frac{(1 - \beta)^2}{1 - \beta^2}} \nu_0 = \frac{1 - \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \nu_0 \cong (1 - \beta) \nu_0 \quad \text{gdy} \quad v \cong 0, \quad \nu_0 = \frac{1}{T_0}.$$

Ten sam wzór dotyczy każdego zjawiska okresowego, a więc też i czasu, który upływa między przejściem obok nas dwóch kolejnych grzbietów fali elektromagnetycznej, a więc dotyczy także częstotliwości fali światła. Jeśli przypomnimy sobie ze szkoły związek łączący częstotliwość ν_0 z długością fali λ i jej okresem T

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = cT,$$

to stwierdzimy, że

$$\lambda = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \lambda_0 = \sqrt{\frac{(1 + \beta)^2}{1 - \beta^2}} \lambda_0 = \frac{1 + \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \lambda_0 \quad \text{oraz} \quad \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} \equiv \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} - 1$$

i widzimy, że jeśli źródło światła się oddala ($\beta > 0$), zwiększa się długość fali wysyłanego przez niego światła, co żargonowo określamy mianem **przesunięcia ku czerwieni**, natomiast przy przybliżaniu się źródła ($\beta < 0$), jego długość maleje, czyli staje się bardziej niebieskie. Efekt ten nazywamy **zjawiskiem Dopplera**. Jeśli prędkość v poruszającego się obiektu jest mała, to

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \cong \beta.$$