

GEOMETRIA FRONTU SWIETLNEGO
I JEJ ZASTOSOWANIE
DO OPISU DYNAMIKI POLA
GRAWITACYJNEGO

EWA CZUCHRY

Rozprawa doktorska przygotowana
w Katedrze Metod Matematycznych Fizyki
Uniwersytetu Warszawskiego
pod kierunkiem prof. dr. hab. Jerzego Kijowskiego

Wydział Fizyki
Uniwersytet Warszawski
Warszawa 2002

Spis treści

1	Wstęp	3
2	Masywne powłoki materialne	8
2.1	Model Israela	8
2.2	Proponowany opis modelu Israela	10
2.2.1	Tożsamości Bianchiego dla osobliwej części krzywizny	12
2.2.2	Dynamika powłoki materialnej	14
2.2.3	Więzy	23
2.3	Dowody tożsamości użytych przy dowodzie formuły hamiltonowskiej	25
3	Geometria powierzchni zerowych	29
3.1	Geometria wewnętrzna	30
3.2	Geometria zewnętrzna	36
3.3	Niezmienniczy operator dywergencji na S	38
3.4	Równania Gaussa-Codazziego	41
3.5	Struktura tensora Einsteina i tożsamości Bianchiego	42
3.6	Własności obiektu $\tilde{Q}^\mu{}_\nu$	47
3.7	Poprawność definicji operatora $\bar{\nabla}$	52
3.8	Dowód równań Gaussa-Codazziego	54
3.9	Alternatywny dowód równań Gaussa-Codazziego	57
3.10	Izolowane horyzonty	61
4	Ewolucja pola grawitacyjnego w obszarze ograniczonym frontem świetlnym. Termodynamika czarnych dziur	63
4.1	Dynamika pola grawitacyjnego wewnątrz powierzchni zerowej	65
4.2	Dynamika pola grawitacyjnego na zewnątrz powierzchni zerowej	69
4.3	Wyprowadzenie formuły generującej poprzez przejście graniczne z przypadku niezdegenerowanej geometrii brzegu	71
4.4	Dynamika horyzontów zdarzeń	75
4.5	Termodynamika czarnych dziur	75
4.5.1	Wyprowadzenie wzoru (4.72)	78
4.5.2	Dowód tego, że lokalnie κ jest stała wzdłuż \vec{n}	81

5	Materia świetlna	84
5.1	Tensor energii-pędu dla materii typu świetlnego. Tożsamość Belinfantego-Rosenfelda	84
5.2	Niejednoznaczność w wyborze układu odniesienia	88
5.3	Przykłady niezmienniczych gęstości lagranżjanu	89
6	Dynamika samograwitującej powłoki materii świetlnej	95
6.1	Dynamika powłoki materii zerowej	95
6.2	Więzy	100
6.2.1	Przykłady	103
7	Przypadek sferycznie symetryczny	106
7.1	Sferyczna symetria	108
7.2	Rozwiązanie równań więzów	111
7.3	Struktura kanoniczna zredukowanej przestrzeni fazowej	113
7.3.1	Redukcja grawitacyjnej części formy symplektycznej	114
7.3.2	Redukcja materiałowej części formy symplektycznej	116
7.3.3	Geometryczna interpretacja μ	119
7.4	Dynamika. Rekonstrukcja geometrii czasoprzestrzennej	119
7.4.1	Rozwiązanie równań Hamiltona dla zmiennych geometrycznych	121
7.5	Zamiana czasu Schwarzschilda na czas Minkowskiego	121
7.6	Hamiltonian dla dynamiki parametryzowanej czasem Minkowskiego	125

Rozdział 1

Wstęp

Najprostszym przypadkiem frontu świetlnego jest zwykły stożek świetlny w płaskiej przestrzeni Minkowskiego, utworzony przez promienie świetlne dochodzące do danego punktu czasoprzestrzeni i zeń wychodzące. Trójwymiarowa geometria generowana na powierzchni stożka jest zdegenerowana – wyznacznik trójwymiarowego tensora metrycznego jest równy zeru, nie można więc odwrócić metryki indukowanej g_{ab} na tej powierzchni, i nie istnieje jednoznacznie zdefiniowany tensor metryczny ze wskaźnikami kontrawariantnymi \tilde{g}^{ab} odwrotny do g_{ab} . Ze względu na „zerowość” tej metryki wektor n normalny do powierzchni stożka świetlnego jest także wektorem stycznym: iloczyn skalarny $n \cdot e_{(a)} = 0$ jest równy zeru – gdzie $e_{(a)}$ rozpina bazę wektorów stycznych do powierzchni stożka. Ze względu na nieokreśloność metryki kontrawariantnej nie możemy też zastosować standardowej definicji powierzchni krzywizny stożka, która pełni istotną rolę w opisie dynamiki ADM [1].

Ze wszystkimi tymi problemami w przypadku płaskim możemy sobie w miarę łatwo poradzić – mamy przecież do czynienia z czasoprzestrzenią płaską, bez pola grawitacyjnego. Jednak dużo bardziej interesujący jest przypadek mniej trywialny: front świetlny w przestrzeni zakrzywionej – ze względu na możliwe zastosowanie do opisu dynamiki powłoki materii zerowej (np. gazu fotonowego, do niedawna uważano też neutrina za cząstki bezmasowe). Istnieją dwie klasy powierzchni zerowych: powłoki materii zerowej i izolowane horyzonty. Badania nad tymi ostatnimi prowadzone są niezależnie, m.in. przez A. Ashtekara i jego współpracowników [2, 3]. W niniejszej rozprawie zajmiemy się głównie powłokami materii zerowej.

Już opis masywnych powłok materialnych był sporym wyzwaniem. Dynamikę cienkich powłok materialnych jako pierwszy rozważał Werner Israel w swojej pracy [12] z 1966 roku, ze względu na możliwość zastosowania tego opisu do modelu kolapsu grawitacyjnego. Dla powłok materii zerowej pojawiła się jednak trudność związana z degeneracją metryki na tej powierzchni – opisanej na przykładzie stożka świetlnego. Kilka lat temu C. Barrabés i W. Israel [4] uogólnili opis Israela z pracy [12] na przypadek cienkich powłok materii zerowej – używali jednak w tym celu wielkości jawnie zależnych od wyboru układu współrzędnych (cechowania) i nie było jasne, czy teoria ta spełnia wymóg „ogólnej kowariantności”. Celem naszej pracy jest opisanie powierzchni zerowej za pomocą właściwych obiektów geometrycznych oraz wyprowadzenie z pierwszych zasad pełnej dynamiki takiej

powierzchni zerowej. Takiego kanonicznego opisu materii świetlnej w pracach Israela nie było.

Standardowo opisuje się powłokę materialną jako osobliwość czasoprzestrzeni powstającą przy zszyciu dwóch czterowymiarowych rozmaitości M_- i M_+ . Zszycie to następuje wzdłuż pewnej trójwymiarowej (tzn. o jednym wymiarze czasowym i dwóch przestrzennych) hiperpowierzchni S tak, że geometrie indukowane na tej powierzchni po obu stronach zszycia pokrywają się.

Niech K_{ij}^- , K_{ij}^+ oznaczają krzywizny zewnętrzne powierzchni S związane z zanurzeniem tej powierzchni w M_- i M_+ odpowiednio.

Założmy, że $K_{ij}^- \neq K_{ij}^+$. Jak zobaczymy, taki skok krzywizny zewnętrznej można interpretować jako osobliwość (typu dystrybucja „ δ ” Diraca – oznaczaną tak w odróżnieniu od wariacji „ δ ”) krzywiznę czasoprzestrzeni $M_- \cup M_+$, zlokalizowaną właśnie na S . Aby były spełnione równania Einsteina, musi ona odpowiadać cienkiej (o charakterze δ) powłoce materialnej, której tuba świata pokrywa się właśnie z S .

Jeśli $K_{ij}^- = K_{ij}^+$, ale ich pochodne mają skok na S , to mamy do czynienia z tzw. powłoką brzegową (np. brzeg gwiazdy, czyli powierzchnia rozdzielająca obszar próżni na zewnątrz i obszar wypełniony materią wewnątrz gwiazdy), na której tensor Riemanna jest nieciągły ale ograniczony. Przypadkiem tym nie będziemy się w tej pracy zajmować – jest on dobrze udokumentowany w literaturze (np. Lanczos [23]).

Geometria hiperpowierzchni $S \in M$ zawartej w rozmaitości pseudoriemanowskiej (M, g) może być opisana za pomocą dwóch obiektów: obcięcia g_{ab} tensora metrycznego na M do S , oraz krzywizny zewnętrznej K_{ab} tej powierzchni. W naszych rozważaniach do opisu krzywizny zewnętrznej będziemy używać wyrażającego się przez nią pędu ADM, który oznaczamy przez Q^a_b . Obiekt ten pełni kluczową rolę w opisie samograwitującej powłoki materialnej (por. Israel [12, 4]). Będziemy zawsze używali gęstości tensorowej w mieszanej (1 - kontra i 1 - kowariantnej, tzn. z górnym i dolnym wskaźnikiem) reprezentacji. Na poziomie hiperpowierzchni niezerowych jest to zupełnie nieistotne, bowiem indeksy można zawsze podnosić i opuszczać za pomocą niezdegenerowanej metryki takiej hiperpowierzchni. Poza tym, dzieląc lub mnożąc przez element objętości $\sqrt{\det g}$, można łatwo przekształcać gęstości tensorowe w tensory i odwrotnie. Natomiast w przypadku powierzchni frontu świetlnego, której metryka wewnętrzna jest zdegenerowana, i której wyznacznik znika tożsamościowo zaś metryka odwrotna do metryki wewnętrznej nie istnieje, jedynie tensor mieszany Q^a_b ma sens i zawiera pełną informację o powierzchni.

Rozpoczniemy najpierw od streszczenia pełnego (lagranżowskiego i hamiltonowskiego) opisu teorii samograwitującej powłoki *masywnej*. Odchodząc od standardowego sformułowania, opiszemy czasoprzestrzeń M , w której porusza się taka masywna powłoka materialna, jako złożoną z dwóch części, sklejoną wzdłuż powierzchni S tak, że metryka $g_{\mu\nu}$ jest ciągła, a współczynniki Christoffela $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ mogą mieć nieciągłość na S . Tensor Einsteina naszej czasoprzestrzeni zawiera pochodne tych nieciągłości, zatem może być zdefiniowany tylko w sensie dystrybucyjnym jako $\mathcal{G}^a_b = \mathbf{G}^a_b \delta_S$, gdzie δ_S jest dystrybucją „delta” Diraca skoncentrowaną na S . Jak pokażemy w dalszej części pracy, zachodzi następujący związek:

$$\mathbf{G}^a_b = [Q^a_b], \quad (1.1)$$

gdzie nawiasy kwadratowe oznaczają skok pędu ADM między dwiema stronami S . Temu osobliwemu tensorowi Einsteina musi odpowiadać osobliwy (skoncentrowany na S) tensor energii-pędu powłoki materialnej. Z dystrybucyjnych równań Gaussa-Codazziego otrzymamy, że te obiekty, tzn. tensor Einsteina i tensor materii, są zachowane, a prawo zachowania $\nabla_a \mathbf{G}^a_b = 0$ udaje się zapisać w postaci niezmienniczej za pomocą trójwymiarowej geometrii powierzchni S .

Pokażemy, że taka konstrukcja może być uogólniona do przypadku powierzchni zerowej S , odpowiadającej cienkiej powłoce materii świetlnej. Inaczej niż dla powłoki masywnej, dolny wskaźnik \mathbf{G}^a_b nie może być podniesiony (tensor metryczny g_{ab} jest zdegenerowany), a więc gęstość tensorowa \mathbf{G}^{ab} nie może być określona jednoznacznie i tylko \mathbf{G}^a_b jest sensownym obiektem geometrycznym. Odpowiada to faktowi, że symetryczny tensor energii-pędu τ^{ab} materii świetlnej, zdefiniowany jako pochodna lagranżjanu materii względem metryki, nie jest zadany jednoznacznie, ponieważ mamy więzy nałożone na metrykę, względem której różniczkujemy: $\det g_{ab} = 0$. Zatem pochodna lagranżjanu jest zdefiniowana niejednoznacznie, z dokładnością do wyrazu postaci: pochodna więzów pomnożona przez odpowiedni mnożnik Lagrange'a.

Okaże się, że w przypadku frontu świetlnego, osobliwa część tożsamości Bianchiego: $\nabla_a \mathbf{G}^a_b = 0$ (odpowiadająca prawom zachowania dla materii świetlnej) również może być zapisana w postaci niezmienniczej za pomocą trójwymiarowej geometrii powierzchni S i to pomimo faktu, że zdegenerowana metryka g_{ab} nie definiuje żadnej „koneksji metrycznej” na tej powierzchni.

Możliwość zdefiniowania osobliwego tensora Einsteina i jego dywergencji za pomocą standardowych formuł geometrii riemannowskiej, w których dopuszcza się różniczkowanie „w sensie dystrybucji”, znacząco upraszcza stronę rachunkową teorii. Ta technika jest jednak oparta na założeniu ciągłości czterowymiarowej metryki i różni się od techniki używanej przez W. Israela i jego uczniów, którzy bardzo podkreślali, że nie muszą robić takich założeń i wystarczy im jedynie ciągłość trójwymiarowej metryki na samej powierzchni S . Zwracamy jednak uwagę, że nasze „dodatkowe założenie” o ciągłości całej czterowymiarowej metryki nie jest żadnym (geometrycznym lub fizycznym) warunkiem nałożonym na dopuszczone do rozważań konfiguracje pól fizycznych, ale po prostu warunkiem cechowania nałożonym na wybór układu współrzędnych, w którym je opisujemy: jeśli bowiem trójwymiarowa wewnętrzna metryka S jest ciągła, to również pozostałe cztery składowe czterowymiarowej metryki mogą stać się ciągłe po odpowiedniej reparametryzacji współrzędnych. W tym nowym układzie współrzędnych możemy korzystać z technik opartych na teorii dystrybucji, a dynamika wyprowadzona w ten sposób nie zależy od warunków cechowania i jest wyrażona za pomocą równań, które mają sens w dowolnym układzie odniesienia. Zauważmy, że nawet w gładkiej, płaskiej czasoprzestrzeni można wprowadzić taki układ współrzędnych, w którym tylko wewnętrzna trójwymiarowa metryka na jakiejś wybranej hiperpowierzchni $S = \{x^3 = \text{const.}\}$ jest ciągła, a pozostałe składowe czterowymiarowej metryki $g_{3\mu}$ mogą mieć skoki – tzn. być nieciągłe. W tych współrzędnych można dobrze sformułować zagadnienie początkowe oraz całą dynamikę, ale nikt nie używa takich współrzędnych z oczywistych względów. Nasze dodatkowe założenie o ciągłości metryki czasoprzestrzeni opiera się na podobnych przesłankach: aby niepotrzebnie nie komplikować

rzeczy już wystarczająco skomplikowanych.

Struktura pracy jest następująca. W rozdziale 2. opisany jest model Izraela dla masywnych powłok materialnych oraz wprowadzony nasz opis tego modelu. W celu zapoznania Czytelnika z różnicami w obu opisach rozważania zawarte w tym rozdziale dotyczą tylko powłok masywnych. W rozdziale 3. są już wprowadzone powierzchnie zerowe i dokonany szczegółowy opis zarówno ich geometrii wewnętrznej, jak i zewnętrznej. W rozdziale tym są też przedstawione problemy techniczne związane z degeneracją trójwymiarowej metryki indukowanej na tych powierzchniach oraz zaproponowane sposoby ich ominięcia. W tym celu wprowadza się specyficzne obiekty geometryczne zawierające wszystkie informacje potrzebne do opisu powierzchni zerowej. W następnym rozdziale korzysta się z tych obiektów do wyprowadzenia dynamiki pola grawitacyjnego, dla którego dane brzegowe zadane są na powierzchni zerowej. Okazuje się, że wyprowadzona formuła generująca zgadza się z granicą zerową formuły wyprowadzonej przez J. Kijowskiego [18] dla pola grawitacyjnego z danymi brzegowymi na powierzchni czasowej. Zastosowanie wyprowadzonej formuły generującej do przypadku tzw. izolowanych albo nieekspandujących horyzontów (por. [2, 3]) prowadzi do znanych globalnych *praw termodynamiki* czarnych dziur. W naszym przypadku są one wyprowadzone z „pierwszych zasad” w wyniku rozważań o charakterze lokalnym (czy raczej *quasi*-lokalnym, tzn. z analizy pola na samym horyzoncie). Historycznie, prawa te były najpierw postulowane na zasadzie analogii z termodynamiką, popartej szczegółową analizą rodziny rozwiązań Kerra-Newmanna. W połowie lat 90-tych R. M. Wald wraz z współpracownikami ([27]) wyprowadzał te prawa „z pierwszych zasad”, jednak trudno ocenić te usiłowania za udane, bowiem autorzy nie potrafili uwolnić się od współrzędniowych, dalekich od niezmienniczości rachunków i prawidłowo rozpoznać pojawiających się struktur geometrycznych. W rozdziale 5. zostaje wprowadzona dodatkowo materia typu zerowego i zaproponowany jej opis lagranżowski. Wyprowadza się zeń następnie tensor energii-pędu materii świetlnej, zarówno kanoniczny T^a_b jak i symetryczny τ^{ab} . Ten ostatni, będący pochodną lagranżjanu materii względem metryki, nie jest zadany jednoznacznie, ponieważ mamy nałożone więzy na metrykę, względem której różniczkujemy – $\det g_{ab} = 0$. Zachodzi jednak „twierdzenie Belinfantego-Rosenfelda” o równości tych dwóch obiektów w następującym sensie: $\tau^{ac}g_{cb} = T^a_b$ (opuszczać wskaźniki zawsze można). W rozdziale 6, opierając się na wynikach z rozdziału 4 i 5, a więc wychodząc z opisu pola grawitacyjnego o danych brzegowych na powierzchni zerowej oraz opisu samej materii zerowej, zostaje wyprowadzona dynamika samograwitującej powłoki materii świetlnej. W odróżnieniu od przypadku powłoki masywnej, znikanie tensora materii T^a_b nie implikuje ciągłości pierwszych pochodnych metryki. Takie rozwiązania próżniowe, w których osobliwość metryki (a konkretnie nieciągłość jej pochodnych) propaguje się wzdłuż frontu świetlnego, można nazwać „grawitacyjną falą uderzeniową”. Stanowią one ważną klasę opisywanych przez nas układów. Otrzymane wyniki są następnie w rozdziale 7. zastosowane do specyficznego przypadku sferycznie symetrycznej powłoki materii zerowej, gdzie dokonano bardzo szczegółowej analizy rozwiązań równań dynamiki takiej powierzchni. W szczególności wyprowadzona jest struktura kanoniczna przestrzeni fazowej opisującej zarówno grawitacyjne i materialne stopnie swobody takich układów fizycznych. Próby opisu tej struktury, ale tylko dla przypadku sferycznie symetrycznego i bez materii, były już dokonywane

(np. [22]). Już nawet w tym najprostszym przypadku istniejące w literaturze opisy tej struktury nie wychodziły poza postulowanie pewnych wzorów, oparte na różnych – mniej lub bardziej przekonujących – analogiach. Wydaje się, że w niniejszej rozprawie udało się po raz pierwszy uzyskać te wyniki „z pierwszych zasad”. Warto podkreślić, że w przypadku braku sferycznej symetrii oraz nieznikającej materii, nie ma w literaturze nawet takich wyników. Zaś struktura kanoniczna samograwitującej powłoki świetlnej jest ostatnio intensywnie stosowana w konstrukcji prostych modeli kwantowej grawitacji (por. [10]).

Współrzędne czasoprzestrzenne będziemy zawsze oznaczali literami alfabetu greckiego $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$. Będziemy zazwyczaj używać takiego układu współrzędnych, w którym powierzchnia S jest opisywana równaniem $\{x^3 = \text{const.}\}$, a współrzędne na niej będziemy oznaczać początkowymi literami alfabetu łacińskiego: $a, b = 0, 1, 2$. Będziemy także używać przestrzennopodobnych powierzchni Cauchy’ego. Jeśli \mathcal{C}_t jest taką powierzchnią, to wygodnie używać układu, w którym odpowiada ona stałej wartości współrzędnej czasowej $x^0 = t$. Wtedy współrzędne przestrzenne na \mathcal{C}_t oznaczamy literami $k, l = 1, 2, 3$ a współrzędne na przecięciu $\mathcal{C}_t \cap S$ będą oznaczane wielkimi literami alfabetu łacińskiego $A, B = 1, 2$.

W pracy zostały wykorzystane następujące publikacje (napisane wspólnie z J. Kijowskim i J. Jezierskim):

- *Geometry of null-like surfaces in General Relativity and its application to dynamics of gravitating matter*, Reports on Mathematical Physics 46 (2000) 399-418
- *Dynamics of a self gravitating light-like matter shell: a gauge-invariant Lagrangian and Hamiltonians description*, Physical Review D 65 (2002), 064036

Chciałabym podziękować prof. Jerzemu Kijowskiemu za wskazywanie właściwego kierunku badań oraz nauczania mnie specyficznego podejścia myślowego do zagadnień ogólnej teorii względności, bardzo upraszczającego wiele problemów; oraz Jackowi Jezierskiemu za wprowadzenie mnie w techniczne tajniki wielu rachunków i uzupełnienie mojej wiedzy w zakresie szczegółowych zagadnień obliczeniowych.

Rozdział 2

Masywne powłoki materialne

Werner Israel w swojej pracy [12] z roku 1966 rozważał dynamikę cienkich powłok materialnych. Właściwym celem tych rozważań było znalezienie jakiegoś modelu opisującego kolaps grawitacyjny. W przypadkach realistycznego kolapsu równania opisujące zachowanie się materii są niezwykle trudne do rozwiązania, Israel wpadł więc na pomysł, że wiele zagadnień dotyczących kolapsu można badać na pewnym modelu-zabawce („toy model”). Składał się on z powłoki materialnej i oddziałującego z nią pola grawitacyjnego, a dynamika sprowadzała się do zszywania różnych rozwiązań próżniowych po dwóch stronach powłoki.

2.1 Model Israela

W swoim modelu Israel zaproponował: Rozważmy czasoprzestrzeń M składającą się z dwóch części M_+ i M_- , przedzieloną hiperpowierzchnią S , z dwoma lokalnymi układami współrzędnych (x_+^μ) na M_+ i (x_-^μ) na M_- . Na każdej z tych hiperpowierzchni jest zdefiniowana metryka: $g_{\alpha\beta}^+(x_+^\mu)$ i odpowiednio $g_{\alpha\beta}^-(x_-^\mu)$. Niech ξ^a będą lokalnymi trójwymiarowymi współrzędnymi na S . Równania parametryczne opisujące zanurzenia S w M_+ i odpowiednio M_- mają postać $x_\pm^\mu = f_\pm^\mu(\xi^a)$. Wektory styczne do S , to $e_{(a)} = \partial/\partial\xi^a$; ich iloczyn skalarny definiuje metrykę indukowaną na S :

$$g_{ab} = e_{(a)} \cdot e_{(b)} = g_{\mu\nu} e_{(a)}^\mu e_{(b)}^\nu |_\pm . \quad (2.1)$$

Zakładamy, że metryka ta jest taka sama po obu stronach tej hiperpowierzchni. Niech n będzie wektorem normalnym do S o składowych n_\pm^μ po stronie odpowiednio M_+ i M_- . Mamy więc:

$$n \cdot n|_\pm = \varepsilon , \quad n \cdot e_{(a)}|_\pm = 0 , \quad (2.2)$$

gdzie ε jest jakąś stałą na S , a n jest skierowane od M_- do M_+ .

W przypadku niezerowym wektor normalny n jest transwersalny do S oraz $\varepsilon \neq 0$. Tak więc dwie czterowymiarowe metryki $g_{\alpha\beta}^\pm$ indukują tę samą trójwymiarową metrykę na S . Jednak suma mnogościowa $M_+ \cap M_-$ nie musi – co podkreśla Israel – mieć ciągłej

metryki, bowiem jej składowe transwersalne do S mogą nie być ciągłe. Poza tym normalna krzywizna zewnętrzna K_{ab}^\pm obu zanurzeń, zdefiniowana równaniem postaci:

$$K_{ab} = -n_\alpha e_{(b)}^\beta \nabla_\beta e_{(a)}^\alpha \quad (2.3)$$

zawiera odpowiednio $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu|_{\pm}$, a więc pierwsze pochodne metryki $g_{\alpha\beta}^\pm$, transwersalne do S , o których również nie zakładamy, że są ciągłe. Widzimy więc, że ogólnie $K_{ab}^+ \neq K_{ab}^-$.

Skok krzywizny zewnętrznej po obu stronach S dany wyrażeniem $[K_{ab}] = K_{ab}^+ - K_{ab}^-$ interpretujemy jako osobliwą (skoncentrowaną na S) krzywiznę Ricciego rozmaitości będącej wynikiem zszycia $M_+ \cap M_-$ (szczegółowa analiza tego utożsamienia jest zawarta w następnym paragrafie pracy). Israel postuluje, że czasoprzestrzeń spełnia równania Einsteina w następującym sensie: poza S (tzn. osobno w M_+ i M_-) są to próżniowe równania Einsteina. Natomiast na S spełniona musi być dodatkowo osobliwa część równań Einsteina, w myśl której osobliwa część krzywizny jest równa osobliwemu (skoncentrowanemu na S) tensorowi energii-pędu τ_{ab} materii stanowiącej powłokę. Ta osobliwa część równań Einsteina przyjmuje zatem następującą postać:

$$-8\pi(\tau_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}\tau) = [K_{ab}] . \quad (2.4)$$

Metryka odwrotna g^{ab} oraz ślad $\tau = g^{ab}\tau_{ab}$ są w tym przypadku dobrze zdefiniowane, ponieważ g_{ab} jest niezdegenerowane dla powierzchni niezerowej.

Trójwymiarowy obiekt τ_{ab} odpowiada czterowymiarowemu, osobliwemu tensorowi energii pędu $\mathcal{T}^{\alpha\beta}$, danemu jako czterowymiarowa dystrybucja:

$$\mathcal{T}^{\alpha\beta} = \tau^{ab} e_{(a)}^\alpha e_{(b)}^\beta |\alpha| (\text{sgn}\varepsilon) \delta(\Phi) , \quad (2.5)$$

gdzie $\Phi(x^\mu) = 0$ jest równaniem powierzchni S , a $\alpha(\xi^a)$ pewnym współczynnikiem takim, że $n_\mu = \alpha^{-1} \partial_\mu \Phi$. Przyjęto konwencję, że Φ rośnie od M_- do M_+ , i α jest dodatnie dla S typu czasowego i ujemne dla typu przestrzennego. Oczywiście składowe tego tensora transwersalne względem S automatycznie znikają:

$$\mathcal{T}^{\alpha\beta} n_\beta \equiv 0 \quad (2.6)$$

na mocy (2.2). Tensor energii-pędu powłoki spełnia następujące prawo zachowania:

$$\overset{(3)}{\nabla}_b \tau^b_a = -[e_{(a)}^\alpha T^\beta_\alpha n_\beta] \equiv 0 , \quad (2.7)$$

gdzie $\overset{(3)}{\nabla}_b$ oznacza trójwymiarową pochodną na powierzchni S . Równanie (2.7) jest bezpośrednią konsekwencją wektorowej części więzów Gaussa-Codazziego:

$$G_{\alpha\beta} e_{(a)}^\alpha n^\beta = \overset{(3)}{\nabla}_b K^b_a - \partial_a K , \quad (2.8)$$

wziętych po obu stronach S . Natomiast z „więzów hamiltonowskich” (tzn. ze skalarnej części więzów Gaussa-Codazziego):

$$G_{\alpha\beta}n^{\alpha}n^{\beta} = \frac{1}{2}(K^2 - K_{ab}K^{ab} - \overset{(3)}{R}) , \quad (2.9)$$

gdzie $\overset{(3)}{R}$ jest trójwymiarowym skalarom krzywizny powierzchni S , wynika jeszcze jedno równanie generujące dynamikę układu:

$$\tilde{K}_{ab}\tau^{ab} = [\mathcal{T}_{\alpha\beta}n^{\alpha}n^{\beta}] \equiv 0 , \quad (2.10)$$

gdzie symbol „ $\tilde{}$ ” oznacza wartość średnią rozważanej wielkości po obu stronach S :

$$\tilde{K}_{ab} = \frac{1}{2}(K_{ab}^+ + K_{ab}^-) . \quad (2.11)$$

Aby się o tym przekonać należy zauważyć, że część regularna (próżniowa) równań Einsteina implikuje znikanie prawej strony równania (2.9) po obu stronach. Również trójwymiarowa krzywizna skalarowa $\overset{(3)}{R}$ powierzchni S jest identyczna po obu stronach, bowiem dana przez tę samą metrykę g_{ab} . Mamy zatem równość:

$$(K^-)^2 - K^-_{ab}K^{-ab} = (K^+)^2 - K^+_{ab}K^{+ab} , \quad (2.12)$$

skąd – po wyrażeniu K^+ i K^- poprzez τ i \tilde{K} na mocy (2.4) i (2.11) – otrzymujemy natychmiast (2.10).

2.2 Proponowany opis modelu Israela

Pozostała część niniejszego rozdziału zawiera wyprowadzenie modelu Israela z zasady wariacyjnej, najpierw jego wersji lagranżowskiej, a następnie – po dokonaniu odpowiedniej transformacji Legendre’a – sformułowaniu hamiltonowskiego. Wiele elementów przedstawionej konstrukcji pochodzi z prac [8] oraz [19]. Cała konstrukcja została jednak przeprowadzona w sposób taki, aby można ją było łatwo uogólnić na przypadek powłoki materii świetlnej, co zostanie dokonane w dalszej części pracy.

Podobnie jak Israel, rozważamy czasoprzestrzeń złożoną z dwóch części sklejonych razem wzdłuż hiperpowierzchni S , której metryka jest niezdegenerowana i nosi sygnaturę $(-, +, +)$. Różnica między opisem Israela a naszym polega na tym, że *wszystkie składowe metryki czasoprzestrzennej są ciągłe*. Jak już wspomnieliśmy w rozdziale wstępnym, żądanie ciągłości *całej metryki* nie jest żadnym ograniczeniem, a jedynie „warunkiem cechowania” nałożonym na układ współrzędnych. Jego spełnienie znacznie upraszcza teoretyczny opis modelu. Będziemy używać takiego układu współrzędnych, w którym powierzchnia S jest opisywana równaniem $\{x^3 = \text{const.}\}$. Pochodne metryki wzdłuż S (tzn. względem x^0 , x^1 oraz x^2) są ciągłe, natomiast pochodna transwersalna (tzn. względem x^3) może

zawierać skoki na S . Zakładamy, że topologia S jest typu tuby świata $S^2 \times R^1$, tzn. że jest to historia materii skoncentrowanej na dwuwymiarowej powierzchni o topologii sfery S^2 .

Ponieważ pierwsze pochodne metryki mogą być nieciągłe, tensor krzywizny Riemanna zawiera człony proporcjonalne do $\delta_S \equiv \delta(x^3)$. Zgodnie z równaniami Einsteina, te osobliwe człony odpowiadają osobliwemu tensorowi energii-pędu opisującego materię skoncentrowaną na S .

Powłoka materii dzieli czasoprzestrzeń na dwie części: wewnątrz i zewnątrz tuby S . W obu tych częściach zasada wariacyjna wymusza spełnianie próżniowych równań Einsteina. Zatem część regularna tensora Einsteina znika wszędzie poza powierzchnią S . Zostaje jeszcze jego osobliwa część skoncentrowana na S . Może być ona wyznaczona z tensora Ricciego:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_{(\mu} \Gamma_{\nu)\lambda}^\lambda + \Gamma_{\sigma\lambda}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma . \quad (2.13)$$

Dla uproszczenia rachunków przepiszemy powyższy wzór używając następującej kombinacji symboli Christoffela:

$$A_{\mu\nu}^\lambda := \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \delta_{(\mu}^\lambda \Gamma_{\nu)\kappa}^\kappa . \quad (2.14)$$

Mamy wtedy:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda A_{\mu\nu}^\lambda - A_{\mu\sigma}^\lambda A_{\nu\lambda}^\sigma + \frac{1}{3} A_{\mu\lambda}^\lambda A_{\nu\sigma}^\sigma . \quad (2.15)$$

Wyrażenia kwadratowe w A mogą mieć tylko nieciągłości typu skok. Pochodne w kierunku stycznym do S wielkości A są również ograniczone, i zawierają się w regularnej części tensora Ricciego. Osobliwa część tensora Ricciego składa się tylko z pochodnych w kierunku transwersalnym ($\lambda = 3$):

$$\text{sing}(R_{\mu\nu}) = \partial_3 A_{\mu\nu}^3 = \delta(x^3) [A_{\mu\nu}^3] , \quad (2.16)$$

gdzie nawiasy kwadratowe oznaczają skok wartości danej wielkości po obu stronach S .

Zatem tensor Einsteina jest następujący:

$$\mathcal{G}^\mu{}_\nu := \sqrt{|g|} \text{sing} \left(R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2} R \right) = \delta(x^3) \mathbf{G}^\mu{}_\nu , \quad (2.17)$$

gdzie

$$\mathbf{G}^\mu{}_\nu := \sqrt{|g|} \left(\delta^{\beta\nu} g^{\mu\alpha} - \frac{1}{2} \delta^\mu{}_\nu g^{\alpha\beta} \right) [A_{\alpha\beta}^3] \quad (2.18)$$

jest trójwymiarową wielkością „żyjącą” na S . Pokażemy teraz, że składowe tensora Einsteina „transwersalne” do S znikają:

$$\mathbf{G}^3{}_\nu \equiv 0 . \quad (2.19)$$

Dowód. W tym celu rozważmy po obu stronach S następującą kombinację symboli Christoffela:

$$\tilde{Q}^\mu{}_\nu := \sqrt{|g|} \left(g^{\mu\alpha} A_{\alpha\nu}^3 - \frac{1}{2} \delta^\mu{}_\nu g^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}^3 \right) , \quad (2.20)$$

W dalszym toku rozważań będziemy posługiwać się często następującą gęstością tensorową:

$$\pi^{\mu\nu} := \frac{1}{16\pi} \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} , \quad (2.21)$$

która koduje całą informację o metryce, a której użycie znacznie upraszcza wiele skomplikowanych rachunków¹. Wtedy możemy zapisać powyższy wzór jako:

$$\frac{1}{16\pi} \tilde{Q}^\mu{}_\nu = \pi^{\mu\alpha} A_{\alpha\nu}^3 - \frac{1}{2} \delta^\mu{}_\nu \pi^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}^3 , \quad (2.22)$$

Równanie (2.18) daje wtedy:

$$\mathbf{G}^\mu{}_\nu := [\tilde{Q}^\mu{}_\nu] . \quad (2.23)$$

Korzystając z warunku metryczności koneksji otrzymujemy następujące równania spełnione po obu stronach S :

$$0 \equiv \nabla_a \pi^{33} = \partial_a \pi^{33} + 2\pi^{3\mu} \Gamma_{\mu a}^3 - \pi^{33} \Gamma_{a\mu}^\mu = \partial_a \pi^{33} + 2\pi^{3\mu} A_{\mu a}^3 , \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \nabla_a \pi^{3a} = \partial_a \pi^{3a} + \pi^{\mu a} \Gamma_{\mu a}^3 + \pi^{3\mu} \Gamma_{\mu a}^a - \pi^{3a} \Gamma_{a\mu}^\mu \\ &= \partial_a \pi^{3a} + \pi^{ab} A_{ab}^3 - \pi^{33} A_{33}^3 , \end{aligned} \quad (2.25)$$

Ponieważ składowe $\pi^{\mu\nu}$ są ciągłe wzdłuż S , skoki tych wyrażeń między dwiema stronami S znikają. Otrzymujemy zatem:

$$\frac{1}{16\pi} \mathbf{G}^3{}_a = \pi^{3\mu} [A_{\mu a}^3] = -\frac{1}{2} [\partial_a \pi^{33}] = 0 , \quad (2.26)$$

$$\frac{1}{16\pi} \mathbf{G}^3{}_3 = -\frac{1}{2} (\pi^{ab} [A_{ab}^3] - \pi^{33} [A_{33}^3]) = \frac{1}{2} [\partial_a \pi^{3a}] = 0 , \quad (2.27)$$

co kończy dowód (2.19). □

2.2.1 Tożsamości Bianchiego dla osobliwej części krzywizny

Wzór (2.23) wyrażający osobliwą część tensora Einsteina przez skok wielkości $\tilde{Q}^\mu{}_\nu$ między obydwoma stronami powierzchni S , choć bardzo wygodny w rachunkach, nie jest zadowalający, ponieważ $\tilde{Q}^\mu{}_\nu$ nie mają żadnego sensownego charakteru geometrycznego i stanowią jedynie wygodny skrót algebraiczny na oznaczenie skomplikowanej kombinacji współczynników koneksji Γ . Pokażemy teraz, że można ten defekt natychmiast usunąć, używając, zamiast brzydkiego obiektu $\tilde{Q}^\mu{}_\nu$, prawdziwy tensor $Q^\mu{}_\nu$, kodujący krzywiznę zewnętrzną powierzchni S w reprezentacji ADM. Krzywizna zewnętrzna dana jest wzorem:

$$K_{ab} := -\frac{1}{g^{33}} \Gamma_{ab}^3 = -\frac{1}{g^{33}} A_{ab}^3 , \quad (2.28)$$

¹W tzw. afinicznym sformułowaniu ogólnej teorii względności, zaproponowanym przez J. Kijowskiego w 1978 roku (zob. [17]), wielkość ta odgrywa rolę pędu kanonicznie sprzężonego do koneksji Γ .

zaś jej „wersja ADM” zdefiniowana jest następująco:

$$Q^{ab} := \sqrt{|\det g_{cd}|} (L\hat{g}^{ab} - L^{ab}) , \quad (2.29)$$

gdzie \hat{g}^{ab} jest trójwymiarową metryką kontrawariantną na S , odwrotną do metryki indukowanej g_{ab} ; $L^{ab} = -\frac{1}{g^{33}}\Gamma^3 ab$. Można łatwo sprawdzić, że zachodzi następujący wzór między „trójwymiarową metryką odwrotną” a „trójwymiarowymi składnikami czterowymiarowej odwrotnej”:

$$\hat{g}^{ab} = g^{ab} - \frac{g^{3a}g^{3b}}{g^{33}} . \quad (2.30)$$

Aby wyrazić współczynniki $\tilde{Q}^\mu{}_\nu$ w języku gęstości tensorowej $Q^\mu{}_\nu$, zauważmy, że tożsamości (2.24) oraz (2.24) można rozwiązać algebraicznie względem A_{33}^3 oraz A_{3a}^3 , otrzymując w ten sposób po obu stronach powierzchni S tożsamości:

$$A_{33}^3 = \frac{1}{\pi^{33}} (\partial_a \pi^{3a} + A_{ab}^3 \pi^{ab}) , \quad (2.31)$$

$$A_{3a}^3 = -\frac{1}{2\pi^{33}} (\partial_a \pi^{33} + 2A_{ab}^3 \pi^{3b}) . \quad (2.32)$$

A zatem wszystkie współczynniki $A_{\mu\nu}^3$ można wyrazić przez A_{ab}^3 , tzn. – stosując (2.28) i (2.29) – przez Q^{ab} i metrykę. Po skorzystaniu jeszcze ze wzoru (2.30) prowadzi to w prosty sposób do następującej tożsamości:

$$\tilde{Q}^a{}_b = Q^a{}_b + 16\pi \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\pi^{3a}}{\pi^{33}} \pi^{33}{}_{,b} + \frac{1}{2} \delta_b^a \left(\frac{\pi^{3c}}{\pi^{33}} \pi^{33}{}_{,c} - \pi^{3c}{}_{,c} \right) \right\} . \quad (2.33)$$

Dwa ostatnie „dodatki” są identyczne po obu stronach powierzchni S , ponieważ metryka jest ciągła. Zatem ich skok znika i – na mocy (2.23) – składowe styczne do S osobliwego tensora Einsteina wyrażają się właśnie przez skok tensora Q wzorem:

$$\mathbf{G}^a{}_b := [Q^a{}_b] , \quad (2.34)$$

zaś składowe transwersalne \mathbf{G}^\perp_b znikają. Ponieważ obiekt $Q^a{}_b$ jest już dobrą gęstością tensorową na S , której definicja nie zależy od wyboru układu współrzędnych, zakończyliśmy w ten sposób dowód tensorowego charakteru trójwymiarowego obiektu $\mathbf{G}^a{}_b$.

Pokażemy teraz, że dopuszczając osobliwości typu delty Diraca w tensorze Einsteina, nie popsuliśmy spełnianych przezeń tożsamości Bianchiego. Tożsamości te musimy teraz rozumieć w sensie dystrybucji. W celu ich wykazania skorzystamy z równań Gaussa-Codazziego wiążących składową transwersalną \mathcal{G}^\perp_b gęstości tensora Einsteina $\mathcal{G}^\mu{}_\nu$ z dywergencją krzywizny zewnętrznej Q na S :

$$\mathcal{G}^\perp_b + \bar{\nabla}_a Q^a{}_b \equiv 0 . \quad (2.35)$$

gdzie przez $\bar{\nabla}$ oznaczyliśmy trójwymiarową pochodną kowariantną na S . Składowa transwersalna gęstości tensora Einsteina jest dobrze określonym obiektem trójwymiarowym na S . W naszym układzie współrzędnych dobranym do S w ten sposób, żeby współrzędna

x^3 była stała na S , wielkość ta jest równa po prostu trzeciej składowej: $\mathcal{G}^\perp_b = \mathcal{G}^3_b$. Biorąc skok tego równania między dwiema stronami S otrzymujemy równanie

$$[\text{reg}(\mathcal{G})^\perp_c] + \bar{\nabla}_a \mathbf{G}^a_b \equiv 0 . \quad (2.36)$$

Pokażemy, że to wyrażenie jest osobliwą częścią tożsamości Bianchiego $\nabla_\mu \mathcal{G}^\mu_c \equiv 0$. Regularna część tej wielkości znika po obu stronach S . Obliczmy osobliwą część tego wyrażenia, proporcjonalną do δ_S . Zauważmy najpierw, że przy różniczkowaniu kowariantnym singularnej części tensora Einsteina (2.17), delta Diraca nie jest różniczkowana, ponieważ $\mathcal{G}^3_c = 0$. Otrzymujemy zatem w wyniku wielkość $\bar{\nabla}_a \mathbf{G}^a_b$ pomnożoną przez δ_S . Inny człon typu δ jest otrzymywany z regularnej części $\text{reg}(\mathcal{G})$ po wzięciu skoku między obiema stronami S . W ten sposób otrzymamy $[\text{reg}(\mathcal{G})^3_c] \delta_S$. Ostatecznie osobliwa część tożsamości Bianchiego jest następująca:

$$\nabla_\mu \mathcal{G}^\mu_c = ([\text{reg}(\mathcal{G})^\perp_c] + \bar{\nabla}_a \mathbf{G}^a_b) \delta(x^3) \equiv 0 . \quad (2.37)$$

Zatem pokazaliśmy, że tożsamości $\nabla_\mu \mathcal{G}^\mu_c \equiv 0$ zachodzą również dla czasoprzestrzeni o osobliwej krzywiznie.

2.2.2 Dynamika powłoki materialnej

Wyprowadzimy teraz dynamikę układu „powłoka + grawitacja” z zasady najmniejszego działania $\delta A = 0$, gdzie działanie

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\text{graw}}^{\text{reg}} + \mathcal{A}_{\text{graw}}^{\text{sing}} + \mathcal{A}_{\text{mat}} , \quad (2.38)$$

jest sumą działania grawitacyjnego i materii, z której zbudowana jest powłoka. Działanie grawitacyjne, zdefiniowane jako całka lagranżjanu Hilberta $L = \frac{1}{16\pi} \sqrt{g} R$, składa się z części regularnej $\mathcal{A}_{\text{graw}}^{\text{reg}}$ i osobliwej $\mathcal{A}_{\text{graw}}^{\text{sing}}$, zgodnie z rozkładem skalaru krzywizny R na część regularną i osobliwą $R = \text{reg}(R) + \text{sing}(R)$.

Z postaci tensora Einsteina (2.17) oraz tożsamości (2.19) wynika:

$$\sqrt{|g|} \text{sing}(R) = -\text{sing}(\mathcal{G}) = -\mathbf{G}^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \delta(x^3) = -\mathbf{G}^{ab} g_{ab} \delta(x^3) . \quad (2.39)$$

a więc całkowite działanie jest następujące:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{16\pi} \int_D \sqrt{|g|} \text{reg}(R) - \frac{1}{16\pi} \int_{D \cap S} \mathbf{G}^{\mu\nu} g_{\mu\nu} + \int_{D \cap S} L_{\text{mat}} , \quad (2.40)$$

gdzie D jest czterowymiarowym ograniczonym obszarem czasoprzestrzeni M . Będziemy wariować względem tensora metrycznego $g_{\mu\nu}$ oraz pewnych pól materii z^K „żyjących” na S . Na razie nie musimy specyfikować ich charakteru. Wystarczy nam założenie, że są one obiektami geometrycznymi na tej powierzchni i że lagranżjan materii L_{mat} jest gęstością skalarną na S , która zależy lokalnie od wartości tych pól, ich pochodnych wzdłuż powierzchni S oraz od metryki powierzchni S .

Istnieje wiele sposobów liczenia wariacji lagranżjanu Hilberta. Tutaj posłużymy się metodą zaproponowaną przez J. Kijowskiego w jego pracy [18] (zob. także [19]). Metoda ta jest oparta na tożsamości:

$$\begin{aligned} \delta \left(\frac{1}{16\pi} \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \right) &= -\frac{1}{16\pi} \mathcal{G}^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + \frac{1}{16\pi} \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{16\pi} \mathcal{G}^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + \pi^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} . \end{aligned} \quad (2.41)$$

Wyrażając $R_{\mu\nu}$ w (2.41) przez $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ i jej pochodne można pokazać, że ostatni człon po prawej stronie tej formuły jest całkowitą dywergencją, bowiem zachodzi następująca tożsamość:

$$\pi^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \equiv \partial_\kappa \left(\pi_\lambda^{\mu\nu\kappa} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \right) = (\partial_\kappa \pi_\lambda^{\mu\nu\kappa}) \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \pi_\lambda^{\mu\nu\kappa} \delta \Gamma_{\mu\nu,\kappa}^\lambda , \quad (2.42)$$

gdzie – obok wielkości (2.21) – wprowadziliśmy następujące oznaczenia:

$$\pi_\lambda^{\mu\nu\kappa} := \pi^{\mu\nu} \delta^\kappa_\lambda - \pi^{\kappa(\nu} \delta^{\mu)}_\lambda , \quad (2.43)$$

oraz

$$\Gamma_{\mu\nu,\kappa}^\lambda := \partial_\kappa \Gamma_{\mu\nu}^\lambda . \quad (2.44)$$

Dowód tożsamości (2.42) jest natychmiastowy, jeśli tylko skorzysta się z faktu, że $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ *nie są* niezależnymi wielkościami, ale symbolami Christoffela, tzn. kombinacjami składowych metryki $g_{\mu\nu}$ i ich pochodnych. Oznacza to, że różniczka kowariantna $\nabla \pi$ względem koneksji Γ znika tożsamościowo. Uwzględniając fakt, że π jest gęstością tensorową mamy zatem:

$$\partial_\kappa \pi_\lambda^{\mu\nu\kappa} \equiv \pi_\alpha^{\mu\nu\kappa} \Gamma_{\lambda\kappa}^\alpha - \pi_\lambda^{\alpha\nu\kappa} \Gamma_{\alpha\kappa}^\mu - \pi_\lambda^{\mu\alpha\kappa} \Gamma_{\alpha\kappa}^\nu , \quad (2.45)$$

co wystarczy do wykazania tożsamości (2.42).

Ostatecznie więc wariacja części regularnej lagranżjanu Hilberta wynosi:

$$\delta \left(\frac{1}{16\pi} \sqrt{|g|} \text{reg}(R) \right) = -\frac{1}{16\pi} \text{reg}(\mathcal{G})^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + \text{reg} \left(\partial_\kappa \left(\pi_\lambda^{\mu\nu\kappa} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \right) \right) . \quad (2.46)$$

Pokażemy, że identyczne równanie zachodzi również dla osobliwej części R , tzn.

$$\delta L_{\text{graw}}^{\text{sing}} = \delta \left(\frac{1}{16\pi} \sqrt{|g|} \text{sing}(R) \right) = -\frac{1}{16\pi} \text{sing}(\mathcal{G})^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + \text{sing} \left(\partial_\kappa \left(\pi_\lambda^{\mu\nu\kappa} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \right) \right) . \quad (2.47)$$

Dowód (2.47): W tym celu obliczymy osobliwą część wyrażenia $\partial_\kappa \left(\pi_\lambda^{\mu\nu\kappa} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \right)$. Ponieważ wszystkie obiekty wchodzące w skład tego wyrażenia są obiektami geometrycznymi ($\delta \Gamma$ jest tensorem!), wyniki obliczeń nie zależą od użytego układu współrzędnych. W szczególności można posługiwać się naszym układem, w którym współrzędna x^3 jest stała na S . Wykorzystując ciągłość $\pi_\lambda^{\mu\nu\kappa}$ otrzymujemy wtedy:

$$\text{sing} \left(\partial_\kappa \left(\pi_\lambda^{\mu\nu\kappa} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \right) \right) = \delta(x^3) \pi_\lambda^{\mu\nu\perp} \delta[\Gamma_{\mu\nu}^\lambda] = \delta(x^3) \pi_\lambda^{\mu\nu 3} \delta[\Gamma_{\mu\nu}^\lambda] = \delta(x^3) \pi^{\mu\nu} \delta[A_{\mu\nu}^3] . \quad (2.48)$$

Z definicji (2.22) obiektu $\tilde{Q}^{\mu\nu}$ bezpośrednio wynika, że:

$$\pi^{\mu\nu} \delta A_{\mu\nu}^3 = -\frac{1}{16\pi} g_{\mu\nu} \delta \tilde{Q}^{\mu\nu} . \quad (2.49)$$

Korzystając z (2.23) mamy, że:

$$[\tilde{Q}^{\mu\nu}] \delta(x^3) = \text{sing}(\mathcal{G})^{\mu\nu} . \quad (2.50)$$

Składając razem te formuły otrzymujemy zatem:

$$\delta(x^3) \pi_{\lambda}^{\mu\nu\perp} \delta[\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}] = -\frac{1}{16\pi} g_{\mu\nu} \delta \text{sing}(\mathcal{G})^{\mu\nu} = \delta L_{\text{graw}}^{\text{sing}} + \frac{1}{16\pi} \text{sing}(\mathcal{G})^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} , \quad (2.51)$$

co kończy dowód (2.47). \square

Dodając wzory (2.46) i (2.47) otrzymujemy więc wariację pełnego lagranżjanu grawitacyjnego (tzn. sumy jego części regularnej i osobliwej):

$$\delta L_{\text{graw}} = -\frac{1}{16\pi} \mathcal{G}^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + \partial_{\kappa} (\pi_{\lambda}^{\mu\nu\kappa} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}) , \quad (2.52)$$

co stanowi uogólnienie wzoru z pracy [19] na przypadek czasoprzestrzeni z osobliwą krzywizną.

Zajmiemy się teraz częścią działania związaną z materią. Jak już wspomnieliśmy wcześniej, zakładamy, że wszystkie własności materii opisane są za pomocą gęstości lagranżjanu L , będącej niezmienniczą gęstością skalarną na S . Gęstość ta może zależeć od pewnych pól materii z^K żyjących na powierzchni S , ich pierwszych pochodnych wzdłuż tej powierzchni: $z^K_a := \partial_a z^K$, a także od tensora metrycznego g_{ab} na S :

$$L = L(z^K; z^K_a; g_{ab}) . \quad (2.53)$$

Wariacja lagranżjanu materii ma zatem następującą postać:

$$\begin{aligned} \delta L_{\text{mat}} &= \frac{\partial L_{\text{mat}}}{\partial g_{ab}} \delta g_{ab} + \frac{\partial L_{\text{mat}}}{\partial z^K} \delta z^K + \frac{\partial L_{\text{mat}}}{\partial z^K_a} \partial_a \delta z^K \\ &= \frac{1}{2} \tau^{ab} \delta g_{ab} + \left(\frac{\partial L_{\text{mat}}}{\partial z^K} - \partial_a \frac{\partial L_{\text{mat}}}{\partial z^K_a} \right) \delta z^K \\ &\quad + \partial_a (p_K^a \delta z^K) , \end{aligned} \quad (2.54)$$

gdzie wprowadziliśmy trójwymiarowy, symetryczny tensor energii-pędu τ^{ab} określony na powierzchni S (a raczej jego gęstość tensorową):

$$\tau^{ab} := 2 \frac{\partial L}{\partial g_{ab}} , \quad (2.55)$$

oraz pędy p_K^a sprzężone kanonicznie do zmiennych materiałowych z^K :

$$p_K^a := \frac{\partial L_{\text{mat}}}{\partial z^K_a} . \quad (2.56)$$

Ostatecznie wariacja pełnego lagranżjanu dla układu fizycznego „powłoka materii + grawitacja” wygląda następująco:

$$\begin{aligned} \delta L = & -\frac{1}{16\pi} \text{reg}(\mathcal{G})^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + \delta(x^3) \left(\frac{\partial L_{\text{mat}}}{\partial z^K} - \partial_a \frac{\partial L_{\text{mat}}}{\partial z^K_a} \right) \delta z^K \\ & - \delta(x^3) \frac{1}{16\pi} (\mathbf{G}^{ab} - 8\pi\tau^{ab}) \delta g_{ab} \\ & + \partial_\kappa (\pi_\lambda^{\mu\nu\kappa} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) + \delta(x^3) \partial_a (p_K^a \delta z^K) . \end{aligned} \quad (2.57)$$

W tej części naszych rozważań zakładamy, że zarówno δg_{kl} jak i δz^K znikają na pewnym otoczeniu brzegu ∂D obszaru D czasoprzestrzeni, po którym całkujemy lagranżjan. Zatem dwa ostatnie (brzegowe) człony w powyższym wzorze znikają przy całkowaniu po D . Warunek znikania wariacji działania $\delta \mathcal{A} = 0$ z ustalonymi wartościami na brzegach daje więc równania Einsteina dla pola grawitacyjnego oraz równania Eulera-Lagrange’a dla pól materii. Regularna część równań Einsteina

$$\text{reg}(\mathcal{G})^{\mu\nu} = 0$$

zachodzi w całej czasoprzestrzeni, a osobliwa część tych równań:

$$\mathbf{G}^{ab} = 8\pi\tau^{ab} , \quad (2.58)$$

musi być spełniona na S . W ten sposób wyprowadziliśmy z zasady wariacyjnej równania Izraela dla powłoki.

Informację zakodowaną w trójwymiarowym obiekcie τ^{ab} możemy wyrazić także w postaci czterowymiarowego tensora energii-pędu $\mathcal{T}^{\mu\nu} := \delta(x^3)\tau^{\mu\nu}$, gdzie ustaliliśmy – zgodnie z (2.19) – że transwersalne składowe τ znikają tożsamościowo: $\tau^{\perp\nu} \equiv 0$ (w naszym układzie współrzędnych oznacza to po prostu, że $\tau^{3\nu} \equiv 0$, jednak w poprzedniej postaci warunek ten nie zależy od układu współrzędnych). Zbierając razem część singularną i regularną pola grawitacyjnego, możemy zapisać wariację całkowitego lagranżjanu następująco:

$$\begin{aligned} \delta L = & \frac{1}{16\pi} (\mathcal{G}^{\mu\nu} - 8\pi\mathcal{T}^{\mu\nu}) \delta g_{\mu\nu} + \delta(x^3) \left(\frac{\partial L_{\text{mat}}}{\partial z^K} - \partial_a \frac{\partial L_{\text{mat}}}{\partial z^K_a} \right) \delta z^K \\ & + \partial_\kappa (\pi_\lambda^{\mu\nu\kappa} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) + \delta(x^3) \partial_a (p_K^a \delta z^K) . \end{aligned} \quad (2.59)$$

Wzór ten będzie punktem wyjścia do wyprowadzenia dynamiki układu. Podkreślamy, że jest on tożsamością, implikowaną przez strukturę lagranżjanu.

Równania pola naszej teorii, a więc równania Einsteina dla pola grawitacyjnego i Eulera-Lagrange’a dla materii, oznaczają znikanie części „objętościowej” tej wariacji (pierwsze dwa wyrazy):

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{\mu\nu} &= 8\pi\mathcal{T}^{\mu\nu} , \\ \frac{\partial L_{\text{mat}}}{\partial z^K} &= \partial_a \frac{\partial L_{\text{mat}}}{\partial z^K_a} . \end{aligned} \quad (2.60)$$

Są one zatem równoważne żądaniu, by dla dowolnych wariacji (już niekoniecznie znikających na brzegu!) niezależnych pól $\delta g_{\mu\nu}$ oraz δz^K , wariacja lagranżjanu redukowała się do samej tylko części brzegowej:

$$\delta L = \partial_\kappa (\pi_\lambda^{\mu\nu\kappa} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) + \delta(x^3) \partial_a (p_K^a \delta z^K) . \quad (2.61)$$

Zatem cała dynamika układu „materia + grawitacja” jest równoważna temu równaniu. Analogicznie jak w równaniu (2.48), możemy skorzystać z definicji $\pi_\lambda^{\mu\nu\kappa}$ i wyrazić to za pomocą kontrawariantnej gęstości tensorowej $\pi^{\mu\nu}$. Otrzymujemy wtedy

$$\pi_\lambda^{\mu\nu\kappa} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \pi^{\mu\nu} \delta A_{\mu\nu}^\kappa . \quad (2.62)$$

Zatem równania pola mogą być zapisane w następujący sposób:

$$\delta L = \partial_\kappa (\pi^{\mu\nu} \delta A_{\mu\nu}^\kappa) + \delta(x^3) \partial_a (p_K^a \delta z^K) . \quad (2.63)$$

Ta postać równań pola jest analogiczna do lagranżowskiej postaci równań dynamiki w mechanice teoretycznej, które możemy zapisać w następującej postaci:

$$\delta L(q, \dot{q}) = \frac{d}{dt} (p \delta q) \equiv \dot{p} \delta q + p \delta \dot{q} , \quad (2.64)$$

zawierającego w sobie zarówno związek pędów z prędkościami:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} ,$$

jak i równania Newtona:

$$\dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q} .$$

Wzór ten stanowi punkt wyjścia do wyprowadzenia hamiltonowskiej formy równań dynamiki. Wystarczy jedynie dokonać transformacji Legendre’a między p a \dot{q} , kładąc:

$$p \delta \dot{q} = \delta(p \dot{q}) - \dot{q} \delta p ,$$

i przenieść pełną różniczkę $\delta(p \dot{q})$ na lewą stronę wzoru (2.64). Otrzymamy w ten sposób formułę:

$$-\delta H = \dot{p} \delta q - \dot{q} \delta p , \quad (2.65)$$

gdzie położyliśmy $H(p, q) := p \dot{q} - L$. Formuła ta jest równoważna hamiltonowskiej postaci równań ruchu:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} , \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} .$$

Podobnie postępujemy w teorii pola, dokonując transformacji Legendre’a między pochodnymi czasowymi pól a odpowiednimi pędami. W tym celu musimy wybrać jakąś

(3+1)-dekompozycję czasoprzestrzeni M , aby zdecydować, które pochodne nazwiemy „czasowymi”, a które „przestrzennymi”. W ten sposób nasza teoria pola stanie się układem hamiltonowskim, z przestrzenią danych Cauchy’ego na każdej z trójwymiarowych powierzchni odgrywającą rolę przestrzeni fazowej. Jednak inaczej niż w mechanice, pozostaną nam człony brzegowe związane z pochodnymi przestrzennymi. Odpowiednie kontrolowanie tych pochodnych na brzegu rozważanego obszaru jest niezbędne dla konsystencji naszych rozważań, bowiem ewolucja czasowa pola w skończonym obszarze jest zazwyczaj źle postawionym problemem, jeśli nie ustali się w odpowiedni sposób warunków brzegowych pola.

Dla uproszczenia rachunków wybierzmy układ współrzędnych zgodny z ustaloną (3+1)-dekompozycją czasoprzestrzeni: zakładamy, że współrzędna czasowa $t = x^0$ jest stała na trójwymiarowych powierzchniach tej foliacji. Zakładamy również, że te powierzchnie są przestrzennopodobne. Aby otrzymać sformułowanie hamiltonowskie naszej teorii musimy scałkować równanie (2.61) (albo równoważnie (2.63)) po powierzchni Cauchy’ego $\mathcal{C} \subset M$ i potem dokonać transformacji Legendre’a między pochodnymi czasowymi a odpowiadającymi im pędami.

W naszych rozważaniach ograniczymy się do przypadku czasoprzestrzeni asymptotycznie płaskiej i założymy, że także płaty \mathcal{C}_t naszej (3+1)-dekompozycji są asymptotycznie płaskie w nieskończoności. Aby mieć kontrolę nad dwuwymiarowymi całkami powierzchniowymi w nieskończoności, rozważmy najpierw dynamikę naszego układu „materia + grawitacja” w skończonej tubie świata \mathcal{T} , której brzeg ma niezdegenerowaną metrykę o sygnaturze $(-, +, +)$. W pewnym momencie przejdziemy do nieskończoności z brzegiem tuby. Zakładamy, że tuba ta zawiera powierzchnię S wraz z poruszającą się wzdłuż niej naszą zerową materią.

Oznaczając przez $V := \mathcal{T} \cap \mathcal{C}$ tę część powierzchni Cauchy’ego \mathcal{C} , która jest zawarta w tubie \mathcal{T} , całkujemy (2.63) po skończonym obszarze $V \subset \mathcal{C}$ i trzymamy całki powierzchniowe na brzegu ∂V obszaru V . Otrzymamy z nich masę ADM jako hamiltonian całego układu „materia + grawitacja”, gdy przejdziemy do nieskończoności z $\partial V = \mathcal{C} \cap \partial \mathcal{T}$. Ponieważ nasz opis jest geometryczny i nie zależy od wyboru układu współrzędnych, uprościmy nasze rachunki używając takiego układu, w którym współrzędna x^3 jest stała zarówno na S jak i na brzegu tuby $\partial \mathcal{T}$.

Całkując (2.63) po objętości V otrzymujemy:

$$\delta \int_V L = \int_V \partial_\kappa (\pi^{\mu\nu} \delta A_{\mu\nu}^\kappa) + \int_V \delta(x^3) \partial_a (p_K^a \delta z^K) \quad (2.66)$$

$$= \int_V (\pi^{\mu\nu} \delta A_{\mu\nu}^0)' + \int_{\partial V} \pi^{\mu\nu} \delta A_{\mu\nu}^\perp + \int_{V \cap S} (p_K^0 \delta z^K)' , \quad (2.67)$$

gdzie „kropka” oznacza pochodną czasową. W powyższym wzorze pominęliśmy dwuwymiarowe dywergencje znikające po wycalkowaniu po powierzchniach ∂V oraz $V \cap S$.

Aby jeszcze bardziej uprościć nasze oznaczenia, oznaczmy przez $p_K := p_K^0$ składową czasową pędu sprzężonego kanonicznie do zmiennej materiałowej z^K . Dokonajmy teraz transformacji Legendre’a w zmiennych materiałnych:

$$(p_K \delta z^K)' = \dot{p}_K \delta z^K - \dot{z}^K \delta p_K + \delta (p_K \dot{z}^K) . \quad (2.68)$$

Ostatni człon, umieszczony po lewej stronie równania (2.66), daje – razem z lagranżjanem materii – hamiltonian materii, określony jako odpowiednia składowa kanonicznego tensora energii-pędu:

$$L_{\text{mat}} - p_K \dot{z}^K = L_{\text{mat}} - p_K^0 z^K{}_0 = -T^0{}_0 = \tau^0{}_0 . \quad (2.69)$$

Tensor kanoniczny definiuje się jako:

$$T^\mu{}_\nu := p_K^\mu z^K{}_\nu - \delta_\nu^\mu L_{\text{mat}} .$$

Ostatnia równość w (2.69) wynika z twierdzenia Rosenfelda-Belinfantego (por. [5]), w myśl którego tensor *kanoniczny* jest równy (modulo znaki wynikające z odpowiednich konwencji) tensorowi *symetrycznemu* (zob. [8] w przypadku masywnym; dla materii zerowej dowód ten przeprowadzimy skrupulatnie w jednym z następujących rozdziałów pracy).

Całkując wyrażenie (2.69) po $V \cap S$ otrzymujemy zatem część „materialną” hamiltonianu (pamiętamy o przyjętym oznaczeniu $\mathcal{T}^{\mu\nu} := \delta(x^3) \tau^{\mu\nu}$):

$$\int_{V \cap S} L_{\text{mat}} - p_K \dot{z}^K = \int_{V \cap S} \tau^0{}_0 = \int_V \mathcal{T}^0{}_0 . \quad (2.70)$$

Aby dokonać transformacji Legendre’a w grawitacyjnych stopniach swobody – analogicznej do transformacji (2.68) materialnych stopni swobody – zastosujemy metodę opisaną m.in. w pracy [18]. W tym celu wykażemy, że z metryczności koneksji Γ wynika, iż grawitacyjny odpowiednik $\pi^{\mu\nu} \delta A_{\mu\nu}^0$, kanonicznej jednoformy $p_K \delta z^K$ redukuje się następująco:

$$\pi^{\mu\nu} \delta A_{\mu\nu}^0 = -\frac{1}{16\pi} g_{kl} \delta P^{kl} + \partial_k \left(\pi^{00} \delta \left(\frac{\pi^{0k}}{\pi^{00}} \right) \right) , \quad (2.71)$$

gdzie P^{kl} oznacza zewnętrzną krzywiznę powierzchni \mathcal{C} zapisaną w postaci ADM, tzn. daną wzorami

$$\begin{aligned} P^{kl} &:= \sqrt{\det g_{mn}} (K \tilde{g}^{kl} - K^{kl}) , \\ K_{kl} &:= -\frac{1}{\sqrt{|g^{00}|}} \Gamma_{kl}^0 = -\frac{1}{\sqrt{|g^{00}|}} A_{kl}^0 , \end{aligned} \quad (2.72)$$

zaś \tilde{g}^{kl} jest trójwymiarową metryką kontrawariantną, odwrotną do metryki g_{kl} indukowanej na V . Analogicznie, człon brzegowy $\pi^{\mu\nu} \delta A_{\mu\nu}^\perp = \pi^{\mu\nu} \delta A_{\mu\nu}^3$ redukuje się następująco:

$$\pi^{\mu\nu} \delta A_{\mu\nu}^3 = -\frac{1}{16\pi} g_{ab} \delta \mathcal{Q}^{ab} + \partial_a \left(\pi^{33} \delta \left(\frac{\pi^{3a}}{\pi^{33}} \right) \right) , \quad (2.73)$$

gdzie \mathcal{Q}^{ab} oznacza krzywiznę zewnętrzną² tuby $\partial\mathcal{T}$ zapisaną w postaci ADM, tzn. trójwymiarową gęstość tensorową daną wzorami analogicznymi do (2.28) i (2.29):

$$\mathcal{Q}^{ab} := \sqrt{|\det g_{cd}|} (L \hat{g}^{ab} - L^{ab}) , \quad (2.74)$$

$$L_{ab} := -\frac{1}{g^{33}} \Gamma_{ab}^3 = -\frac{1}{g^{33}} A_{ab}^3 , \quad (2.75)$$

²Używamy symbolu \mathcal{Q} na oznaczenie krzywizny zewnętrznej tuby świata $\partial\mathcal{T}$ dla odróżnienia od krzywizny zewnętrznej powłoki S , którą oznaczaliśmy literą Q .

zaś \hat{g}^{ab} jest trójwymiarową metryką kontrawariantną na tubie $\partial\mathcal{T}$, odwrotną do metryki indukowanej g_{ab} . Dowody obu tożsamości (2.71) i (2.73) są podane w rozdziale 2.3.

Korzystając z tych wzorów i pomijając dwuwymiarowe dywergencje znikające po wycalkowaniu, możemy przepisać grawitacyjną część (6.11) w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \int_V (\pi^{\mu\nu} \delta A_{\mu\nu}^0)' + \int_{\partial V} \pi^{\mu\nu} \delta A_{\mu\nu}^\perp &= -\frac{1}{16\pi} \int_V (g_{kl} \delta P^{kl})' - \frac{1}{16\pi} \int_{\partial V} g_{ab} \delta \mathcal{Q}^{ab} \\ &+ \int_{\partial V} \left(\pi^{00} \delta \left(\frac{\pi^{03}}{\pi^{00}} \right) + \pi^{33} \delta \left(\frac{\pi^{30}}{\pi^{33}} \right) \right)'. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Ostatnie wyrażenie podcałkowe może być prosto zapisane za pomocą kąta hiperbolicznego α między powierzchniami \mathcal{C} oraz $\partial\mathcal{T}$, który jest zdefiniowany następująco: $\alpha = \operatorname{arsinh}(q)$, gdzie

$$q = \frac{g^{30}}{\sqrt{|g^{00}g^{33}|}}, \quad (2.77)$$

oraz dwuwymiarowej formy objętościowej $\lambda = \sqrt{\det g_{AB}}$ na ∂V . Zachodzi bowiem następująca tożsamość:

$$\pi^{00} \delta \left(\frac{\pi^{03}}{\pi^{00}} \right) + \pi^{33} \delta \left(\frac{\pi^{30}}{\pi^{33}} \right) = \frac{1}{8\pi} \lambda \delta \alpha, \quad (2.78)$$

której prosty dowód podajemy również w rozdziale (2.3). W ten sposób otrzymujemy tożsamość:

$$\begin{aligned} \int_V (\pi^{\mu\nu} \delta A_{\mu\nu}^0)' + \int_{\partial V} \pi^{\mu\nu} \delta A_{\mu\nu}^\perp &= -\frac{1}{16\pi} \int_V (g_{kl} \delta P^{kl})' - \frac{1}{16\pi} \int_{\partial V} g_{ab} \delta \mathcal{Q}^{ab} + \frac{1}{8\pi} \int_{\partial V} (\lambda \delta \alpha)'. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Po takim przygotowaniu możemy wreszcie wykonać transformację Legendre'a między pochodnymi czasowymi a odpowiednimi „pędami kanonicznie sprzężonymi”. Transformacji tej dokonujemy zarówno w objętości:

$$(g_{kl} \delta P^{kl})' = (\dot{g}_{kl} \delta P^{kl} - \dot{P}^{kl} \delta g_{kl}) + \delta (g_{kl} \dot{P}^{kl})$$

jak i na brzegu: $(\lambda \delta \alpha)' = (\dot{\lambda} \delta \alpha - \dot{\alpha} \delta \lambda) + \delta (\lambda \dot{\alpha})$.

Okazuje się, że otrzymane w ten sposób pełne różniczki – które później dołączą do lagranżjanu po lewej stronie formuły (2.66), aby dać w sumie pełny hamiltonian układu – zbierają się do następującego wyrażenia:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{16\pi} \delta \int_V (g_{kl} \dot{P}^{kl}) + \frac{1}{8\pi} \delta \int_{\partial V} \lambda \dot{\alpha} \\ = \frac{1}{8\pi} \delta \int_V \sqrt{|g|} R^0_0 + \frac{1}{16\pi} \delta \int_{\partial V} (\mathcal{Q}^{AB} g_{AB} - \mathcal{Q}^{00} g_{00}). \end{aligned} \quad (2.80)$$

Przenosząc pierwszą z tych całek na lewą stronę formuły (2.66) i dołączając ją do części grawitacyjnej lagranżjanu otrzymujemy:

$$\frac{1}{16\pi} \int_V L_{\text{graw}} - \frac{1}{8\pi} \int_V \sqrt{|g|} R^0_0 = \frac{1}{16\pi} \int_V \sqrt{|g|} (R - 2R^0_0) = -\frac{1}{8\pi} \int_V \mathcal{G}^0_0 . \quad (2.81)$$

Wyrażenie to, które bywa nazywane „objętościową częścią hamiltonianu grawitacyjnego”, spotyka „hamiltonian materii” dany w postaci (2.70). Ich suma mogłaby być nazwana „objętościową częścią całkowitego hamiltonianu”. Wyraża się ona przez całkę

$$-\frac{1}{8\pi} \int_V (\mathcal{G}^0_0 - 8\pi \mathcal{T}^0_0) \equiv 0 , \quad (2.82)$$

znikającą tożsamościowo na mocy równań Einsteina³.

Ostatecznie transformacja Legendre’a zastosowana do formuły lagranżowskiej (2.66) daje następującą formułę generującą:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{16\pi} \int_V (\dot{P}^{kl} \delta g_{kl} - \dot{g}_{kl} \delta P^{kl}) + \frac{1}{16\pi} \int_{\partial V} (\lambda \delta \alpha - \dot{\alpha} \delta \lambda) + \int_{V \cap S} (\dot{p}^0_K \delta z^K - \dot{z}^K \delta p^0_K) \\ &- \frac{1}{16\pi} \int_{\partial V} g_{ab} \delta \mathcal{Q}^{ab} + \frac{1}{16\pi} \delta \int_{\partial V} (\mathcal{Q}^{AB} g_{AB} - \mathcal{Q}^{00} g_{00}) . \end{aligned} \quad (2.83)$$

Formuła ta została wyprowadzona w pracy J. Kijowskiego [19] dla szerokiej klasy lagranżjanów materii, jednak zawsze w modelu materii ciągłej. Obecnie pokazaliśmy, że jest ona prawdziwa również dla materii osobliwej, skoncentrowanej na dwuwymiarowej powłoce S , której metryka wewnętrzna jest niezdegenerowana i nosi sygnaturę $(-, +, +)$. W dalszej części naszej pracy wykażemy, że jest ona prawdziwa również dla materii świetlnej, poruszającej się po powierzchni frontu świetlnego, którego metryka jest zdegenerowana.

Powyższe równanie, traktowane jako hamiltonowskie sformułowanie teorii może – na pierwszy rzut oka – rozczarować. Co prawda wyrażenia w pierwszej linii wzoru (2.83) mają charakter hamiltonowski, analogiczny do prawej strony formuły hamiltonowskiej (2.65), jednak znikanie wyrażenia (2.82), którego różniczka powinna stać po lewej stronie takiej formuły w charakterze hamiltonianu, wygląda na zjawisko patologiczne. Tymczasem jednak tak nie jest: to tylko *objętościowa część hamiltonianu znika tożsamościowo*. Zjawisko to jest wyrazem niezmienniczości teorii względem dyfeomorfizmów „nie ruszających nieskończoności”. Natomiast pełny hamiltonian ma jeszcze część powierzchniową, którą należy wydobyć z członów brzegowych stojących w drugiej linii formuły (2.83). Nie będziemy tutaj szczegółowo analizowali tej procedury, która w przypadku skończonej tuby świata \mathcal{T} została przeprowadzona w pracy [19]. Do naszych celów wystarczy informacja, że w granicy, gdy brzeg tuby ∂V dąży do nieskończoności a trójwymiarowe całki po ∂V są odpowiednio kontrolowane, otrzymujemy w przypadku asymptotycznie płaskim standardową formułę hamiltonowską dla pola grawitacyjnego i pól materii, w której rolę hamiltonianu odgrywa

³Powyższe wyrażenie podcałkowe występuje często w pracach poświęconych kanonicznej grawitacji pod następującą postacią: $N\mathcal{H} + N^k \mathcal{H}_k$, gdzie \mathcal{H} oraz \mathcal{H}_k są odpowiednio więzami skalarnymi i wektorowymi.

masa ADM. Jest ona dana przez odpowiednią całkę brzegową w nieskończoności. Tak więc, oznaczając pędy materii następująco:

$$\pi_K := p_K \delta(x^3) , \quad (2.84)$$

ostateczna formuła hamiltonowska w przypadku granicznym $\partial V \rightarrow \infty$ (tzn. gdy V pokrywa całą powierzchnię Cauchy'ego \mathcal{C} , a więc $V \rightarrow \mathcal{C}$) przybiera następującą postać:

$$-\delta\mathcal{M} = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{C}} \left(\dot{P}^{kl} \delta g_{kl} - \dot{g}_{kl} \delta P^{kl} \right) + \int_{\mathcal{C}} \left(\dot{\pi}_K \delta z^K - \dot{z}^K \delta \pi_K \right) , \quad (2.85)$$

gdzie \mathcal{M} jest hamiltonianem całego układu, równym masie ADM liczonej w nieskończoności. Tak więc analogia z wzorem (2.65) z mechaniki sięga bardzo daleko. Technicznie, różnica polega na tym, że przestrzeń fazowa zmiennych: grawitacyjnych (P^{kl}, g_{kl}) na powierzchni Cauchy'ego \mathcal{C} oraz materiałowych (p_K, z^K) na powierzchni $S \cap \mathcal{C}$ jest nieskończenie wielowymiarowa. Jest jedna jeszcze jedna, poważniejsza różnica: wypisane powyżej stopnie swobody pola nie są niezależne, lecz podlegają więzom.

2.2.3 Więzy

Rozważmy dane początkowe $(P^{kl}, g_{kl}, \pi_K, z^K)$ na trójwymiarowej powierzchni typu przestrzennego \mathcal{C}_t . Niech \tilde{g}^{kl} oznacza trójwymiarową metrykę odwrotną do metryki na powierzchni g_{kl} , a $\gamma := \sqrt{\det g_{kl}}$. Przez $\overset{(3)}{R}$ oznaczamy trójwymiarowy skalar krzywizny metryki g_{kl} , $P := P^{kl} g_{kl}$ a „|” oznacza trójwymiarową pochodną kowariantną względem g_{kl} .

Pokażemy, że dane te muszą spełniać więzy wynikające z równań Gaussa-Codazziego dla składowej \mathcal{G}^0_{μ} gęstości tensora Einsteina. Twierdzenie to wiąże składowe \mathcal{G}^0_{μ} z danymi Cauchy'ego w następujący sposób. Część przestrzenna – styczna do V_t wyraża się następująco:

$$\mathcal{G}^0_l = -P_l^k|_k , \quad (2.86)$$

a część czasowa – normalna do V_t , następująco:

$$2\mathcal{G}^0_{\mu} n^{\mu} = -\gamma \overset{(3)}{R} + \left(P^{kl} P_{kl} - \frac{1}{2} P^2 \right) \frac{1}{\gamma} , \quad (2.87)$$

przy czym n oznacza jednostkowy wektor prostopadły do powierzchni Cauchy'ego \mathcal{C}_t :

$$n^{\mu} = -\frac{g^{0\mu}}{\sqrt{-g^{00}}} . \quad (2.88)$$

Z próżniowych równań Einsteina na zewnątrz oraz wewnątrz S wynika, że regularna część \mathcal{G}^0_{μ} znika. Zatem nieosobliwa część więzów wektorowych na \mathcal{C} jest następująca:

$$\text{reg} (P_l^k|_k) = 0 ,$$

a regularna część skalarnego równania więzów redukuje się do

$$\text{reg} \left(\gamma \overset{(3)}{R} - \left(P^{kl} P_{kl} - \frac{1}{2} P^2 \right) \frac{1}{\gamma} \right) = 0 .$$

W przypadku materii nieciągłej, powyższe, standardowe więzy należy uzupełnić osobiwą ich częścią, o nośniku na przecięciu $S_t = \mathcal{C}_t \cap S$. Procedura ta wygląda następująco. Osobiwa część trójwymiarowej różniczki kowariantnej pędu P_{kl} składa się z pochodnych w kierunku x^3 :

$$\text{sing}(P_l^k|_k) = \text{sing}(\partial_3 P_l^3) = \delta(x^3)[P_l^3] ,$$

a więc pełne przestrzenne równania Gaussa-Codazziego (2.86) przybierają postać:

$$\mathcal{G}^0_l = -P_l^k|_k = -[P_l^3]\delta(x^3) . \quad (2.89)$$

Składowe pędu ADM P^{kl} są regularne, a więc osobiwa część wyrażenia $(P^{kl} P_{kl} - \frac{1}{2} P^2)$ jest równa zeru. Singularna część trójwymiarowego skalaru krzywizny składa się z różniczkowanych w kierunku x^3 trójwymiarowych symboli Christoffela:

$$\text{sing}(\overset{(3)}{R}) = \text{sing}(\partial_3(\Gamma_{kl}^3 \tilde{g}^{kl} - \Gamma_{ml}^m \tilde{g}^{3l})) = \delta(x^3) [\Gamma_{kl}^3 \tilde{g}^{kl} - \Gamma_{ml}^m \tilde{g}^{3l}] ,$$

przy czym wyrażenie w nawiasach kwadratowych może być przepisane następująco:

$$\gamma [\Gamma_{kl}^3 \tilde{g}^{kl} - \Gamma_{ml}^m \tilde{g}^{3l}] = -2\sqrt{\tilde{g}^{33}} \left[\partial_3 \left(\gamma \sqrt{\tilde{g}^{33}} \right) \right] = -2\sqrt{\tilde{g}^{33}} \left[\partial_k \left(\frac{\gamma \tilde{g}^{3k}}{\sqrt{\tilde{g}^{33}}} \right) \right] , \quad (2.90)$$

ponieważ pochodne styczne do S są ciągłe. Z drugiej strony wyrażenie w nawiasach kwadratowych jest równe skalarowi krzywizny zewnętrznej k dwuwymiarowej powierzchni S_t zanurzonej w \mathcal{C}_t :

$$\gamma k = -\partial_k \left(\frac{\gamma \tilde{g}^{3k}}{\sqrt{\tilde{g}^{33}}} \right) . \quad (2.91)$$

Wynika stąd, że

$$\text{sing} \left(\gamma \overset{(3)}{R} \right) = 2\gamma \sqrt{\tilde{g}^{33}} [k] \delta(x^3) = 2[\lambda k] \delta(x^3) .$$

Ostatecznie, pełne przestrzenne równanie Gaussa-Codazziego (2.87) przybiera postać:

$$2\mathcal{G}^0_\mu n^\mu = -\text{sing} \left(\gamma \overset{(3)}{R} - \left(P^{kl} P_{kl} - \frac{1}{2} P^2 \right) \frac{1}{\gamma} \right) = -2[\lambda k] \delta(x^3) . \quad (2.92)$$

Równania (2.89) i (2.92) są uogólnieniem w sensie dystrybucji zwykłych próżniowych równań więzów, skalarnego i wektorowego.

Pokażemy teraz jak materia skoncentrowana na S_t generuje cztery wielkości powierzchniowe $[P^3_k]$ i $[\lambda k]$, które występują w osobiwej części więzów. Styczna do S część składowej \mathcal{G}^0_μ może być rozłożona na dwuwymiarową część styczną do S_t oraz część transwersalną.

Styczna do S_t część równań Einsteina daje nam następujące równania

$$\mathcal{G}^0_k = 8\pi\delta(x^3)\tau^0_k, \quad (2.93)$$

które razem ze wzorami (6.27) i (6.29) generują następujące równania więzów:

$$[P^3_k] = -8\pi\tau^0_k. \quad (2.94)$$

Pozostała część równań Einsteina jest następująca:

$$\mathcal{G}^0_\mu n^\mu = 8\pi\mathcal{T}^0_\mu n^\mu$$

gdzie $E := \mathcal{T}^0_\mu n^\mu = \tau^0_\mu n^\mu \delta(x^3) = \delta(x^3)\varepsilon$, opisuje gęstość materii na \mathcal{C} , zaś $\varepsilon = \tau^0_\mu n^\mu$, jest powierzchniową gęstością energii na S . Stąd $\text{sing}(\mathcal{G}^0_\mu n^\mu) = 8\pi\varepsilon$, i skalarne równanie więzów przyjmuje następującą postać:

$$8\pi\varepsilon + [\lambda k] = 0. \quad (2.95)$$

2.3 Dowody tożsamości użytych przy dowodzie formuły hamiltonowskiej

Dowód wzoru (2.73). Skorzystamy z tożsamości (2.24) oraz (2.25) na (czterowymiarowe!) pochodne kowariantne odpowiednich składowych metryki: $\nabla_a \pi^{33} \equiv 0$ oraz $\nabla_a \pi^{3a} \equiv 0$. Tożsamości te – wyrażające metryczność koneksji Γ – można rozwiązać względem A^3_{33} oraz A^3_{3a} , w wyniku czego otrzymujemy następujące więzy na tubie świata $\partial\mathcal{T}$:

$$A^3_{33} = \frac{1}{\pi^{33}} (\partial_a \pi^{3a} + A^3_{ab} \pi^{ab}), \quad (2.96)$$

$$A^3_{3a} = -\frac{1}{2\pi^{33}} (\partial_a \pi^{33} + 2A^3_{ab} \pi^{3b}), \quad (2.97)$$

gdzie $a, b = 0, 1, 2$. Wstawiając te więzy do wyrażenia:

$$\pi^{\mu\nu} \delta A^3_{\mu\nu} = \pi^{ab} \delta A^3_{ab} + 2\pi^{3a} \delta A^3_{3a} + \pi^{33} \delta A^3_{33}, \quad (2.98)$$

oraz wyrażając A^3_{ab} poprzez krzywiznę ADM z definicji (2.74), otrzymujemy po prostych przekształceniach algebraicznych tezę w postaci wzoru (2.73). \square

Dowód wzoru (2.71): Zamieniając rolę x^3 i x^0 w poprzednim dowodzie i korzystając z tożsamości: $\nabla_k \pi^{00} \equiv 0$ oraz $\nabla_k \pi^{0k} \equiv 0$, otrzymujemy następujące więzy:

$$A^0_{00} = \frac{1}{\pi^{00}} (\partial_k \pi^{0k} + A^0_{kl} \pi^{kl}), \quad (2.99)$$

$$A^0_{0k} = -\frac{1}{2\pi^{00}} (\partial_k \pi^{00} + 2A^0_{kl} \pi^{0l}). \quad (2.100)$$

Wstawiając je do wzoru:

$$\pi^{\mu\nu}\delta A_{\mu\nu}^0 = \pi^{kl}\delta A_{kl}^0 + 2\pi^{0k}\delta A_{0k}^0 + \pi^{00}\delta A_{00}^0, \quad (2.101)$$

i wyrażając A_{kl}^0 przez pęd P^{kl} z definicji (2.72), otrzymujemy po prostych przekształceniach algebraicznych tezę w postaci wzoru (2.71). \square

Dowód wzoru (2.78). Zauważmy najpierw, że zachodzi oczywista tożsamość:

$$\pi^{00}\delta\left(\frac{\pi^{03}}{\pi^{00}}\right) + \pi^{33}\delta\left(\frac{\pi^{30}}{\pi^{33}}\right) = 2\sqrt{|\pi^{00}\pi^{33}|}\delta\frac{\pi^{30}}{\sqrt{|\pi^{00}\pi^{33}|}}. \quad (2.102)$$

Rozkładając macierz $g_{\mu\nu}$ na bloki dwuwymiarowe: pierwszy, odpowiadający współrzędnym x^0 i x^3 oraz drugi, odpowiadający współrzędnym (x^A) , $A = 1, 2$; liczymy czterowymiarowy wyznacznik z metryki w tym rozkładzie blokowym. Jako rezultat otrzymujemy tożsamość:

$$2\sqrt{|\pi^{00}\pi^{33}|} = \frac{2}{16\pi}\sqrt{|g|}\sqrt{|g^{00}g^{33}|} = \frac{1}{8\pi}\frac{\sqrt{\det g_{AB}}}{\sqrt{1+q^2}}. \quad (2.103)$$

Stąd od razu wynika, że

$$\pi^{00}\delta\left(\frac{\pi^{03}}{\pi^{00}}\right) + \pi^{33}\delta\left(\frac{\pi^{30}}{\pi^{33}}\right) = \frac{\lambda}{8\pi}\delta\frac{q}{\sqrt{1+q^2}} = \frac{\lambda}{8\pi}\delta\alpha. \quad (2.104)$$

\square

Dowód wzoru (2.80). Chcemy pokazać, że zachodzi następujący wzór:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{16\pi}\delta\int_V(g_{kl}\dot{P}^{kl}) + \frac{1}{8\pi}\delta\int_{\partial V}\lambda\dot{\alpha} \\ & = \frac{1}{8\pi}\delta\int_V\sqrt{|g|}R^0_0 + \frac{1}{16\pi}\delta\int_{\partial V}(\mathcal{Q}^{AB}g_{AB} - \mathcal{Q}^{00}g_{00}). \end{aligned} \quad (2.105)$$

Korzystając z definicji obiektów \mathcal{Q}^{ab} (2.74) możemy wyrażenie $\int_{\partial V}(\mathcal{Q}^{AB}g_{AB} - \mathcal{Q}^{00}g_{00})$ przepisać za pomocą składowych metryki i ich pochodnych:

$$\frac{1}{16\pi}\int_{\partial V}(\mathcal{Q}^{AB}g_{AB} - \mathcal{Q}^{00}g_{00}) = \frac{1}{16\pi}\int_{\partial V}\sqrt{|g|}\left(g^{3\mu}\Gamma_{\mu 0}^0 - g^{0\mu}\Gamma_{\mu 0}^3 + g^{33}\partial_0\left(\frac{\pi^{30}}{\pi^{33}}\right)'\right). \quad (2.106)$$

Pokażemy teraz, że

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{16\pi}\delta\int_V(g_{kl}\dot{P}^{kl}) + \frac{1}{8\pi}\delta\int_{\partial V}\lambda\dot{\alpha} \\ & = \frac{1}{8\pi}\int_V\sqrt{|g|}R^0_0 + \frac{1}{16\pi}\int_{\partial V}\sqrt{|g|}\left(g^{3\mu}\Gamma_{0\mu}^0 - g^{0\mu}\Gamma_{0\mu}^3 + g^{33}\left(\frac{\pi^{30}}{\pi^{33}}\right)'\right). \end{aligned} \quad (2.107)$$

Rozważmy najpierw następującą tożsamość

$$\frac{1}{16\pi} \int_V g_{kl} \dot{P}^{kl} = \frac{1}{16\pi} \int_V g_{kl} \dot{P}^{kl} - \int_V \partial_k \left(\pi^{00} \left(\frac{\pi^{0k}}{\pi^{00}} \right) \right) + \int_V \partial_k \left(\pi^{00} \left(\frac{\pi^{0k}}{\pi^{00}} \right) \right) , \quad (2.108)$$

i oznaczmy przez D następujące wyrażenie

$$D := -\frac{1}{16\pi} g_{kl} \dot{P}^{kl} + \partial_k \left(\pi^{00} \left(\frac{\pi^{0k}}{\pi^{00}} \right) \right)$$

Z definicji (2.72) pędów P_{kl} wynika bezpośrednio, że obiekt D może być zapisany następująco:

$$D = \pi^{\mu\nu} \partial_0 A_{\mu\nu}^0 ,$$

jest to bowiem wykazany poprzednio wzór (2.71), z tą różnicą, że pochodna wariacyjna δ (a więc pochodna względem jakiegoś parametru) została zastąpiona pochodną względem konkretnego parametru: czasu. Jeśli teraz zastosować definicję $\pi_\lambda^{\mu\nu\kappa}$ daną wzorem (2.44), to otrzymujemy:

$$D = \pi_\lambda^{\mu\nu 0} \partial_0 \Gamma_{\mu\nu}^\lambda .$$

Ostatnia pochodna cząstkowa jest równa pochodnej Liego koneksji Γ względem pola $X = \frac{\partial}{\partial x^0}$ (tzn. takiego, którego współrzędne są dane wzorem $X^\mu = \delta^\mu_0$). Mamy zatem:

$$D = \pi_\lambda^{\mu\nu 0} \mathcal{L}_X \Gamma_{\mu\nu}^\lambda .$$

Z drugiej strony pochodna Liego koneksji wzdłuż *dowolnego* pola X formalnie wyraża się następującym wzorem:

$$\mathcal{L}_X \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \nabla_\mu \nabla_\nu X^\lambda - X^\sigma R^\lambda_{\nu\mu\sigma} .$$

Ze względu na tożsamości Bianchiego, prawa strona powyższego wzoru jest automatycznie symetryczna w dolnych wskaźnikach. Mamy więc:

$$\begin{aligned} D &:= (\delta_\lambda^0 \pi^{\mu\nu} - \delta_\lambda^\mu \pi^{0\nu}) (\nabla_\mu \nabla_\nu X^\lambda - X^\sigma R^\lambda_{\nu\mu\sigma}) \\ &= \frac{\sqrt{|g|}}{16\pi} \{ \nabla_\mu (\nabla^\mu X^0 - \nabla^0 X^\mu) + 2R^0_{\sigma} X^\sigma \} = \\ &= \frac{1}{16\pi} \left\{ \partial_k \left(\sqrt{|g|} (\nabla^k X^0 - \nabla^0 X^k) \right) + 2\sqrt{|g|} R^0_0 \right\} . \end{aligned} \quad (2.109)$$

W ostatnim równaniu pochodna kowariantna ∇_μ została zastąpiona pochodną cząstkową ∂_μ , ponieważ w działaniu na antysymetryczną, kontrawariantną gęstość tensorową obie pochodne dają taki sam wynik. Ponieważ nasze pole X jest stałe w używanym układzie współrzędnych (tzn. $\partial_\mu X^\nu = 0$), mamy także tożsamość:

$$\nabla^\mu X^\nu = g^{\mu\lambda} X^\sigma \Gamma_{\sigma\lambda}^\nu = g^{\mu\lambda} \Gamma_{0\lambda}^\nu . \quad (2.110)$$

co daje nam następujący wzór

$$\int_V D = \frac{1}{16\pi} \int_V \partial_k \left(\sqrt{|g|} (g^{k\mu} \Gamma_{0\mu}^0 - g^{0\mu} \Gamma_{0\mu}^k) \right) + \frac{1}{8\pi} \int_V \sqrt{|g|} R^0_0 . \quad (2.111)$$

Z równania (2.108) wynika, że D jest regularne. Zawiera ono wprawdzie osobliwą część formy brzegowej R^0_0 , ale ta osobliwość jest „kasowana” przez nieregularną część pochodnej w kierunku x^3 wyrażenia $\partial_3 \left[\sqrt{|g|} (g^{3\mu}\Gamma^0_{0\mu} - g^{0\mu}\Gamma^3_{0\mu}) \right]$. Możemy więc operować D jak wyrażeniem nieosobliwym, i nie musimy całkować go „kawałkami”, lecz możemy czynić to w sensie dystrybucyjnym, po całym \mathcal{C} . Z tożsamości (2.108) wynika, że

$$\begin{aligned} \frac{1}{16\pi} \int_V g_{kl} \dot{P}^{kl} = & - \frac{1}{8\pi} \int_V \sqrt{|g|} R^0_0 \\ & - \frac{1}{16\pi} \int_{\partial V} \sqrt{|g|} \left(g^{3\mu}\Gamma^0_{0\mu} - g^{0\mu}\Gamma^3_{0\mu} - g^{00} \left(\frac{\pi^{03}}{\pi^{00}} \right)' \right). \end{aligned} \quad (2.112)$$

Z definicji kąta α mamy także:

$$\lambda\dot{\alpha} = 8\pi \left(\pi^{00} \left(\frac{\pi^{03}}{\pi^{00}} \right)' + \pi^{33} \left(\frac{\pi^{30}}{\pi^{33}} \right)' \right), \quad (2.113)$$

jest to bowiem udowodniony poprzednio wzór (2.3), zastosowany do pochodnej czasowej zamiast, jak poprzednio, do pochodnej wariacyjnej δ . Składając powyższe dwa wzory otrzymujemy tezę:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{16\pi} \int_V (g_{kl} \dot{P}^{kl}) + \frac{1}{8\pi} \int_{\partial V} \lambda\dot{\alpha} \\ = \frac{1}{8\pi} \int_V \sqrt{|g|} R^0_0 + \frac{1}{16\pi} \int_{\partial V} \sqrt{|g|} \left(g^{3\mu}\Gamma^0_{0\mu} - g^{0\mu}\Gamma^3_{0\mu} + g^{33} \left(\frac{\pi^{30}}{\pi^{33}} \right)' \right). \end{aligned} \quad (2.114)$$

Lewa strona powyższego wyrażenia jest nieosobliwa, ale po prawej stronie pojawiają się wyrażenia osobliwe, takie jak $\int_V \sqrt{|g|} R^0_0$ oraz $\int_{\partial V} \sqrt{|g|} (g^{3\mu}\Gamma^0_{0\mu} - g^{0\mu}\Gamma^3_{0\mu})$. To drugie wyrażenie, chociaż jest członem brzegowym, pochodzi z członu objętościowego

$$\frac{1}{16\pi} \int_V \partial_\nu \left(\sqrt{|g|} (g^{\nu\mu}\Gamma^0_{0\mu} - g^{0\mu}\Gamma^\nu_{0\mu}) \right),$$

będącego całkowitą dywergencją. Pochodne w kierunku x^3 dają wyrażenie osobliwe, które kasuje osobliwą część R^0_0 , i ostatecznie zostaje tylko wyrażenie regularne. \square

Rozdział 3

Geometria powierzchni zerowych

Celem naszej pracy jest, między innymi, uogólnienie wyników poprzedniego rozdziału na przypadek frontu świetlnego czyli hiperpowierzchni o zdegenerowanej metryce. W szczególności będziemy stosować nasze wyniki do powierzchni izolowanych horyzontów zdarzeń, które są bardzo specjalnym frontami świetlnymi.

Geometrię niezdegenerowanej (niezerowej) hiperpowierzchni $S \in M$ w czasoprzestrzeni pseudoriemannowskiej (M, g) , opisywaliśmy w poprzednim rozdziale za pomocą następujących obiektów: obcięcia g_{ab} tensora metrycznego na czasoprzestrzeni M do hiperpowierzchni S , oraz krzywizny zewnętrznej tej hiperpowierzchni. Wygodnie było używać opisu krzywizny w wersji „pędu ADM”, który oznaczaliśmy przez Q^a_b .

Rozważaliśmy również czasoprzestrzenie składające się z dwu kawałków: M_- i M_+ , sklejone wzdłuż takiej hiperpowierzchni S w taki sposób, że tensor metryczny jest ciągły, a współczynniki koneksji mogą mieć nieciągłości typu skok na S . Pokazaliśmy, iż tensor Einsteina takiej czasoprzestrzeni może być zdefiniowany w sensie dystrybucji. Jego część osobliwa zawiera pochodne tych nieciągłości i równa jest $\mathcal{G}^a_b = \mathbf{G}^a_b \delta(x^3)$, przy czym trójwymiarowa gęstość tensorowa \mathbf{G}^a_b żyjąca na S jest po prostu skokiem „pędu” Q^a_b między obiema stronami tej powierzchni:

$$\mathbf{G}^a_b = [Q^a_b] . \quad (3.1)$$

Poza tym – stosując twierdzenie Gaussa-Codazziego po obu stronach powierzchni S – byliśmy w stanie udowodnić tożsamość Bianchiego dla takiej osobliwej krzywizny.

Taka konstrukcja nie może być *dostłownie* przeniesiona na przypadek frontu świetlnego, bowiem metryka indukowana jest w tym przypadku zdegenerowana, zatem standardowa konstrukcja krzywizny zewnętrznej, wykorzystująca nieistniejącą w tym przypadku metrykę odwrotną g^{ab} , jest bezużyteczna. Tym niemniej skonstruujemy w tym rozdziale odpowiednik wielkości Q^a_b i pokażemy, że zachodzi wzór (3.1). Co prawda, nasza wielkość $Q^a_b(X)$ nie będzie dana jednoznacznie, lecz będzie zależała od wyboru pewnego zerowego pola wektorowego X na S , jednak niejednoznaczność ta zniknie w przypadku liczenia skoku we wzorze (3.1). W ten sposób osobliwa krzywizna czasoprzestrzeni sklejanych wzdłuż frontu świetlnego będzie już jednoznacznie określona. Okaże się poza

tym, że $Q^a_b(X)$ spełnia odpowiednie uogólnienie równań Gaussa-Codazziego, co implikuje tożsamości Bianchiego dla osobliwej części tensora Einsteina takiej czasoprzestrzeni, niezbędnych dla konsystencji teorii samograwitującej materii świetnej.

3.1 Geometria wewnętrzna

Rozważmy czasoprzestrzeń M o sygnaturze lorentzowskiej i jej trójwymiarową rozmaitość S . Hiperpowierzchnia S jest powierzchnią zerową w tej czasoprzestrzeni, jeśli metryka $g_{\mu\nu}$ na M obcięta do metryki g_{ab} na S jest zdegenerowana.

Powierzchnie Cauchy'ego \mathcal{C}_t odpowiadające stałej wartości współrzędnej czasowej $x^0 = t$ są przestrzennopodobne, a współrzędna x^3 jest stała na S . Współrzędne czasoprzestrzenne będziemy oznaczali literami alfabetu greckiego $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$, współrzędne na hiperpowierzchni zerowej początkowymi literami alfabetu łacińskiego $a, b = 0, 1, 2$, współrzędne przestrzenne literami $k, l = 1, 2, 3$ a współrzędne na przecięciu $\mathcal{C}_t \cap S$ będziemy oznaczać wielkimi literami alfabetu łacińskiego $A, B = 1, 2$.

Biorąc pod uwagę niezdegenerowanie metryki czasoprzestrzennej widzimy, że metryka zdegenerowana g_{ab} na S ma sygnaturę $(0, +, +)$. To znaczy, że istnieje nieznikający wektor zerowy X na S (a więc taki, że $X_a X^a = 0$ i $X^b \neq 0$ dla co najmniej jednego b) taki, że jego czterowymiarowe zanurzenie X^μ w M jest ortogonalne do S . Wtedy kowektor $X_\nu = X^\mu g_{\mu\nu} = X^a g_{a\nu}$ znika na wektorach stycznych do S , czyli:

$$X^a g_{ab} = 0 . \quad (3.2)$$

Rozważmy krzywe całkowite pola X . Pokażemy, że po odpowiedniej reparametryzacji spełniają one równanie geodezyjne na M . W tym celu weźmy dowolną gładką funkcję φ , stałą na S , o nieznikającym gradiencie. Weźmy też dowolne zerowe pole wektorowe X^μ w otoczeniu S , które obcięte do S daje X^a . Ponieważ X^μ jest ortogonalne do S , stąd X_μ jest proporcjonalne do gradientu φ :

$$X_\mu = f \varphi_{,\mu} , \quad (3.3)$$

gdzie f jest jakimś współczynnikiem nieznikającym na S . Korzystając z symetrii drugich pochodnych pola skalarowego $\nabla_\lambda \nabla_\mu \varphi = \nabla_\mu \nabla_\lambda \varphi$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} X^\lambda \nabla_\lambda X_\mu &= \varphi_{,\mu} (X^\lambda \partial_\lambda f) + f X^\lambda \nabla_\lambda \nabla_\mu \varphi = \varphi_{,\mu} (X^\lambda \partial_\lambda f) + f X^\lambda \nabla_\mu \nabla_\lambda \varphi \\ &= (X^\lambda \partial_\lambda f) \varphi_{,\mu} + f X^\lambda \nabla_\mu \left(\frac{1}{f} X_\lambda \right) = (X^\lambda \partial_\lambda f) \varphi_{,\mu} + f X^\lambda \nabla_\mu X_\lambda \\ &= (X^\lambda \partial_\lambda f) \varphi_{,\mu} + \frac{1}{2} \nabla_\mu X^\lambda X_\lambda = (X^\lambda \partial_\lambda \log f) X_\mu . \end{aligned} \quad (3.4)$$

Stąd wnioskujemy, że pole $\tilde{X}^\mu := \frac{1}{f} X^\mu$ jest polem geodezyjnym:

$$\tilde{X}^\lambda \nabla_\lambda \tilde{X}^\mu = 0 . \quad (3.5)$$

Wykazaliśmy więc, że powierzchnia zerowa jest zbiorem geodezyjnych zerowych.

Pokażemy teraz, że można skonstruować hiperpowierzchnię S jeśli tylko znamy dane początkowe dla tych geodezyjnych – powierzchnie przestrzenną S_t i zerowe pole $X^\mu(x)$ zdefiniowane dla $x \in S_t$. Istnieją dokładnie dwie hiperpowierzchnie zerowe zawierające daną powierzchnię S_t . Żeby to zobaczyć, wybierzmy dowolną przestrzenną powierzchnię Cauchy'ego \mathcal{C}_t zawierającą S , oraz jakiś układ współrzędnych na \mathcal{C}_t taki, że współrzędną x^3 jest stała na S_t . W każdym punkcie $x \in \mathcal{C}_t$ mamy dokładnie dwa kierunki zerowe prostopadłe do dwuwymiarowej powierzchni S_t . W jednym z tych kierunków wybierzmy nie znikające pole wektorowe $X^\mu(x)$ i założmy, że jest ono klasy C^∞ . Na otoczeniu S_t istnieje wtedy jeden i tylko jeden czterowymiarowy układ współrzędnych x^μ spełniający poniższe warunki:

- współrzędne x^k , gdzie $k = 1, 2, 3$, są stałe na liniach geodezyjnych takich, że ich początek leży w dowolnym punkcie $x \in S_t$ i wychodzą z niego w kierunku $X^\mu(x)$,
- x^0 jest parametrem geodezyjnym wzdłuż tych linii i jest równy t na \mathcal{C}_t .

W tym układzie współrzędnych mamy:

$$X = \frac{\partial}{\partial x^0} . \quad (3.6)$$

Ponieważ pole X jest zerowe, mamy $0 = g(X, X) = g_{00}$. Poza tym, równanie geodezyjne (3.5) może być zapisane w następującej postaci:

$$0 = \nabla_0 \frac{\partial}{\partial x^0} = \Gamma_{00}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (2g_{\nu 0,0} - g_{00,\nu}) = 0 . \quad (3.7)$$

A stąd otrzymujemy, że

$$\frac{d}{dx^0} g_{\nu 0} = 0 \quad (3.8)$$

wzdłuż dowolnej geodezyjnej. Ale początkowo mieliśmy:

$$g_{a0}(x^0 = t) = g \left(X(x), \frac{\partial}{\partial x^a} \right) = 0 ,$$

ponieważ X było ortogonalne do powierzchni $\{x^3 = \text{const}\}$ ($a = 1, 2$) oraz do siebie ($a = 0$). Stąd mamy, że $g_{a0} \equiv 0$. Zatem $\{x^3 = \text{const}\}$ jest powierzchnią zerową

Widzimy więc, że dowolna hiperpowierzchnia zerowa S może być zanurzona w jednoparametrowej kongruencji powierzchni zerowych odpowiadających różnym wartościom stałej $\{x^3 = \text{const}\}$ zadanej na powierzchni \mathcal{C}_t . W dodatku układ współrzędnych x^a był skonstruowany tak, że pole X dane wzorem (3.6) jest zerowym polem geodezyjnym nie tylko na S , ale i w całym otoczeniu S .

Użyjemy teraz dowolnego układu współrzędnych takiego, że współrzędna x^3 jest stała wzdłuż wszystkich powierzchni zerowych należących do takiej kongruencji. Nie będziemy natomiast żądać, by współrzędne x^A były stałe na geodezyjnych zerowych, tzn. by pole

(3.6) było zerowe. Ogólna postać metryki czterowymiarowej spełniającej ten warunek jest następująca:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} n^A n_A & n_A & sM + m^A n_A \\ n_A & g_{AB} & m_A \\ sM + m^A n_A & m_A & \left(\frac{M}{N}\right)^2 + m^A m_A \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

oraz

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{N}\right)^2 & \frac{n^A}{N^2} - s\frac{m^A}{M} & \frac{s}{M} \\ \frac{n^A}{N^2} - s\frac{m^A}{M} & \tilde{g}^{AB} - \frac{n^A n^B}{N^2} + s\frac{n^A m^B + m^A n^B}{M} & -s\frac{n^A}{M} \\ \frac{s}{M} & -s\frac{n^A}{M} & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

gdzie $M > 0$, $s = \pm 1$, g_{AB} jest dwuwymiarową metryką indukowaną na powierzchni $\{x^0 = \text{const}, x^3 = \text{const}\}$ a \tilde{g}^{AB} jest jej odwrotną metryką kontrawariantną. Zarówno \tilde{g}^{AB} jak i g_{AB} są używane do podnoszenia i obniżania indeksów $A, B = 1, 2$ w dwuwymiarowych wektorach n^A i m^A . Oznaczając przez λ element objętości dwuwymiarowej

$$\lambda := \sqrt{\det g_{AB}}, \quad (3.11)$$

mamy, że $\sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} = \lambda M$.

W takim układzie współrzędnych dowolny kierunek zerowy na S musi być proporcjonalny do pola X danego wzorem:

$$X = \partial_0 - n^A \partial_A, \quad (3.12)$$

albo, równoważnie:

$$X^\mu = \frac{g^{3\mu}}{g^{30}} = M s g^{3\mu}. \quad (3.13)$$

Mamy, że:

$$g(X, X) = g(X, \partial_A) = 0. \quad (3.14)$$

Reper trójwymiarowy (X, ∂_A) na S zależy od szczególnego wyboru $(2+1)$ dekompozycji S zadanej wyborem współrzędnej czasowej x^0 . W dalszej części pracy wprowadzimy obiekty, które nie będą zależały od tego wyboru i będą dobrze opisywały geometrię S . W tym celu rozważmy poniższą transformację układu współrzędnych:

$$\tilde{X} = cX, \quad (3.15)$$

$$\tilde{\partial}_B = C_B^A \partial_A + f_B X, \quad (3.16)$$

gdzie $(\tilde{X}, \tilde{\partial}_{\tilde{B}})$ jest nowym reperem trójwymiarowym odpowiadającym nowemu układowi współrzędnych $(\tilde{x}^{\tilde{a}})$ na S . Współczynnik c może być otrzymany z poniższej zależności:

$$\begin{aligned} 1 = \langle d\tilde{x}^0, \tilde{X} \rangle &= \left\langle \frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial x^A} dx^A + \frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial x^0} dx^0, cX \right\rangle \\ &= c \left(-\frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial x^A} n^A + \frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial x^0} \right), \end{aligned} \quad (3.17)$$

i stąd

$$c = \left(\frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial x^0} - \frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial x^A} n^A \right)^{-1}. \quad (3.18)$$

Z drugiej strony z równania (3.12) mamy:

$$\begin{aligned} \partial_{\tilde{B}} &= \frac{\partial x^A}{\partial \tilde{x}^{\tilde{B}}} \partial_A + \frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^{\tilde{B}}} (X + n^A \partial_A) \\ &= \left(\frac{\partial x^A}{\partial \tilde{x}^{\tilde{B}}} + \frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^{\tilde{B}}} n^A \right) \partial_A + \frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^{\tilde{B}}} X, \end{aligned} \quad (3.19)$$

i ostatecznie

$$C_{\tilde{B}}^A = \frac{\partial x^A}{\partial \tilde{x}^{\tilde{B}}} + \frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^{\tilde{B}}} n^A, \quad (3.20)$$

$$f_{\tilde{B}} = \frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^{\tilde{B}}}. \quad (3.21)$$

W dalszym ciągu rozważań udowodnimy, że obiekt

$$v_X := \frac{\lambda}{X(x^0)} \quad (3.22)$$

jest gęstością skalarną na S , niezależną od układu współrzędnych (x^a) użytego powyżej. W tym celu pokażemy, że przy przejściu od jednego do drugiego układu współrzędnych wartość v_X jest pomnożona przez wyznacznik macierzy Jacobiego. Znaczy to, że $\mathbf{v}_X = v_X dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2$ jest niezależną od układu współrzędnych trójformą różniczkową na S . Trójforma ta zależy jednak od wyboru pola X . Jednak obiekt

$$\Lambda := v_X X, \quad (3.23)$$

będący dobrze zdefiniowaną gęstością wektorową na S , jest już zadany jednoznacznie przez strukturę S i nie zależy od wyboru pola X bowiem jego wyrażenie współrzędniowe:

$$\Lambda = \lambda (\partial_0 - n^A \partial_A), \quad (3.24)$$

rzeczywiście nie zależy od X .

Pozostaje zatem wykazać, że v_X jest gęstością skalarną lub – równoważnie – że Λ jest gęstością wektorową. W tym celu wyjdziemy z prawa transformacyjnego dla g_{AB}

$$g_{\tilde{A}\tilde{B}} = C_{\tilde{A}}^A C_{\tilde{B}}^B g(\partial_A + f_A X, \partial_B + f_B X) = C_{\tilde{A}}^A C_{\tilde{B}}^B g_{AB} . \quad (3.25)$$

Wynika zeń, że

$$\tilde{\lambda} = \lambda \det C_{\tilde{A}}^B . \quad (3.26)$$

Mamy zatem:

$$\begin{aligned} \Lambda^{\tilde{a}} &= \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{X}(\tilde{x}^{\tilde{0}})} \tilde{X}^{\tilde{a}} = (\det C_{\tilde{A}}^B) \frac{\lambda}{X(x^0)} c X^{\tilde{a}} \\ &= \det \left(\frac{\partial x^c}{\partial \tilde{x}^{\tilde{d}}} \right) \frac{\lambda}{X(x^0)} X^a \frac{\partial \tilde{x}^{\tilde{a}}}{\partial x^a} = \det \left(\frac{\partial x^c}{\partial \tilde{x}^{\tilde{d}}} \right) \Lambda^a \frac{\partial \tilde{x}^{\tilde{a}}}{\partial x^a} , \end{aligned}$$

co jest prawem transformacyjnym dla gęstości wektorowych. Przedostatnia równość wynika z następującej tożsamości:

$$c \det C_{\tilde{A}}^B = \left(\frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial x^0} - n^A \frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial x^A} \right)^{-1} \det \left(\frac{\partial x^A}{\partial \tilde{x}^{\tilde{B}}} + \frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^{\tilde{B}}} n^A \right) \equiv \det \left(\frac{\partial x^a}{\partial \tilde{x}^{\tilde{b}}} \right) . \quad (3.27)$$

Aby wykazać tę tożsamość, rozważmy następującą macierz $A^a_{\tilde{b}} := \frac{\partial x^a}{\partial \tilde{x}^{\tilde{b}}}$ i jej odwrotność $B^{\tilde{b}}_c := \frac{\partial \tilde{x}^{\tilde{b}}}{\partial x^c}$. Niech $N^0 := 0$ i $N^A := n^A$. Zdefiniujemy następujące macierze:

$$C^a_{\tilde{b}} := A^a_{\tilde{b}} + N^a A^0_{\tilde{b}} ,$$

oraz

$$D^{\tilde{b}}_c := B^{\tilde{b}}_c - B^{\tilde{b}}_a N^a \delta_c^0 .$$

Łatwo sprawdzić, że C i D są do siebie odwrotne. Z drugiej strony wyznaczniki macierzy A i C są sobie równe. Stąd

$$\det A = \det C = \det(C^A_{\tilde{B}})(D^{\tilde{0}}_0)^{-1} ,$$

co kończy dowód (3.27).

Jak pokazaliśmy powyżej, pole gęstości wektorowej Λ nie zależy od konkretnego wyboru pola X . Opisuje więc ono wewnętrzne właściwości trójwymiarowej geometrii g_{ab} powierzchni S . To samo zachodzi dla dywergencji $\partial_a \Lambda^a$, która jest tym samym inwariantną, niezależną od wyboru pola X , gęstością skalarną na S . W języku form różniczkowych wielkość Λ reprezentuje następującą dwuformę:

$$\mathbf{L} := \Lambda^a (\partial_a \rfloor dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2) ,$$

a dywergencja $\partial_a \Lambda^a$ reprezentuje różniczkę zewnętrzną powyższej dwuformy, czyli trójformę $d\mathbf{L} := (\partial_a \Lambda^a) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2$. W szczególności interesujące są powierzchnie zerowe, dla

których $d\mathbf{L}$ znika tożsamościowo. Powierzchnię o takiej własności nazywa się *nieekspandującym horyzontem* (zob. [2, 3], oraz rozdział 3.10 tej rozprawy).

Oba te obiekty, \mathbf{L} oraz \mathbf{v}_X , mogą być zdefiniowane geometrycznie, bez uciekania się do użycia układu współrzędnych. Spróbujemy w dokonać takiego opisu. Zauważmy więc, że w każdym punkcie $x \in S$, przestrzeń styczna $T_x S$ może być „podzielona”, tzn. możemy wprowadzić strukturę przestrzeni ilorazowej, względem przestrzeni degeneracji rozpiętej przez X . Przestrzeń ilorazowa jest wyposażona w strukturę przestrzeni metrycznej z niezdegenerowanym tensorem metrycznym i formę objętości ω (która wyrażona w języku współrzędnych ma następującą postać: $\omega = \lambda dx^1 \wedge dx^2$). Dwuforma \mathbf{L} jest równa cofnięciu formy objętości ω z dwuwymiarowej przestrzeni ilorazowej do przestrzeni stycznej $T_x S$. Trójforma \mathbf{v}_X może natomiast być zdefiniowana jako iloczyn zewnętrzny $\mathbf{v}_X = \alpha \wedge \mathbf{L}$, gdzie α jest dowolną jednoformą na S taką, że $\langle X, \alpha \rangle \equiv 1$.

Spróbujemy przyjrzeć się geometrii wewnętrznej S z jeszcze jednego punktu widzenia. Aby uzupełnić reper trójwymiarowy (X, ∂_A) na S do całego reperu czterowymiarowego na M , wprowadźmy pole Y *transwersalne* względem powierzchni S . Zażądamy, by spełniało ono następujące zależności.

$$g(Y, X) = 1, \quad (3.28)$$

$$g(Y, \partial_A) = 0. \quad (3.29)$$

Z tych warunków mamy wyznaczone pole Y z dokładnością do przesunięć w kierunku pola X

$$Y \rightarrow Y + hX, \quad (3.30)$$

gdzie h jest dowolnym polem skalarnym. Dokonując przedłużenia na otoczenie S współrzędnej x^0 zdefiniowanej na S możemy wybrać pole Y w postaci

$$Y = \frac{S}{M} (\partial_3 - m^A \partial_A). \quad (3.31)$$

Należy jednak zaznaczyć, że ta szczególna postać pola Y zależy nie tylko od $(2+1)$ -dekompozycji hiperpowierzchni S , ale także od $(3+1)$ -dekompozycji czasoprzestrzeni M w otoczeniu S . Prawo transformacyjne dla Y przy przejściu od jednej do drugiej $(2+1)$ -dekompozycji S jest następujące:

$$\tilde{Y} = c^{-1} (Y - k^A \partial_A) + hX, \quad (3.32)$$

gdzie pole skalarne h jest dowolne, a współczynniki k^A muszą być wyznaczone jednoznacznie z równania:

$$f_{\tilde{B}} = C_{\tilde{B}}^A g_{AC} k^C, \quad (3.33)$$

przy czym $f_{\tilde{B}}$ jest zadane przez (3.21). Z (3.28) i (3.29) mamy, że X i Y rozpinają wiązkę normalną do S . Pomimo pewnej dowolności w wyborze Y istnieją obiekty skonstruowane za pomocą reperu czterowymiarowego (X, ∂_A, Y) , które nie zależą od szczególnego wyboru Y i dobrze opisują geometrię hiperpowierzchni S .

3.2 Geometria zewnętrzna

Pochodna kowariantna pola X wzdłuż wektorów stycznych do S jest prostopadła do X , a więc styczna do S :

$$g(X, \nabla_a X) = \frac{1}{2} \partial_a g(X, X) \equiv 0 .$$

Zatem, dla ustalonej wartości wskaźnika a , wektor $\nabla_a X^\mu$ jest ortogonalny do S . W naszym specjalnym układzie współrzędnych (gdzie S jest opisywana równaniem $x^3 = \text{const.}$) oznacza to, że $\nabla_a X^3 = 0$, natomiast $\nabla_a X^b$ jest czysto trójwymiarowym obiektem określonym na S , który – przez analogię z przypadkiem powierzchni niezdegenerowanej – chciałoby się nazwać tensorem krzywizny zewnętrznej powierzchni S . Niestety, obiekt ten zależy od wyboru pola X . Inaczej niż w przypadku niezdegenerowanym, nie ma tu jednoznacznej normalizacji pola X (jest ono polem zerowym!), a więc zawsze można pomnożyć X przez dowolną, nieznikającą funkcję.

Aby przekonać się, jaką informację geometryczną niesie powyższy obiekt, przedstawimy powyższą pochodną kowariantną $\nabla_a X$ w postaci kombinacji liniowej wektorów ∂_a stycznych do S :

$$\nabla_a X =: -t^b_a \frac{\partial}{\partial x^b} . \quad (3.34)$$

Porównując powyższe wyrażenie ze wzorem (3.4) widzimy, że pole X^a jest wektorem własnym t^b_a . Odpowiadająca mu wartość własna znika, gdy X staje się geodezyjne.

Dokonajmy teraz $(2+1)$ dekompozycji S . Możemy wtedy podzielić t^b_a na dwie części: „przestrzenno-przestrzenną”

$$l_{ab} := t^c_a g_{cb} = -g(\partial_b, \nabla_a X) = g(\nabla_a \partial_b, X) = X_\mu \Gamma^{\mu}_{ab} , \quad (3.35)$$

oraz „czasowo-przestrzenną”

$$w_a := t^0_a = -g(Y, \nabla_a X) = -X^\mu \Gamma^0_{\mu a} . \quad (3.36)$$

Warto zauważyć, że zarówno l_{ab} jak i w_a są niezmiennicze względem transformacji typu (3.30), co wynika z tego, że

$$g(Y + hX, \nabla_a X) = -g(Y, \nabla_a X) .$$

Zatem zależą one jedynie od wyboru X i od $(2+1)$ -dekompozycji S .

Na mocy wzoru (3.35) macierz l_{ab} jest symetryczna. Spełnia ona następującą tożsamość, wynikającą z zastosowania wzoru (3.4):

$$0 = X^\lambda \nabla_\lambda X_a = X^b l_{ba} = l_{a0} - n^B l_{aB} .$$

Wynika stąd, że jej wszystkie składowe można wyliczyć z trzech składowych przestrzenno-przestrzennych l_{AB} według wzoru: $l_{0A} = l_{AB} n^B$ oraz $l_{00} = l_{AB} n^A n^B$. Wobec tego całą

macierz t^b_a można zrekonstruować w całości z trzech niezależnych składowych l_{AB} i z trzech $w_a = t^0_A$. Pozostałe składowe t^b_a są następujące:

$$\begin{aligned} t^A_0 &= (l_{0B} - t^0_0 g_{0B}) \tilde{g}^{BA} = (n^C l_{CB} - w_0 n_B) \tilde{g}^{BA} , \\ t^C_A &= (l_{AB} - t^0_A g_{0B}) \tilde{g}^{BC} = (l_{AB} - w_A n_B) \tilde{g}^{BC} . \end{aligned}$$

Pokażemy teraz, że l_{ab} jest pochodną Liego wzdłuż pola X tensora metrycznego g_{ab} na S . Korzystając z tego, że taka trójwymiarowa pochodna Liego g_{ab} jest równa obciążeniu do S czterowymiarowej pochodnej Liego tensora $g_{\mu\nu}$, możemy napisać:

$$\mathcal{L}_X(g_{ab}) = (\mathcal{L}_X g)_{ab} = g_{ac} \nabla_b X^c + g_{cb} \nabla_a X^c = 2g_{c(a} \nabla_{b)} X^c = 2g(\partial_a, \nabla_b X) , \quad (3.37)$$

a zatem

$$l_{ab} = -\frac{1}{2} \mathcal{L}_X g_{ab} . \quad (3.38)$$

Przy zmianie współrzędnych na S obiekt l_{ab} transformuje się więc według następującego prawa:

$$\tilde{l}_{\tilde{a}\tilde{b}} = -\frac{1}{2} \mathcal{L}_{\tilde{X}} g_{\tilde{a}\tilde{b}} = -\frac{1}{2} c (\mathcal{L}_X g)_{\tilde{a}\tilde{b}} = c l_{\tilde{a}\tilde{b}} = c l_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial \tilde{x}^{\tilde{a}}} \frac{\partial x^b}{\partial \tilde{x}^{\tilde{b}}} . \quad (3.39)$$

Byłoby to prawo tensorowe, gdyby nie współczynnik c dany wzorem (3.18), wynikający z faktu, że pole X cechuje się multiplikatywnie przez c zgodnie z wzorem (3.15).

Oznaczmy teraz przez „||” dwuwymiarową różniczkę kowariantną na każdej z powierzchni typu $\{x^0 = \text{const}\}$, $\{x^3 = \text{const}\}$, liczoną względem koneksji metrycznej w metryce g_{AB} . Ze wzoru (3.38) wynika:

$$\begin{aligned} l_{AB} &= -\frac{1}{2} (g_{AB,0} - n^C g_{AB,C} - n^C_{,A} g_{CB} - n^C_{,B} g_{AC}) \\ &= \frac{1}{2} (n_{A||B} + n_{B||A} - \dot{g}_{AB}) , \end{aligned} \quad (3.40)$$

oraz:

$$\lambda l_{AB} \tilde{g}^{AB} = \lambda l = -\partial_a \Lambda^a = -\dot{\lambda} + \partial_A (\lambda n^A) , \quad (3.41)$$

gdzie $l := l_{AB} \tilde{g}^{AB}$.

Niestety, prawo transformacyjne dla obiektu w_a , wynikające ze wzorów (3.15) i (3.16), nie ma charakteru tensorowego:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_a &= g \left(\frac{1}{c} (Y - k^A \partial_A) + hX, \nabla_a (cX) \right) \\ &= g \left(\frac{1}{c} Y, c \nabla_a X \right) + g \left(\frac{1}{c} Y, X \right) \nabla_a c + g(hX, c \nabla_a X) + g(hX, X) \nabla_a c \\ &\quad - g(k^A \partial_A, X) \frac{1}{c} \nabla_a c - g(k^A \partial_A, \nabla_a X) \\ &= w_a + \partial_a \varphi - k^B l_{aB} , \end{aligned} \quad (3.42)$$

gdzie $\varphi = \log c$ i k^A są dane przez (3.33). Chociaż w_a nie jest wielkością tensorową, będziemy używać tego obiektu do konstrukcji innych wielkości tensorowych na S .

Do celów naszej pracy wygodnie będzie zorganizować wielkości w_a i l_{ab} w jedną gęstość tensorową na S , daną następującym wzorem:

$$Q^a{}_b(X) := -s \{v_X (\nabla_b X^a - \delta^a{}_b \nabla_c X^c) + \delta^a{}_b \partial_c \Lambda^c\} . \quad (3.43)$$

Wielkość ta zależy *explicite* od wyboru pola zerowego X , jednak ma ona dobry, tensorowy charakter i nie zależy od wyboru układu współrzędnych użytego do jej konstrukcji. Jest ona, jak zobaczymy w dalszym ciągu, dobrym odpowiednikiem „pędu ADM”, używanego w poprzednim rozdziale dla powierzchni niezerowych. Zwróćmy uwagę, że ostatni człon we wzorze (3.43) jest niezależny od wyboru pola X . Został on wprowadzony jedynie po to, by skorygować własności algebraiczne obiektu $v_X (\nabla_b X^a - \delta^a{}_b \nabla_c X^c)$: dzięki temu zabiegowi $Q^a{}_b(X)$ jest ortogonalne do X i symetryczne po obniżeniu pierwszego indeksu¹:

$$Q^a{}_b(X) X^b = 0 , \quad (3.44)$$

$$Q_{ab}(X) = Q_{ba}(X) . \quad (3.45)$$

Jak się przekonamy w następnym rozdziale, własności te pozwolą nam zdefiniować dywergencję obiektu Q względem zdegenerowanej metryki g_{ab} , co będzie bardzo wygodne dla uzyskania prostego dowodu tożsamości Bianchiego dla osobliwego tensora Einsteina czasoprzestrzeni uzyskanej przez zszywanie wzdłuż frontu świetlnego S oraz – odpowiednio – praw zachowania dla materii świetlnej żyjącej na S .

Jak się za chwilę przekonamy, warunek symetrii (3.45) jest prawdziwy nawet bez tej modyfikacji: była ona potrzebna jedynie do uzyskania (3.44). W celu dowodu obu tych tożsamości wyrazimy $Q^a{}_b(X)$ przez poprzednio wprowadzone obiekty w_a i l_{ab} . Warto w tym celu wprowadzić symbol \tilde{g}^{ab} na oznaczenie macierzy, której współrzędne \tilde{g}^{AB} pokrywają się z wprowadzoną poprzednio dwuwymiarową macierzą odwrotną do g_{AB} , zaś $\tilde{g}^{0b} \equiv 0$. Wtedy dotychczasowe wyniki dotyczące w_a i l_{ab} prowadzą natychmiast do następującego wzoru:

$$\begin{aligned} sQ^a{}_b(X) &= \lambda \delta^a{}_b \nabla_c X^c - \lambda \nabla_b X^a - \delta^a{}_b \partial_c \Lambda^c \\ &= -\lambda \delta^a{}_b (w_c X^c + l) + \lambda (w_b X^a + \tilde{g}^{ac} l_{cb}) + \delta^a{}_b \lambda l \\ &= \lambda \tilde{g}^{ac} l_{cb} + \Lambda^a w_b - \delta^a{}_b \Lambda^c w_c , \end{aligned} \quad (3.46)$$

skąd natychmiast wynikają żądane własności (3.44) i (3.45) tensora Q .

3.3 Niezmienniczy operator dywergencji na S

Degeneracja metryki g_{ab} na S nie pozwala nam zdefiniować (za pomocą warunku zgodności „ $\nabla g = 0$ ”) żadnej naturalnej koneksji, którą moglibyśmy stosować do dowolnego pola tensorowego na S . Wiąże się to z faktem, że warunek znikania pochodnych zdegenerowanej

¹Jeśli S jest nieekspandującym horyzontem, człon ten znika.

metryki $g_{ab,c}$ w danym punkcie nie definiuje jednoznacznie „układu inercjalnego”. Problem ten przedyskutujemy dokładniej w rozdziale 5.2. Na ogół nie można więc definiować żadnej pochodnej „kowariantnej” na S . Jest jednak pewien wyjątek – pokażemy mianowicie, że zdegenerowana metryka definiuje jednoznacznie pewien kowariantny operator różniczkowy pierwszego rzędu działający tylko na mieszane (kontra-kowariantne) gęstości tensorowe \mathbf{H}^a_b o następujących własnościach algebraicznych:

$$\mathbf{H}^a_b X^b = 0 , \quad (3.47)$$

$$\mathbf{H}_{ab} = \mathbf{H}_{ba} , \quad (3.48)$$

gdzie $\mathbf{H}_{ab} := g_{ac} \mathbf{H}^c_b$. Definicja tego operatora nie może być rozszerzona na inne pola tensorowe na S . Ale na szczęście krzywizna zewnętrzna powierzchni zerowej oraz tensor energii-pędu powłoki zerowej są typu opisanych właśnie gęstości tensorowych, co nam zupełnie wystarczy do opisu tożsamości Bianchiego dla czasoprzestrzeni o osobliwej krzywiznie oraz do opisu dynamiki na powierzchni zerowej.

Ów operator, który oznaczmy jako $\bar{\nabla}_a \mathbf{H}^a_b$, może być zdefiniowany za pomocą czterowymiarowej koneksji na M w następujący sposób. Mając dany obiekt \mathbf{H}^a_b , weźmy jego rozszerzenie $\mathbf{H}^{\mu\nu}$ do czterowymiarowej symetrycznej gęstości tensorowej, ortogonalne do S , tzn. takie, że $\mathbf{H}^{\perp\nu} = 0$ („ \perp ” oznacza składowe transwersalne do S , tzn. obliczone na kowektorze dx^3 , gdy x^3 jest stała na S). Zdefiniujmy $\bar{\nabla}_a \mathbf{H}^a_b$ jako obcięcie do S czterowymiarowej dywergencji $\nabla_\mu \mathbf{H}^\mu_\nu$. Jak się za chwilę przekonamy, niejednoznaczności powstające przy rozszerzaniu trójwymiarowego obiektu \mathbf{H}^a_b określonego na S do czterowymiarowego określonego na M , ostatecznie się kasują. Wynik takiej operacji nie zawiera już żadnych niejednoznaczności i jest gęstością kowektorową na S . Okaże się ponadto, że zależy on jedynie od zdegenerowanej, wewnętrznej metryki na S .

Podamy teraz dwie inne definicje tego operatora, wygodne w dalszych zastosowaniach, a następnie pokażemy, że są one równoważne powyższej.

Druga z tych definicji jest oparta na obserwacji, że dla metryki niezdegenerowanej, dywergencja symetrycznej gęstości tensorowej \mathbf{H}^a_b może być obliczona następująco:

$$\nabla_a \mathbf{H}^a_b = \partial_a \mathbf{H}^a_b - \mathbf{H}^a_c \Gamma^c_{ab} \quad (3.49)$$

$$= \partial_a \mathbf{H}^a_b - \frac{1}{2} \mathbf{H}^{ac} g_{ac,b} , \quad (3.50)$$

gdzie $g_{ac,b} := \partial_b g_{ac}$. W naszym przypadku, gdy mamy do czynienia z metryką zdegenerowaną, ani Γ^c_{ab} nie istnieje, ani też podnoszenie indeksów w \mathbf{H} nie ma sensu. A jednak ma sens wzór (3.50) dla gęstości tensorowej \mathbf{H}^a_b na S , która spełnia tożsamości (3.47) i (3.48), jeśli jako \mathbf{H}^{ac} weźmiemy dowolną symetryczną gęstość tensorową taką, że po obniżeniu jednego wskaźnika odtwarza ona \mathbf{H}^a_b :

$$\mathbf{H}^a_b = \mathbf{H}^{ac} g_{cb} . \quad (3.51)$$

Jak łatwo sprawdzić, taka gęstość tensorowa zawsze istnieje, ale odtworzenie \mathbf{H}^{ac} z \mathbf{H}^a_b nie jest jednoznaczne, ponieważ $\mathbf{H}^{ac} + CX^a X^c$ także spełnia (3.51), jeśli tylko \mathbf{H}^{ac} to spełnia.

To jest jednak jedyna niejednoznaczność. Nie wpływa ona na wartość wyrażenia (3.50), ponieważ z tożsamości (3.2) mamy:

$$0 \equiv (X^a X^c g_{ac})_{,b} = X^a X^c g_{ac,b} + 2X^a g_{ac} X^c_{,b} = X^a X^c g_{ac,b} . \quad (3.52)$$

Zatem poniższe wyrażenie jest jednoznacznie zdefiniowane:

$$\bar{\nabla}_a \mathbf{H}^a_b := \partial_a \mathbf{H}^a_b - \frac{1}{2} \mathbf{H}^{ac} g_{ac,b} . \quad (3.53)$$

Okazuje się, że prawa strona powyższego wyrażenia nie zależy od wyboru układu odniesienia, tzn. transformuje się jak gęstość kowektorowa. Dowód tego faktu jest zawarty w rozdziale 3.7. Widzimy więc, że pojęcie dywergencji krzywizny zewnętrznej: $\bar{\nabla}_a Q^a_b(X)$, ma sens także w naszej zdegenerowanej metryce.

Aby wyrazić wynik za pomocą oryginalnej gęstości tensorowej \mathbf{H}^a_b , zauważmy, że ma ona pięć niezależnych składowych, i może być wyrażona za pomocą \mathbf{H}^0_A (2 składowe) oraz symetrycznej dwuwymiarowej macierzy \mathbf{H}_{AB} (3 składowe). Tożsamości (3.47) oraz (3.48) mogą być wtedy przepisane następująco:

$$\mathbf{H}^A_B = \tilde{g}^{AC} \mathbf{H}_{CB} - n^A \mathbf{H}^0_B , \quad (3.54)$$

$$\mathbf{H}^0_0 = \mathbf{H}^0_A n^A , \quad (3.55)$$

$$\mathbf{H}^B_0 = \left(\tilde{g}^{BC} \mathbf{H}_{CA} - n^B \mathbf{H}^0_A \right) n^A . \quad (3.56)$$

Zatem wielkość \mathbf{H}^a_b odtwarza się z $(\mathbf{H}^0_A, \mathbf{H}_{AB})$ jednoznacznie.

Aby przedstawić \mathbf{H}^{ab} za pomocą \mathbf{H}^a_b z dokładnością do członu $CX^a X^b$, weźmy następującą wielkość:

$$\mathbf{F}^{AB} := \tilde{g}^{AC} \mathbf{H}_{CD} \tilde{g}^{DB} - n^A \mathbf{H}^0_C \tilde{g}^{CB} - n^B \mathbf{H}^0_C \tilde{g}^{CA} , \quad (3.57)$$

$$\mathbf{F}^{0A} := \mathbf{H}^0_C \tilde{g}^{CA} =: \mathbf{F}^{A0} , \quad (3.58)$$

$$\mathbf{F}^{00} := 0 . \quad (3.59)$$

Łatwo zauważyć, że dowolne \mathbf{H}^{ab} spełniające (3.51) musi być następującej postaci

$$\mathbf{H}^{ab} = \mathbf{F}^{ab} + \mathbf{H}^{00} X^a X^b . \quad (3.60)$$

Niejednoznaczność w wyrażeniu \mathbf{H}^{ab} za pomocą \mathbf{H}^a_b jest więc opisana dowolnością wyboru wartości składowej \mathbf{H}^{00} . Korzystając z tego otrzymujemy

$$\bar{\nabla}_a \mathbf{H}^a_b := \partial_a \mathbf{H}^a_b - \frac{1}{2} \mathbf{H}^{ac} g_{ac,b} = \partial_a \mathbf{H}^a_b - \frac{1}{2} \mathbf{F}^{ac} g_{ac,b} \quad (3.61)$$

$$= \partial_a \mathbf{H}^a_b - \frac{1}{2} \left(2\mathbf{H}^0_A n^A_{,b} - \mathbf{H}_{AC} \tilde{g}^{AC}_{,b} \right) . \quad (3.62)$$

Równanie (3.53) sugeruje jeszcze jedną, trzecią definicję operatora dywergencji. Weźmy dowolny punkt $x \in S$ i wybierzmy w nim jakikolwiek układ odniesienia, w którym pochodne

składowych metryki g_{ac} znikają w x , tzn. $g_{ac,b}(x) = 0$. Taki układ odniesienia możemy nazwać inercyjnym. Dywergencja może być więc zdefiniowana jako różniczka cząstkowa liczona w układzie inercyjnym: $\bar{\nabla}_a \mathbf{H}^a_b := \partial_a \mathbf{H}^a_b$. Niejednoznaczności w wyborze układu odniesienia nie pozwalają nam rozszerzyć tej definicji na wszystkie różniczki kowariantne (np. nie umiemy obliczyć wyrażeń typu $\bar{\nabla}_c \mathbf{H}^a_b$). Niejednoznaczności te znikają jednak w definicji dywergencji. Zagadnienie to jest szczegółowo omówione w rozdziale 5.2.

Dwie ostatnie równoważne definicje operatora $\bar{\nabla}$ korzystają tylko z wewnętrznej metryki S . Pokażemy teraz, że definicje te są zgodne z pierwszą definicją, w której operator dywergencji definiowany był za pomocą czterowymiarowej koneksji. Zauważmy, że jedyna niejednoznaczność w rekonstrukcji czterowymiarowej gęstości tensorowej $\mathbf{H}^{\mu\nu}$, jest typu $CX^\mu X^\nu$. Każda taka rekonstrukcja może być otrzymana z rekonstrukcji \mathbf{H}^{ac} przez położenie $\mathbf{H}^{3\nu} = 0$ w naszym specjalnym układzie odniesienia, tzn. takim, że współrzędna x^3 jest stała na S . Obliczmy teraz czterowymiarową dywergencję $\mathbf{H}_\nu := \nabla_\mu \mathbf{H}^{\mu\nu}$. Ze względu na geodezyjny charakter krzywych całkowych pola X , jedyna niejednoznaczność która pozostaje po tej operacji jest typu $\tilde{C}X_\nu$. Zatem obciążenie \mathbf{H}_b z \mathbf{H}_ν do S jest już jednoznaczne. Korzystając z (3.50) mamy, że jest ono równe:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \mathbf{H}^\mu_b &= \partial_\mu \mathbf{H}^\mu_b - \frac{1}{2} \mathbf{H}^{\mu\lambda} g_{\mu\lambda,b} \\ &= \partial_a \mathbf{H}^a_b - \frac{1}{2} \mathbf{H}^{ac} g_{ac,b} = \bar{\nabla}_a \mathbf{H}^a_b . \end{aligned} \quad (3.63)$$

3.4 Równania Gaussa-Codazziego

Podobnie jak w przypadku podrozmaitości o niezdegenerowanej metryce, składowa transwersalna \mathcal{G}^\perp_b gęstości tensora Einsteina $\mathcal{G}^\mu_\nu = \sqrt{|\det g|} (R^\mu_\nu - \delta^\mu_\nu \frac{1}{2} R)$ wyraża się przez dywergencję krzywizny zewnętrznej Q na S . Zachodzi mianowicie następujące twierdzenie, które można nazwać równaniami Gaussa-Codazziego dla frontu świetlnego:

$$-\mathcal{G}^\perp_b \equiv \bar{\nabla}_a Q^a_b(X) + s v_X \partial_b \left(\frac{\partial_c \Lambda^c}{v_X} \right) . \quad (3.64)$$

Składowa transwersalna gęstości tensora Einsteina jest dobrze określonym obiektem trójwymiarowym na S . W naszym układzie współrzędnych dobranym do S w ten sposób, żeby współrzędna x^3 była stała na S , wielkość ta jest równa po prostu trzeciej składowej: $\mathcal{G}^\perp_b = \mathcal{G}^3_b$.

Warto jeszcze raz wspomnieć, że stosunek dwóch gęstości skalarnych $\partial_c \Lambda^c$ i v_X , jest funkcją skalarną. Gradient tej funkcji jest polem kowektorowym. Pomnożony przez gęstość v_X , daje *wewnętrzną* gęstość kowektorową na S . Zatem wszystkie trzy obiekty występujące w powyższym równaniu są geometrycznie dobrze określone.

Aby udowodnić (3.64), pokażemy najpierw, że lewa strona tego równania nie zależy od wyboru X . W tym celu rozważmy jakieś inne pole fX , gdzie $f > 0$ jest funkcją na S .

Mamy:

$$\begin{aligned}
-sQ^a_b(fX) &= v_{fX}(\nabla_b(fX^a) - \delta_b^a \nabla_c(fX^c)) + \delta_b^a \partial_c \Lambda^c \\
&= \frac{1}{f} v_X (f \nabla_b X^a + X^a \partial_b f - \delta_b^a f \nabla_c X^c - \delta_b^a X^c \partial_c f) + \delta_b^a \partial_c \Lambda^c \\
&= -sQ^a_b(X) + \Lambda^a \varphi_{,b} - \delta_b^a \Lambda^c \varphi_{,c},
\end{aligned} \tag{3.65}$$

gdzie $\varphi := \log f$. Łatwo sprawdzić, że następujący tensor

$$q^a_b(\varphi) := \Lambda^a \varphi_{,b} - \delta_b^a \Lambda^c \varphi_{,c}, \tag{3.66}$$

spełnia tożsamość (3.47). Co więcej, $q_{ab} = -g_{ab} \Lambda^c \varphi_{,c}$, co pokazuje (3.48). Z drugiej strony mamy

$$v_{fX} \partial_b \left(\frac{\partial_c \Lambda^c}{v_{fX}} \right) = v_X \partial_b \left(\frac{\partial_c \Lambda^c}{v_X} \right) + (\partial_c \Lambda^c) \varphi_{,b}, \tag{3.67}$$

Ale korzystając z (3.62) otrzymujemy

$$\bar{\nabla}_a q^a_b(\varphi) = (\partial_c \Lambda^c) \varphi_{,b},$$

co pokazuje, że lewa strona (3.64) nie zależy od żadnego wyboru pola X .

Zauważmy, że w przypadku niezdegenerowanym mamy cztery niezależne równania Gaussa-Codazziego, bowiem oprócz \mathcal{G}^\perp_b mamy jeszcze dodatkowe równanie na \mathcal{G}^\perp_\perp . W przypadku zdegenerowanym wektor prostopadły do S jest jednocześnie styczny do niej. Zatem \mathcal{G}^\perp_\perp jest już zawarty w \mathcal{G}^\perp_b i wobec tego mamy tylko trzy niezależne składowe równania Gaussa-Codazziego, dane wzorem (3.64).

Pełny dowód równania Gaussa-Codazziego (3.64) jest zawarty w rozdziale 3.8. Natomiast w rozdziale (3.9) podajemy alternatywny dowód, przeprowadzony w języku obiektów w_a i l_{ab} . Oba te opisy uzupełniają się i dzięki możliwości prześledzenia rozważań z dwóch różnych punktów widzenia dają nam lepszy obraz zachowania się badanego układu.

3.5 Struktura tensora Einsteina i tożsamości Bianchiego

Osobliwa część tensora Einsteina składa się z drugich pochodnych metryki w kierunku x^3 . Pierwsze pochodne metryki w tym kierunku mają nieciągłości typu skok, drugie pochodne są już osobliwe, przy czym osobliwość ta jest typu delta Diraca skoncentrowana na hiperpowierzchni S . Możemy teraz powtórzyć bez żadnych zmian rachunki stosowane w rozdziale 2.2, ponieważ nigdzie w tych rachunkach nie korzystaliśmy z własności metryki trójwymiarowej na S . Rachunki te dadzą nam osobliwą część tensora Einsteina w języku skoku zależnej od wyboru układu współrzędnych wielkości \tilde{Q}^μ_ν . Wynik ten jest istotny dla wyprowadzenia pewnych własności teorii, jednak pełna teoria (np. dowód własności geometrycznych osobliwego tensora Einsteina oraz dowód spełniania przezeń tożsamości Bianchiego) wymaga wyrażenia go przez skok krzywizny zewnętrznej $Q^\mu_\nu(X)$, co uczynimy następnie.

Żeby wydzielić tę osobliwą część z całego tensora Einsteina, użyjemy tej samej procedury co w rozdziale 2.2. Najpierw więc przepiszemy tensor Ricciego

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_{(\mu} \Gamma_{\nu)\lambda}^\lambda + \Gamma_{\sigma\lambda}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma, \quad (3.68)$$

za pomocą następujących kombinacji symboli Christoffela:

$$A_{\mu\nu}^\lambda := \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \delta_{(\mu}^\lambda \Gamma_{\nu)\kappa}^\kappa. \quad (3.69)$$

Mamy:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda A_{\mu\nu}^\lambda - A_{\mu\sigma}^\lambda A_{\nu\lambda}^\sigma + \frac{1}{3} A_{\mu\lambda}^\lambda A_{\nu\sigma}^\sigma. \quad (3.70)$$

Wyrażenia kwadratowe w A mogą mieć tylko nieciągłości typu skok. Pochodne transwersalne do S są więc ograniczone i należą do regularnej części tensora Ricciego. Osobliwa część tensora Ricciego zawiera tylko pochodne w kierunku transwersalnym. W układzie współrzędnych, w którym x^3 jest stałe na S , otrzymujemy:

$$\text{sing}(R_{\mu\nu}) = \partial_3 A_{\mu\nu}^3 = \boldsymbol{\delta}(x^3) [A_{\mu\nu}^3]. \quad (3.71)$$

Stąd widzimy, że osobliwa część tensora Einsteina jest następująca:

$$\text{sing}(\mathcal{G}^\mu{}_\nu) := \sqrt{|g|} \text{sing}\left(R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2} \delta^\mu{}_\nu R\right) = \boldsymbol{\delta}(x^3) \mathbf{G}^\mu{}_\nu, \quad (3.72)$$

gdzie przez $\mathbf{G}^\mu{}_\nu$ oznaczyliśmy następującą kombinację skoków pochodnych metryki:

$$\mathbf{G}^\mu{}_\nu := \sqrt{|g|} \left(\delta^\beta{}_\nu g^{\mu\alpha} - \frac{1}{2} \delta^\mu{}_\nu g^{\alpha\beta} \right) [A_{\alpha\beta}^3]. \quad (3.73)$$

Własności tego obiektu są szczegółowo przedyskutowane w dalszej części tego rozdziału. W szczególności udowodnimy teraz – podobnie jak rozdziale (2.2), że składowe transwersalne tego obiektu względem S znikają. W naszym układzie współrzędnych dostosowanym do S oznacza to następującą tożsamość:

$$\mathbf{G}^3{}_\nu \equiv 0. \quad (3.74)$$

Dowód (3.74): W tym celu rozważmy po obu stronach S następujący obiekt:

$$\tilde{Q}^\mu{}_\nu := \sqrt{|g|} \left(g^{\mu\alpha} A_{\alpha\nu}^3 - \frac{1}{2} \delta^\mu{}_\nu g^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}^3 \right) = 16\pi \left\{ \pi^{\mu\alpha} A_{\alpha\nu}^3 - \frac{1}{2} \delta^\mu{}_\nu \pi^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}^3 \right\}, \quad (3.75)$$

którego własności będą przeanalizowane w rozdziale 3.6. Mamy więc

$$\mathbf{G}^\mu{}_\nu := [\tilde{Q}^\mu{}_\nu]. \quad (3.76)$$

Korzystając z warunku metryczności koneksji otrzymujemy następujące równania spełnione po obu stronach S :

$$0 \equiv \nabla_a \pi^{33} = \partial_a \pi^{33} + 2\pi^{3\mu} \Gamma_{\mu a}^3 - \pi^{33} \Gamma_{a\mu}^\mu = \partial_a \pi^{33} + 2\pi^{3\mu} A_{\mu a}^3, \quad (3.77)$$

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \nabla_a \pi^{3a} = \partial_a \pi^{3a} + \pi^{\mu a} \Gamma_{\mu a}^3 + \pi^{3\mu} \Gamma_{\mu a}^a - \pi^{3a} \Gamma_{a\mu}^\mu \\ &= \partial_a \pi^{3a} + \pi^{ab} A_{ab}^3 - \pi^{33} A_{33}^3, \end{aligned} \quad (3.78)$$

Ponieważ $\pi^{\mu\nu}$ są ciągle wzdłuż S , skoki tych wyrażeń między dwiema stronami S muszą zniknąć:

$$\frac{1}{16\pi}\mathbf{G}^3_a = \pi^{3\mu}[A^3_{\mu a}] = -\frac{1}{2}[\partial_a\pi^{33}] = 0, \quad (3.79)$$

$$\frac{1}{16\pi}\mathbf{G}^3_3 = -\frac{1}{2}(\pi^{ab}[A^3_{ab}] - \pi^{33}[A^3_{33}]) = \frac{1}{2}[\partial_a\pi^{3a}] = 0, \quad (3.80)$$

co kończy dowód (3.74). \square

Można także posługiwać się obiektem $\mathbf{G}^{\mu\lambda} = \mathbf{G}^\mu_\nu g^{\nu\lambda}$. Ponieważ zachodzi (3.74), całkowita informacja niesiona przez obiekt \mathbf{G}^μ_ν jest zawarta w trójwymiarowej symetrycznej wielkości \mathbf{G}^{ab} . Niestety, w odróżnieniu od przypadku powierzchni niezdegenerowanej (patrz rozdział 2.2) nie jest to wielkość tensorowa, podobnie zresztą jak \mathbf{G}^μ_ν , i zależy ona od wyboru układu współrzędnych. Możemy jednak podzielić informację zawartą w \mathbf{G} na część inwariantną, niezależną od wyboru układu współrzędnych, i część zależną od wyboru cechowania. Ta pierwsza jest zawarta w trójwymiarowym obiekcie o mieszanych składowych:

$$\mathbf{G}^a_b := \mathbf{G}^{a\mu}g_{\mu b} = \mathbf{G}^{ac}g_{cb}. \quad (3.81)$$

Pokażemy bowiem, że zachodzi poprawiony wzór (3.76), mianowicie:

$$\mathbf{G}^a_b := [Q^a_b(X)]. \quad (3.82)$$

Podobnie jak dla powierzchni niezdegenerowanych, dowód wynika z faktu, że „brzydkie” wielkości \tilde{Q}^a_b i „ładne” wielkości Q^a_b różnią się o wyrażenia zawierające jedynie metrykę i jej pochodne wzdłuż S , a zatem znikające przy braniu skoku między obiema stronami S . Ważne jest również to, że choć $Q^a_b(X)$ zależy od wyboru pola X , to po wzięciu skoku między obiema stronami zależność ta znika.

Dowód formuły (3.82) wynika z wykazanego w rozdziale 3.6 lematu 3.1, będącego odpowiednikiem wzoru (2.33) obowiązującego w przypadku powierzchni o niezdegenerowanej metryce. Lemat ten głosi, że obiekt \tilde{Q}^a_b jest związany z $Q^a_b(X)$ w następujący sposób:

$$s\tilde{Q}^a_b = sQ^a_b - \frac{1}{2}\lambda l\delta^a_b + \Lambda^a\chi_b - \delta^a_b\Lambda^c\chi_c, \quad (3.83)$$

gdzie $\chi_c := \frac{1}{2}\partial_c \log\left(\frac{M}{\lambda}\right)$. Zatem skoki tych wielkości między obiema stronami hiperpowierzchni S są sobie równe:

$$[\tilde{Q}^a_b] = [Q^a_b], \quad (3.84)$$

co razem ze wzorem (3.76) daje nam dowód (3.82).

Wzór (3.82) dowodzi, że \mathbf{G}^a_b jest trójwymiarową gęstością tensorową na S . Z własności krzywizny zewnętrznej (wzory (3.44) i (3.45)) wynika, że jest ona ortogonalna do X i symetryczna po obniżeniu górnego wskaźnika:

$$\mathbf{G}^a_b X^b = 0, \quad (3.85)$$

$$\mathbf{G}_{ab} = \mathbf{G}_{ba}. \quad (3.86)$$

Można zatem obliczyć jej dywergencję $\bar{\nabla}_a \mathbf{G}^a_b$. Biorąc skok tożsamości Gaussa-Codazziego (3.64) otrzymamy – zupełnie identycznie, jak w przypadku niezdegenerowanym – tożsamość Bianchiego dla pełnego tensora krzywizny, składającego się z części regularnej i osobliwej $\mathbf{G}^a_b \delta_S$. Zachodzi mianowicie:

$$\nabla_\mu \mathcal{G}^\mu_c = ([\text{reg}(\mathcal{G})^\perp_c] + \bar{\nabla}_a \mathbf{G}^a_b) \delta(x^3) \equiv 0 . \quad (3.87)$$

Pokazaliśmy zatem, że tożsamości $\nabla_\mu \mathcal{G}^\mu_c \equiv 0$ zachodzą również dla czasoprzestrzeni o osobliwej krzywiznie skoncentrowanej na powierzchni frontu falowego. W szczególności gdy spełnione są po obu stronach S próżniowe równania Einsteina: $\text{reg}(\mathcal{G})^\mu_\nu = 0$, to powyższa tożsamość implikuje natychmiast znikanie dywergencji $\bar{\nabla}_a \mathbf{G}^a_b = 0$. Równość ta – jak zazwyczaj w ogólnej teorii względności – jest warunkiem konsystencji osobliwej części równań Einsteina $\mathbf{G}^a_b = 8\pi\tau^a_b$, które wyprowadzimy w dalszej części pracy, bowiem tensor energii-pędu materii świetlnej τ^a_b jest automatycznie zachowany, tzn. spełnia tożsamość $\bar{\nabla}_a \tau^a_b \equiv 0$.

Jak już wspomnieliśmy, inaczej niż w przypadku niezdegenerowanym, obiekty \mathbf{G}^{ab} (czy też $\mathbf{G}^{\mu\nu}$) nie mają żadnego sensu geometrycznego i nie są dane jednoznacznie. Używanie ich w próbach opisu dynamiki powłoki materii świetlnej przez innych autorów prowadziło do licznych trudności, które w naszym formalizmie udało się wyeliminować. Przedyskutujemy teraz dokładniej te problemy.

Zgodnie z rozważaniami zwartymi w rozdziale 3.3, obiekt \mathbf{G}^a_b ma pięć niezależnych składowych. Tzn. może on być jednoznacznie odtworzony z \mathbf{G}^0_A (dwie niezależne składowe) oraz z symetrycznej dwuwymiarowej macierzy \mathbf{G}_{AB} o trzech niezależnych składowych:

$$\mathbf{G}^A_B = \tilde{g}^{AC} \mathbf{G}_{CB} - n^A \mathbf{G}^0_B , \quad (3.88)$$

$$\mathbf{G}^0_0 = \mathbf{G}^0_A n^A , \quad (3.89)$$

$$\mathbf{G}^B_0 = \left(\tilde{g}^{BC} \mathbf{G}_{CA} - n^B \mathbf{G}^0_A \right) n^A . \quad (3.90)$$

Przejście od \mathbf{G}^a_b do $(\mathbf{G}^0_A, \mathbf{G}_{AB})$ jest jednoznaczne. Natomiast jednoznaczne odtworzenie \mathbf{G}^{ab} z \mathbf{G}^a_b jest niemożliwe, tzn. możliwe tylko *modulo* dowolny człon addytywny fX^aX^b . Przypiszmy \mathbf{G}^a_b następującą wielkość:

$$\mathfrak{G}^{AB} := \tilde{g}^{AC} \mathbf{G}_{CD} \tilde{g}^{DB} - n^A \mathbf{G}^0_C \tilde{g}^{CB} - n^B \mathbf{G}^0_C \tilde{g}^{CA} , \quad (3.91)$$

$$\mathfrak{G}^{0A} := \mathbf{G}^0_C \tilde{g}^{CA} , \quad (3.92)$$

$$\mathfrak{G}^{00} := 0 . \quad (3.93)$$

Łatwo sprawdzić, że

$$\mathbf{G}^{ab} = \mathfrak{G}^{ab} + \mathbf{G}^{00} X^a X^b . \quad (3.94)$$

Brakująca, tzn. niezawarta w \mathbf{G}^a_b , informacja o \mathbf{G}^{ab} jest więc zakodowana w \mathbf{G}^{00} . Inaczej niż \mathbf{G}^a_b , nie jest to wielkość inwariantna i zależy od wyboru układu odniesienia (p. rozważania pod koniec tego rozdziału).

Tensorowy charakter \mathbf{G}^a_b jest dobrze widoczny, gdy wyrazimy jego składowe za pomocą skoku „transwersalnej krzywizny” w_a . Korzystając ze wzoru (3.42) widzimy, obiekt $[w_a]$

transformuje się jak trójwymiarowa gęstość kowektorowa określona na S , bowiem człony „cechowania” w prawie transformacyjnym na w_a są takie same po obu stronach S , a więc nie wchodzi do skoku $[w_a]$. Pokażemy teraz, że można wyrazić \mathbf{G} za pomocą następującego wzoru:

$$\mathbf{G}^a_b = s\Lambda^a[w_b] . \quad (3.95)$$

Dowód: Zauważmy najpierw, że jedyne nieznikające nieciągłe składowe $A^3_{\mu\nu}$ to A^3_{33} , A^3_{30} i A^3_{3A} . Korzystając ze wzoru $g^{33} = 0$ możemy pokazać, że $[A^3_{ab}] \equiv 0$, ponieważ $A^3_{ab} = \Gamma^3_{ab} = g^{3\mu}\Gamma_{\mu ab} = g^{3c}\Gamma_{cab}$. Ten ostatni obiekt, tzn. Γ_{cab} , zawiera tylko składowe metryki na S oraz ich pochodne też na S , a więc takie same po obu stronach S .

Zatem, korzystając z (3.13) oraz (3.24), mamy :

$$\mathbf{G}^a_b = \lambda M g^{a\beta} [A^3_{b\beta}] = \lambda M g^{a3} [A^3_{b3}] = s\Lambda^a [A^3_{b3}] . \quad (3.96)$$

ale

$$[A^3_{b3}] = \frac{1}{2} [\Gamma^3_{3b} - \Gamma^a_{ba}] = \frac{1}{2} g^{3a} [\Gamma_{a3b}] - \frac{1}{2} g^{a\mu} [\Gamma_{\mu ba}] . \quad (3.97)$$

Ponieważ pochodne g w kierunkach stycznych do S są ciągłe wzdłuż S , mamy, że $[g_{\mu\nu,a}] = 0$, i powyższe wyrażenie redukuje się następująco

$$[A^3_{b3}] = \frac{1}{2} g^{3a} ([\Gamma_{a3b}] - [\Gamma_{3ba}]) = \frac{1}{2} g^{3a} [g_{ab,3}] = \frac{1}{2} g^{03} X^a [g_{ab,3}] \quad (3.98)$$

$$= -X^a g^{03} [\Gamma_{3ab}] = -X^a [\Gamma^0_{ab}] = -X^\mu [\Gamma^0_{\mu b}] = [w_b] , \quad (3.99)$$

co razem z (3.36) kończy dowód (3.95). \square

Konsekwencją (3.95) jest znikanie śladu \mathbf{G} . Mamy bowiem następującą tożsamość:

$$X^a [w_a] = 0 , \quad (3.100)$$

która wynika z (3.98):

$$X^a [w_a] = \frac{1}{2} g^{03} X^a X^b [g_{ab,3}] \equiv 0 , \quad (3.101)$$

oraz z założenia, że długość X jest stała i wynikającego stąd równania (3.52), spełnionego po obu stronach S .

Podobne obliczenia dają nam, że

$$\mathbf{G}^{00} = -\frac{1}{M} [\lambda_{,3}] , \quad (3.102)$$

co pokazuje, że obiekt \mathbf{G}^{ab} dany równaniem (3.94) nie transformuje się jak gęstość tensorowa na S . Mówiąc inaczej, definicja \mathbf{G}^{ab} nie jest jednoznaczna i zależy od wyboru układu współrzędnych.

Przyjrzyjmy się temu dokładnie. Możemy pokazać, że wielkość \mathbf{G}^{00} nie transformuje się jak obiekt geometryczny przy zmianie układu współrzędnych (3.15), (3.16).

Dowód: Weźmy układ odniesienia, w którym $X = \partial_0$ (tzn. $n^A = 0$) i dokonajmy następującej transformacji układu współrzędnych:

$$\tilde{x}^0 = x^0 + b_A x^A, \quad \tilde{x}^A = x^A, \quad \tilde{x}^3 = x^3, \quad (3.103)$$

gdzie b_A są pewnymi stałymi. Korzystając z (3.9) mamy:

$$\begin{aligned} \frac{s}{\tilde{M}} &= g(d\tilde{x}^0, d\tilde{x}^3) = g(dx^0, dx^3) + b_A g(dx^A, dx^3) \\ &= \frac{s}{M}(1 - b_A n^A) = \frac{s}{M}, \end{aligned} \quad (3.104)$$

i stąd otrzymujemy, że $\tilde{M} = M$. Poza tym, nowy układ $(\tilde{X}, \tilde{\partial}_{\tilde{B}}, \tilde{\partial}_{\tilde{3}})$ może być obliczony następująco:

$$\tilde{X} = X, \quad (3.105)$$

$$\tilde{\partial}_{\tilde{B}} = \frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^{\tilde{B}}} \partial_0 + \frac{\partial x^A}{\partial \tilde{x}^{\tilde{B}}} \partial_A = \delta_{\tilde{B}}^A \partial_A - b_{\tilde{B}} X, \quad (3.106)$$

$$\tilde{\partial}_{\tilde{3}} = \partial_3. \quad (3.107)$$

Stąd wynika, że $\tilde{\lambda} = \lambda$, oraz

$$\tilde{\mathbf{G}}^{\tilde{0}\tilde{0}} = -\frac{1}{\tilde{M}}[\partial_{\tilde{3}} \tilde{\lambda}] = -\frac{1}{M}[\partial_3 \lambda] = \mathbf{G}^{00}. \quad (3.108)$$

Z drugiej strony mamy, że $d\tilde{x}^0 = dx^0 + b_A dx^A$ i $\det\left(\frac{\partial x^a}{\partial \tilde{x}^b}\right) = 1$. Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{G}}^{\tilde{0}\tilde{0}} - \mathbf{G}^{00} &= \mathbf{G}(d\tilde{x}^0, d\tilde{x}^0) - \mathbf{G}(dx^0, dx^0) \\ &= 2b_A \mathbf{G}^{0A} + \mathbf{G}^{AB} b_A b_B, \end{aligned}$$

co nie znika tożsamościowo. □

Na koniec tego rozdziału zauważmy jeszcze, że ostatni człon w definicji (3.43) gęstości ADM Q na powierzchni S jest taki sam po obu jej stronach. Zatem jego skok po obu stronach S znika tożsamościowo. Zatem osobliwa część gęstości tensora Einsteina (3.82) redukuje się do

$$\mathbf{G}^a{}_b = [Q^a{}_b] = -sv_X ([\nabla_b X^a] - \delta_b^a [\nabla_c X^c]). \quad (3.109)$$

3.6 Własności obiektu $\tilde{Q}^\mu{}_\nu$

W poprzednim rozdziale wprowadziliśmy obiekt $\tilde{Q}^\mu{}_\nu$ taki, że

$$\mathbf{G}^\mu{}_\nu = [\tilde{Q}^\mu{}_\nu]. \quad (3.110)$$

który może być wyrażony następująco:

$$\tilde{Q}^\mu{}_\nu = \sqrt{|g|} \left(\delta_\nu^\beta g^{\mu\alpha} - \frac{1}{2} \delta_\nu^\mu g^{\alpha\beta} \right) A_{\alpha\beta}^3 \quad (3.111)$$

Wyrazimy najpierw wielkość $\tilde{Q}^\mu{}_\nu$ za pomocą obiektów w_a i l_{ab} . Do tego celu będziemy potrzebowali składowych A_{ab}^3 , A_{3a}^3 i A_{33}^3 , a także ich zwężeń ze składowymi metryki.

Zanim zabierzemy się do rachunków, przepiszemy trójwymiarową część kontrawariantnej metryki czasoprzestrzeni w trochę innej postaci niż (3.10). Najpierw zapiszemy dwuwymiarową metrykę odwrotną $\tilde{g}^{\tilde{A}\tilde{B}}$ w postaci trójwymiarowej, kładąc $\tilde{g}^{\tilde{0}a} := 0$. Obiekt ten spełnia następującą tożsamość:

$$\tilde{g}^{ac} g_{cb} = \delta^a_b - X^a \delta^0_b .$$

Zatem metryka odwrotna g^{ab} (3.10) może być zapisana w następujący sposób

$$g^{ab} = \tilde{g}^{ab} - \frac{1}{N^2} X^a X^b - \frac{s}{M} (m^a X^b + m^b X^a) , \quad (3.112)$$

gdzie $m^a := \tilde{g}^{aB} m_B$ tak, że $m^0 := 0$, oraz

$$g^{3\mu} = \frac{s}{M} X^\mu .$$

Teraz już możemy policzyć składowe A_{ab}^3 , A_{3a}^3 i A_{33}^3 .

- Składowe A_{ab}^3

Ze wzoru (3.35) mamy, że l_{ab} może być wyrażone następująco za pomocą symboli Christoffela Γ i pola X :

$$l_{ab} := -g(\partial_b, \nabla_a X) = g(\nabla_a \partial_b, X) = X_\mu \Gamma_{ab}^\mu . \quad (3.113)$$

Ponieważ X jest ortogonalne do S mamy, że $X_a = 0$. Ze względu na postać metryki (3.9), jedyna nieznikająca składowa X_μ jest równa $X_3 = sM$. Zatem mamy $l_{ab} = sM\Gamma_{ab}^3 = sMA_{ab}^3$ i stąd wynika, że:

$$\sqrt{|g|} A_{ab}^3 = s\lambda l_{ab} . \quad (3.114)$$

Policzymy jeszcze zwężenie A_{ab}^3 ze składowymi metryki g^{ab} .

Z faktu, że

$$X^a l_{ab} = X^a X^c \Gamma_{cab} = \frac{1}{2} X^c X^a g_{ca,b} \equiv 0 , \quad (3.115)$$

wynika ortogonalność l_{ab} do pola X : $l_{ab} X^b = 0$. Skorzystamy teraz z warunku metryczności dla koneksji Γ :

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \nabla_a \pi^{3a} = \partial_a \pi^{3a} + \pi^{3\mu} \Gamma_{\mu a}^a + \pi^{\mu a} \Gamma_{\mu a}^3 - \pi^{3a} \Gamma_{a\mu}^\mu \\ &= \partial_a \pi^{3a} + \pi^{ab} \Gamma_{ab}^3 = \partial_a \pi^{3a} + \pi^{ab} A_{ab}^3 . \end{aligned} \quad (3.116)$$

Stąd

$$\begin{aligned}\partial_c \Lambda^c &= \partial_c \left(s \sqrt{|g|} g^{3c} \right) = 16\pi s \pi^{3c}{}_{,c} = -16\pi s \pi^{ab} A_{ab}^3 \\ &= -\lambda g^{ab} l_{ab} = -\lambda \tilde{g}^{ab} l_{ab} = -\lambda l ,\end{aligned}\tag{3.117}$$

gdzie $l = \tilde{g}^{ab} l_{ab}$ i $\pi^{ab} = \frac{\sqrt{|g|}}{16\pi} g^{ab}$. Zatem

$$\sqrt{|g|} A_{ab}^3 g^{ab} = s \lambda l .\tag{3.118}$$

- Składowe A_{3a}^3

Obliczymy teraz składowe $A_{3a}^3 = \Gamma_{3a}^3 - \frac{1}{2} \Gamma_{\mu a}^\mu$. Mamy, że

$$\Gamma_{\mu a}^\mu = \partial_a \log \sqrt{|g|} = \partial_a \log (\lambda M) ,$$

więc zostaje nam policzyć Γ_{3a}^3 zgodnie z następującym wzorem:

$$\begin{aligned}\Gamma_{3a}^3 &= g^{3c} \Gamma_{c3a} = \frac{s}{M} X^c (g_{3c,a} - \Gamma_{3ca}) \\ &= \frac{s}{M} X^c g_{3c,a} - X^c g^{0\mu} \Gamma_{\mu ca} + X^c g^{0b} \Gamma_{bca} \\ &= w_a + \frac{s}{M} X^c g_{3c,a} + \frac{s}{M} X^b m^c \Gamma_{bca} - \frac{s}{M} X^c m^b g_{bc,a} \\ &= w_a + \frac{s}{M} m^c l_{ca} + \frac{s}{M} \{ (X^c g_{3c})_{,a} - X^c_{,a} (g_{3c} - m^b g_{bc}) \} \\ &= w_a + \frac{s}{M} m^c l_{ca} + \frac{1}{M} M_{,a} ,\end{aligned}\tag{3.119}$$

gdzie skorzystaliśmy z zależności (3.36): $w_a := -X^\mu \Gamma_{\mu a}^0$. Ostatecznie otrzymujemy więc następujący wzór na składowe A_{3a}^3 :

$$A_{3a}^3 = w_a + \chi_a + \frac{s}{M} m^b l_{ba} ,\tag{3.120}$$

przy czym wprowadziliśmy oznaczenie $\chi_a := \frac{1}{2} \partial_a \log \left(\frac{M}{\lambda} \right)$.

- Składowa A_{33}^3

Pozostaje nam do obliczenia składowa A_{33}^3 , która może być zapisana następująco:

$$\begin{aligned}A_{33}^3 &= \Gamma_{33}^3 - \Gamma_{3\mu}^\mu = -\Gamma_{3a}^a = -\frac{1}{2} (g^{ab} g_{ab,3} + g^{a3} g_{33,a}) \\ &= -\partial_3 \log \lambda + \frac{s}{M} m^a X^b g_{ab,3} - \frac{1}{2} g^{a3} g_{33,a} ,\end{aligned}\tag{3.121}$$

przy czym skorzystaliśmy z faktu, że

$$\frac{1}{2} \tilde{g}^{ab} g_{ab,3} = \partial_3 \log \lambda .$$

Możemy teraz wyrazić poszczególne składowe obiektu $\tilde{Q}^{\mu\nu}$ za pomocą znanych już wielkości l_{ab} i w_a . Korzystając z wyprowadzonych powyżej postaci składowych A^3_{ab} , A^3_{3a} i A^3_{33} mamy, że składowa \tilde{Q}^a_b jest następująca:

$$\begin{aligned}\tilde{Q}^a_b &= \sqrt{|g|} \left(\delta_b^\beta g^{a\alpha} - \frac{1}{2} \delta_b^a g^{\alpha\beta} \right) A^3_{\alpha\beta} \\ &= \sqrt{|g|} \left(g^{a3} A^3_{3b} + g^{ac} A^3_{cb} - \delta_b^a g^{3c} A^3_{3c} - \frac{1}{2} \delta_b^a g^{cd} A^3_{cd} \right) \\ &= \lambda \left(g^{ac} l_{cb} - \frac{1}{2} \delta_b^a l \right) + \Lambda^a A^3_{3b} - \delta_b^a \Lambda^c A^3_{3c} \\ &= \lambda \left(g^{ac} l_{cb} - \frac{1}{2} \delta_b^a l \right) + \Lambda^a \left(w_b + \chi_b + \frac{s}{M} m^c l_{cb} \right) - \delta_b^a \Lambda^c \left(w_c + \chi_c + \frac{s}{M} m^d l_{dc} \right) .\end{aligned}\tag{3.122}$$

Dokonując analogicznych obliczeń dla składowych \tilde{Q}^3_3 i \tilde{Q}^3_a dostajemy, że:

$$s\tilde{Q}^3_3 = -\frac{1}{2}\lambda l ,\tag{3.123}$$

$$s\tilde{Q}^3_a = 0 .\tag{3.124}$$

Składowa \tilde{Q}^a_3 jest trochę bardziej skomplikowana:

$$\begin{aligned}\tilde{Q}^a_3 &= \sqrt{|g|} g^{a\beta} A^3_{\beta 3} = \lambda M (g^{3a} A^3_{33} + g^{ab} A^3_{b3}) = s\Lambda^a A^3_{33} \\ &\quad + \lambda M \left(\tilde{g}^{ab} + \frac{1}{N^2} X^a X^b - \frac{s}{M} (m^a X^b + m^b X^a) \right) A^3_{b3} \\ &= s\Lambda^a \left(-\partial_3 \log \lambda + \frac{s}{M} m^a X^b g_{ab,3} - \frac{1}{2} g^{a3} g_{33,a} \right) \\ &\quad + \lambda M \left(\tilde{g}^{ab} + \frac{1}{N^2} X^a X^b - \frac{s}{M} (m^a X^b + m^b X^a) \right) \left(w_b + \chi_b + \frac{s}{M} m^c l_{cb} \right) .\end{aligned}\tag{3.125}$$

Możemy teraz wyrazić wielkość zależną od wyboru układu współrzędnych \tilde{Q}^a_b przez krzywiznę zewnętrzną $Q^a_b(X)$. Udowodnimy więc następujący lemat:

Lemat 3.1. *Obiekt \tilde{Q}^a_b jest związany z $Q^a_b(X)$ w następujący sposób:*

$$s\tilde{Q}^a_b = sQ^a_b(X) - \frac{1}{2}\lambda \delta_b^a + \Lambda^a \chi_b - \delta_b^a \Lambda^c \chi_c ,\tag{3.126}$$

gdzie $\chi_c := \frac{1}{2} \partial_c \log \left(\frac{M}{\lambda} \right)$.

Dowód: Korzystając z (3.122), (3.120) oraz (3.112) otrzymujemy:

$$s\tilde{Q}^a_b = \lambda \left(\tilde{g}^{ac} l_{cb} - \frac{1}{2} \delta_b^a l \right) + \Lambda^a w_b - \delta_b^a \Lambda^c w_c + \Lambda^a \chi_b - \delta_b^a \Lambda^c \chi_c .\tag{3.127}$$

Z definicji (3.43) oraz własności (3.36) mamy

$$\begin{aligned} sQ^a{}_b(X) &= \lambda\delta^a{}_b\nabla_c X^c - \lambda\nabla_b X^a - \delta^a{}_b\partial_c\Lambda^c \\ &= -\lambda\delta^a{}_b(w_c X^c + l) + \lambda(w_b X^a + \tilde{g}^{ac}l_{cb}) + \delta^a{}_b\lambda l \\ &= \lambda\tilde{g}^{ac}l_{cb} + \Lambda^a w_b - \delta^a{}_b\Lambda^c w_c \end{aligned} \quad (3.128)$$

i otrzymujemy (3.126). \square

Wzór ten bardzo nam się przyda w późniejszych rachunkach. Potrzebna nam będzie jeszcze następująca zależność (przy czym operator pochodnej cząstkowej będziemy mogli zastąpić operatorem wariacji δ):

$$\begin{aligned} s\tilde{Q}^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta,a} &= \left(\lambda(g^{be}g^{cd}l_{ed} - \frac{1}{2}lg^{bc}) + (\Lambda^b g^{cd} + \Lambda^c g^{bd} - \Lambda^d g^{cb})A_{3d}^3 \right) g_{bc,a} \\ &\quad + 2s\tilde{Q}^3{}_3 \left(\partial_a \log M + \frac{s}{M}m_B n_{,a}^B \right) \end{aligned} \quad (3.129)$$

Dowód wzoru (3.129): Z równań (3.123) i (3.124) otrzymujemy, że kontrawariantne składowe $\tilde{Q}^{3\mu}$ są postaci

$$\begin{aligned} \tilde{Q}^{33} &= 0, \\ \tilde{Q}^{3b} &= g^{3b}\tilde{Q}^3{}_3, \end{aligned}$$

a więc zwężenie całego obiektu $\tilde{Q}^{\alpha\beta}$ z pochodnymi metryki $g_{\alpha\beta,a}$ jest następujące:

$$\tilde{Q}^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta,a} = 2\tilde{Q}^3{}_3 g^{3b}g_{3b,a} + \tilde{Q}^{bc}g_{bc,a}.$$

Ponadto z postaci metryki kowariantnej $g_{\mu\nu}$ (3.9) oraz kontrawariantnej $g^{\mu\nu}$ (3.10) mamy zależność

$$g^{3b}g_{3b,a} = \partial_a \log M + \frac{s}{M}m_B n_{,a}^B.$$

oraz

$$\tilde{Q}^{ab} = (\delta^a{}_c g^{bd} + g^{ad}g^{3b}g_{3c})\tilde{Q}^c{}_d + \frac{X^a X^b}{M^2}\tilde{Q}^{33}.$$

Korzystając z równania (3.122) oraz tego, że $X^a X^b g_{ab,c} = 0$ otrzymujemy:

$$s\tilde{Q}^{bc}g_{bc,a} = \left(\lambda(g^{be}g^{cd}l_{ed} - \frac{1}{2}lg^{bc}) + \Lambda^b A_{3d}^3 g^{cd} + \Lambda^c A_{3d}^3 g^{bd} - \Lambda^d A_{3d}^3 g^{cb} \right) g_{bc,a} \quad (3.130)$$

i ostatecznie

$$\begin{aligned} s\tilde{Q}^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta,a} &= \left(\lambda(g^{be}g^{cd}l_{ed} - \frac{1}{2}lg^{bc}) + (\Lambda^b g^{cd} + \Lambda^c g^{bd} - \Lambda^d g^{cb})A_{3d}^3 \right) g_{bc,a} \\ &\quad + 2s\tilde{Q}^3{}_3 \left(\partial_a \log M + \frac{s}{M}m_B n_{,a}^B \right). \end{aligned} \quad (3.131)$$

\square

Możemy przepisać powyższy wzór używając wariacji δ zamiast pochodnej cząstkowej. Otrzymujemy wtedy:

$$\begin{aligned} s\tilde{Q}^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} &= \left(\lambda(g^{be}g^{cd}l_{ed} - \frac{1}{2}lg^{bc})\delta g_{bc} + (\Lambda^b g^{cd} + \Lambda^c g^{bd} - \Lambda^d g^{cb})A_{3d}^3 \right) \delta g_{bc} \\ &+ 2s\tilde{Q}^3_3 \left(\frac{1}{M}\delta M + \frac{s}{M}m_B\delta n^B \right). \end{aligned} \quad (3.132)$$

Korzystając z postaci obiektu Q^{ab} (3.128), składowych A_{3a}^3 (3.120) oraz tego, że $\tilde{Q}^3_3 = -\frac{1}{2}\lambda l$ otrzymujemy następujące wzory:

$$\tilde{Q}^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = Q^{ab}\delta g_{ab} - \frac{1}{2}s\lambda\tilde{g}^{ab}\delta g_{ab} - \lambda\delta \log M \quad (3.133)$$

$$+ s\chi_d (\Lambda^a \tilde{g}^{bd} + \Lambda^b \tilde{g}^{ad} - \Lambda^d \tilde{g}^{ab}) \delta g_{ab} \quad (3.134)$$

i analogicznie

$$\tilde{Q}^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = -2s\lambda (l + X^d(w_d + \chi_d)) \quad (3.135)$$

Będą one użyte w rozdziale 4, przy wyprowadzaniu formuły generującej.

3.7 Poprawność definicji operatora $\bar{\nabla}$

Stwierdzenie 1. *Obiekt*

$$\bar{\nabla}_a T^a_b(x) \equiv \partial_a T^a_b - \frac{1}{2}T^{ac}g_{ac,b} \quad (3.136)$$

ma własności transformacyjne gęstości kowektorowej.

Aby udowodnić powyższe stwierdzenie wprowadźmy nowy układ odniesienia ($y^{\tilde{a}}$) taki, że znikają w nim wszystkie pochodne tensora metrycznego:

$$g_{\tilde{a}\tilde{b},\tilde{c}} = 0 \quad \text{dla każdego } \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}. \quad (3.137)$$

Inaczej niż w przypadku metryki niezdegenerowanej, warunek ten nie wyznacza „układu odniesienia”, tzn. klasy układów współrzędnych, między którymi drugie pochodne jednych współrzędnych względem innych znikają w tym punkcie. Ta niejednoznaczność uniemożliwia definicję koneksji metrycznej dla metryki zdegenerowanej. Przedyskutujemy dokładnie ten problem w rozdziale 5.2.

Z powyższego równania możemy otrzymać parę ciekawych własności:

$$0 = g_{\tilde{a}\tilde{b},\tilde{c}} = \frac{\partial x^c}{\partial y^{\tilde{c}}} \frac{\partial}{\partial x^c} \left(\frac{\partial x^a}{\partial y^{\tilde{a}}} \frac{\partial x^b}{\partial y^{\tilde{b}}} g_{ab} \right),$$

a więc

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^c}{\partial y^{\tilde{c}}} \frac{\partial}{\partial x^c} \left(\frac{\partial x^a}{\partial y^{\tilde{a}}} \frac{\partial x^b}{\partial y^{\tilde{b}}} \right) g_{ab} &= -\frac{\partial x^a}{\partial y^{\tilde{a}}} \frac{\partial x^b}{\partial y^{\tilde{b}}} \frac{\partial x^c}{\partial y^{\tilde{c}}} \frac{\partial}{\partial x^c} g_{ab}, \\ \left(\frac{\partial x^a}{\partial y^{\tilde{a}}} \frac{\partial^2 x^b}{\partial y^{\tilde{c}} \partial y^{\tilde{b}}} + \frac{\partial x^a}{\partial y^{\tilde{b}}} \frac{\partial^2 x^b}{\partial y^{\tilde{c}} \partial y^{\tilde{a}}} \right) g_{ab} &= -\frac{\partial x^a}{\partial y^{\tilde{a}}} \frac{\partial x^b}{\partial y^{\tilde{b}}} \frac{\partial x^c}{\partial y^{\tilde{c}}} g_{ab,c} \end{aligned} \quad (3.138)$$

(skorzystaliliśmy tutaj z symetrii między wskaźnikami a i b).

Piszząc takie samo równanie jak powyżej dla innej kombinacji wskaźników \tilde{a} , \tilde{b} i \tilde{c} mamy:

$$\left(\frac{\partial x^a}{\partial y^{\tilde{c}}} \frac{\partial^2 x^b}{\partial y^{\tilde{a}} \partial y^{\tilde{b}}} + \frac{\partial x^a}{\partial y^{\tilde{b}}} \frac{\partial^2 x^b}{\partial y^{\tilde{a}} \partial y^{\tilde{c}}} \right) g_{ab} = - \frac{\partial x^a}{\partial y^{\tilde{c}}} \frac{\partial x^b}{\partial y^{\tilde{b}}} \frac{\partial x^c}{\partial y^{\tilde{a}}} g_{ab,c}, \quad (3.139)$$

$$\left(\frac{\partial x^a}{\partial y^{\tilde{a}}} \frac{\partial^2 x^b}{\partial y^{\tilde{b}} \partial y^{\tilde{c}}} + \frac{\partial x^a}{\partial y^{\tilde{c}}} \frac{\partial^2 x^b}{\partial y^{\tilde{b}} \partial y^{\tilde{a}}} \right) g_{ab} = - \frac{\partial x^a}{\partial y^{\tilde{a}}} \frac{\partial x^b}{\partial y^{\tilde{c}}} \frac{\partial x^c}{\partial y^{\tilde{b}}} g_{ab,c}. \quad (3.140)$$

Dodając i odejmując powyższe równania: (3.138) + (3.139) – (3.140), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial x^a}{\partial y^{\tilde{b}}} \frac{\partial^2 x^b}{\partial y^{\tilde{a}} \partial y^{\tilde{c}}} &= - \frac{\partial x^a}{\partial y^{\tilde{a}}} \frac{\partial x^b}{\partial y^{\tilde{b}}} \frac{\partial x^c}{\partial y^{\tilde{c}}} g_{ab,c} - \frac{\partial x^a}{\partial y^{\tilde{c}}} \frac{\partial x^b}{\partial y^{\tilde{b}}} \frac{\partial x^c}{\partial y^{\tilde{a}}} g_{ab,c} + \frac{\partial x^a}{\partial y^{\tilde{a}}} \frac{\partial x^b}{\partial y^{\tilde{c}}} \frac{\partial x^c}{\partial y^{\tilde{b}}} g_{ab,c} \\ &= - \frac{\partial x^a}{\partial y^{\tilde{a}}} \frac{\partial x^b}{\partial y^{\tilde{b}}} \frac{\partial x^c}{\partial y^{\tilde{c}}} (g_{ab,c} + g_{cb,a} - g_{ac,b}). \end{aligned} \quad (3.141)$$

Dodatkowo mamy własność wynikająca z następującego faktu:

$$0 \equiv \delta_{\tilde{b}, \tilde{c}}^{\tilde{a}} = \frac{\partial x^c}{\partial y^{\tilde{c}}} \frac{\partial}{\partial x^c} \left(\frac{\partial y^{\tilde{a}}}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial y^{\tilde{b}}} \delta_b^a \right),$$

stąd

$$\frac{\partial^2 x^d}{\partial y^{\tilde{c}} \partial y^{\tilde{b}}} = - \frac{\partial x^c}{\partial y^{\tilde{c}}} \frac{\partial x^a}{\partial y^{\tilde{b}}} \frac{\partial x^d}{\partial y^{\tilde{a}}} \frac{\partial^2 y^{\tilde{a}}}{\partial x^c \partial x^a} \quad (3.142)$$

i odwrotnie:

$$\frac{\partial^2 y^{\tilde{a}}}{\partial x^k \partial x^j} = - \frac{\partial y^{\tilde{c}}}{\partial x^k} \frac{\partial y^{\tilde{b}}}{\partial x^j} \frac{\partial y^{\tilde{a}}}{\partial x^b} \frac{\partial^2 x^b}{\partial y^{\tilde{c}} \partial y^{\tilde{b}}}. \quad (3.143)$$

Dowód stwierdzenia 1. W układzie współrzędnych (3.137) różniczka $\bar{\nabla} T^a_b$ przyjmuje następującą postać:

$$\partial_{\tilde{a}} \tilde{T}^{\tilde{a}}_{\tilde{b}}.$$

Naszym celem jest pokazanie, że $\partial_{\tilde{a}} \tilde{T}^{\tilde{a}}_{\tilde{b}}$ jest dobrze zdefiniowanym obiektem geometrycznym – a dokładnie gęstością kowektorową. Z własności transformacyjnych T^a_b mamy, że

$$\tilde{T}^{\tilde{a}}_{\tilde{b}} = \det \left(\frac{\partial x^d}{\partial y^{\tilde{d}}} \right) \frac{\partial y^{\tilde{a}}}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial y^{\tilde{b}}} T^a_b.$$

Sprawdźmy teraz, czy obiekt $\tilde{v}_{\tilde{b}} = \partial_{\tilde{a}} \tilde{T}^{\tilde{a}}_{\tilde{b}}$ transformuje się jak gęstość wektorowa

$$\begin{aligned} v_c &= \det \left(\frac{\partial y^{\tilde{d}}}{\partial x^d} \right) \frac{\partial y^{\tilde{b}}}{\partial x^c} \tilde{v}_{\tilde{b}} = \det \left(\frac{\partial y^{\tilde{d}}}{\partial x^d} \right) \frac{\partial y^{\tilde{b}}}{\partial x^c} \partial_{\tilde{a}} \left(\det \left(\frac{\partial x^d}{\partial y^{\tilde{d}}} \right) \frac{\partial y^{\tilde{a}}}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial y^{\tilde{b}}} T^a_b \right) \\ &= \frac{\partial y^{\tilde{b}}}{\partial x^c} \frac{\partial x^b}{\partial y^{\tilde{b}}} \frac{\partial y^{\tilde{a}}}{\partial x^a} \frac{\partial}{\partial y^{\tilde{a}}} T^a_b + \frac{\partial y^{\tilde{b}}}{\partial x^c} \frac{\partial y^{\tilde{a}}}{\partial x^a} \left(\frac{\partial}{\partial y^{\tilde{a}}} \frac{\partial x^b}{\partial y^{\tilde{b}}} \right) T^a_b + \\ &\quad + \frac{\partial y^{\tilde{b}}}{\partial x^c} \frac{\partial x^b}{\partial y^{\tilde{b}}} \left(\frac{\partial}{\partial y^{\tilde{a}}} \frac{\partial y^{\tilde{a}}}{\partial x^a} \right) T^a_b + \det \left(\frac{\partial y^{\tilde{c}}}{\partial x^c} \right) \partial_a \det \left(\frac{\partial x^d}{\partial y^{\tilde{d}}} \right) T^a_c. \end{aligned} \quad (3.144)$$

Pierwszy człon w powyższej formule jest następujący

$$\frac{\partial y^{\bar{b}}}{\partial x^c} \frac{\partial x^b}{\partial y^{\bar{b}}} \frac{\partial y^{\bar{a}}}{\partial x^a} \frac{\partial}{\partial y^{\bar{a}}} T^a_{\bar{b}} = \partial_a T^a_c .$$

Możemy także zapisać $T^a_{\bar{b}}$ pojawiające się w (3.144) jako $T^a_{\bar{b}} = T^{ac} g_{bc}$ (gdzie T^{ac} jest symetryczne). Korzystając z tożsamości (3.164) i (3.143) mamy, że

$$\begin{aligned} \frac{\partial y^{\bar{b}}}{\partial x^c} \frac{\partial y^{\bar{a}}}{\partial x^a} \left(\frac{\partial}{\partial y^{\bar{a}}} \frac{\partial x^b}{\partial y^{\bar{b}}} \right) T^a_{\bar{b}} &= \frac{\partial y^{\bar{b}}}{\partial x^c} \frac{\partial y^{\bar{a}}}{\partial x^a} \left(\frac{\partial}{\partial y^{\bar{a}}} \frac{\partial x^b}{\partial y^{\bar{b}}} \right) T^{ae} g_{eb} \\ &= -\frac{1}{2} T^{ab} (g_{ab,c} + g_{cb,a} - g_{ac,b}) = -\frac{1}{2} T^{ab} g_{ab,c} \end{aligned} \quad (3.145)$$

ze względu na symetrię T^{ab} . Biorąc pod uwagę równanie (3.143) widzimy, że trzeci człon w wyrażeniu (3.144) może być zapisany w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y^{\bar{b}}}{\partial x^c} \frac{\partial x^b}{\partial y^{\bar{b}}} \left(\frac{\partial}{\partial y^{\bar{a}}} \frac{\partial y^{\bar{a}}}{\partial x^a} \right) T^a_{\bar{b}} &= \delta^b_c \frac{\partial x^d}{\partial y^{\bar{a}}} \frac{\partial^2 y^{\bar{a}}}{\partial x^d \partial x^a} T^a_{\bar{b}} \\ &= -\delta^b_c \frac{\partial x^d}{\partial y^{\bar{a}}} \frac{\partial y^{\bar{c}}}{\partial x^d} \frac{\partial y^{\bar{b}}}{\partial x^a} \frac{\partial y^{\bar{a}}}{\partial x^k} \frac{\partial^2 x^h}{\partial y^{\bar{c}} \partial y^{\bar{b}}} T^a_{\bar{b}} = -\frac{\partial y^{\bar{c}}}{\partial x^d} \frac{\partial^2 x^d}{\partial y^{\bar{c}} \partial y^{\bar{b}}} \frac{\partial y^{\bar{b}}}{\partial x^a} T^a_{\bar{b}} \end{aligned} \quad (3.146)$$

Ten człon kasuje ostatnie wyrażenie występujące w (3.144):

$$\begin{aligned} \det \left(\frac{\partial y^{\bar{c}}}{\partial x^c} \right) \left[\partial_a \det \left(\frac{\partial x^d}{\partial y^{\bar{d}}} \right) \right] T^a_c &= \det \left(\frac{\partial y^{\bar{c}}}{\partial x^c} \right) \det \left(\frac{\partial x^d}{\partial y^{\bar{d}}} \right) \frac{\partial y^{\bar{b}}}{\partial x^b} \frac{\partial}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial y^{\bar{b}}} T^a_c \\ &= \frac{\partial y^{\bar{b}}}{\partial x^b} \frac{\partial y^{\bar{c}}}{\partial x^a} \frac{\partial}{\partial y^{\bar{c}}} \frac{\partial x^b}{\partial y^{\bar{b}}} T^a_c \end{aligned} \quad (3.147)$$

Wstawiając powyższe równania do (3.144) mamy ostatecznie

$$v_c = \partial_a T^a_c - \frac{1}{2} T^{ab} g_{ab,c} . \quad (3.148)$$

□

3.8 Dowód równań Gaussa-Codazziego

Udowodnimy równania Gaussa-Codazziego dla frontu świetlnego (3.64):

$$-\mathcal{G}^\perp_{\bar{b}} \equiv \bar{\nabla}_a Q^a_{\bar{b}}(X) + s v_X \partial_b \left(\frac{\partial_c \Lambda^c}{v_X} \right) . \quad (3.149)$$

Dowód. Przypatrzmy się pochodnej Liego koneksji Γ :

$$\mathcal{L}_W \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \nabla_\mu \nabla_\nu W^\lambda - W^\sigma R^\lambda{}_{\nu\mu\sigma} . \quad (3.150)$$

Dla pola wektorowego postaci $W = \partial_a$ (tzn. $W^\mu = \delta^\mu{}_a$) pochodna Liego redukuje się do pochodnej cząstkowej:

$$\mathcal{L}_W \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \partial_a \Gamma_{\mu\nu}^\lambda . \quad (3.151)$$

Biorąc odpowiedni ślad powyższego równania otrzymujemy

$$\begin{aligned} \pi^{\mu\nu} \partial_a A_{\mu\nu}^\alpha &= (\delta_\lambda^\alpha \pi^{\mu\nu} - \delta_\lambda^\mu \pi^{\alpha\nu}) (\nabla_\mu \nabla_\nu W^\lambda - W^\sigma R^\lambda{}_{\nu\mu\sigma}) \\ &= \frac{\sqrt{|g|}}{16\pi} (\nabla_\mu (\nabla^\mu W^\alpha - \nabla^\alpha W^\mu) + 2R^\alpha{}_\sigma W^\sigma) \\ &= \frac{1}{16\pi} \partial_\mu \left(\sqrt{|g|} (\nabla^\mu W^\alpha - \nabla^\alpha W^\mu) \right) + 2 \frac{\sqrt{|g|}}{16\pi} R^\alpha{}_\sigma W^\sigma . \end{aligned} \quad (3.152)$$

Weźmy $\alpha = 3$. Mamy wtedy:

$$\begin{aligned} 16\pi \pi^{\mu\nu} \partial_a A_{\mu\nu}^3 &= \partial_\mu \left(\sqrt{|g|} (\nabla^\mu W^3 - \nabla^3 W^\mu) \right) + 2\mathcal{R}^3{}_a \\ &= \partial_b \left(\sqrt{|g|} (\nabla^b W^3 - \nabla^3 W^b) \right) + 2\mathcal{R}^3{}_a . \end{aligned} \quad (3.153)$$

gdzie $\mathcal{R}^3{}_a$ jest gęstością tensora Ricciego: $\mathcal{R}^3{}_a := \sqrt{|g|} R^3{}_a$. Ale z drugiej strony mamy:

$$\nabla_\mu W^\nu = \Gamma_{a\mu}^\nu .$$

Stąd wynika

$$\begin{aligned} \nabla^b W^3 - \nabla^3 W^b &= \frac{1}{2} (g^{b\lambda} g^{3\mu} - g^{3\lambda} g^{b\mu}) (g_{\mu\lambda,a} + g_{\mu a,\lambda} - g_{\lambda a,\mu}) \\ &= g^{b\lambda} g^{3\mu} (g_{\mu a,\lambda} - g_{\lambda a,\mu}) = 2g^{b\lambda} \Gamma_{\lambda a}^3 - g^{b\lambda} g^{3\mu} g_{\mu\lambda,a} \\ &= 2g^{b\lambda} A_{\lambda a}^3 + g^{b3} \Gamma_{a\mu}^\mu + g^{b3}{}_{,a} , \end{aligned}$$

oraz

$$\frac{\sqrt{|g|}}{16\pi} (\nabla^b W^3 - \nabla^3 W^b) = 2\pi^{b\lambda} A_{\lambda a}^3 + \pi^{3b}{}_{,a} . \quad (3.154)$$

Podstawiając to do (3.153) otrzymujemy:

$$\mathcal{R}^3{}_a + \partial_b \left(\pi^{b\lambda} A_{\lambda a}^3 - \frac{1}{2} \delta_a^b (\pi^{\mu\nu} A_{\mu\nu}^3 - \pi^{3c}{}_{,c}) \right) = -\frac{1}{2} \pi^{\mu\nu}{}_{,a} A_{\mu\nu}^3 . \quad (3.155)$$

Policzmy prawą stronę powyższego równania:

$$\begin{aligned} -\pi^{\mu\nu}{}_{,a} A_{\mu\nu}^3 &= -\frac{1}{16\pi} \left(g^{\mu\nu} \partial_a \sqrt{|g|} + \sqrt{|g|} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g_{\alpha\beta,a} \right) A_{\mu\nu}^3 \\ &= \left(-\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \pi^{\mu\nu} + g^{\alpha\mu} \pi^{\beta\nu} \right) A_{\mu\nu}^3 g_{\alpha\beta,a} = \tilde{Q}^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta,a} , \end{aligned} \quad (3.156)$$

przy czym skorzystaliśmy z definicji (3.75), tzn.

$$\tilde{Q}^\mu_\nu := \sqrt{|g|} \left(g^{\mu\alpha} A^3_{\alpha\nu} - \frac{1}{2} \delta^\mu_\nu g^{\alpha\beta} A^3_{\alpha\beta} \right) = 16\pi \left(\pi^{\mu\alpha} A^3_{\alpha\nu} - \frac{1}{2} \delta^\mu_\nu \pi^{\alpha\beta} A^3_{\alpha\beta} \right). \quad (3.157)$$

Otrzymujemy więc następującą tożsamość

$$\mathcal{G}^3_a + \partial_b \left\{ \tilde{Q}^b_a + \frac{1}{2} \delta^b_a \pi^{3c}_{,c} \right\} - \frac{1}{2} \tilde{Q}^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta,a} \equiv 0. \quad (3.158)$$

Aby obliczyć ostatni człon (3.158) skorzystamy ze wzoru (3.129):

$$\begin{aligned} s\tilde{Q}^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta,a} &= \left[\lambda(g^{be} g^{cd} l_{ed} - \frac{1}{2} l g^{bc}) + (\Lambda^b g^{cd} + \Lambda^c g^{bd} - \Lambda^d g^{cb}) A^3_{3d} \right] g_{bc,a} \\ &\quad + 2s\tilde{Q}^3_3 \left(\partial_a \log M + \frac{s}{M} m_B n^B_{,a} \right). \end{aligned} \quad (3.159)$$

Korzystając z postaci $A^3_{3d} = w_d + \chi_d + \frac{s}{M} m^b l_{bd}$ (3.120) i $\tilde{Q}^3_3 = -\frac{1}{2} \lambda l$ oraz z postaci obiektu Q^{ab} (3.128):

$$sQ^{ab} = \lambda \tilde{g}^{ac} \tilde{g}^{bd} l_{cd} + (\Lambda^a \tilde{g}^{bc} + \Lambda^b \tilde{g}^{ac} - \tilde{g}^{ab} \Lambda^c) w_c.$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}^{\mu\nu} g_{\mu\nu,a} &= Q^{bc} g_{bc,a} - \frac{1}{2} s \lambda \tilde{g}^{bc} g_{bc,a} - \lambda l \partial_a \log M \\ &\quad + s \chi_d (\Lambda^c \tilde{g}^{bd} + \Lambda^b \tilde{g}^{cd} - \Lambda^d \tilde{g}^{bc}) \delta g_{bc,a}. \end{aligned}$$

Wstawiając powyższą zależność do równania (3.158) oraz korzystając ze wzoru (3.126):

$$s\tilde{Q}^a_b = sQ^a_b - \frac{1}{2} \lambda \delta^a_b + \Lambda^a \chi_b - \delta^a_b \Lambda^c \chi_c,$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned} s\mathcal{G}^3_a &= -s\partial_b \left\{ \tilde{Q}^b_a + \frac{1}{2} \delta^b_a \pi^{3c}_{,c} \right\} + s\frac{1}{2} \tilde{Q}^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta,a} \\ &= \partial_b \left\{ -sQ^b_a + \delta^b_a \lambda l - \Lambda^a \chi_b + \delta^a_b \Lambda^c \chi_c \right\} + s\frac{1}{2} Q^{bc} g_{bc,a} - \frac{1}{4} \lambda \tilde{g}^{bc} g_{bc,a} \\ &\quad - s\frac{1}{2} \lambda l \partial_a \log M + \frac{1}{2} \chi_d (\Lambda^c \tilde{g}^{bd} + \Lambda^b \tilde{g}^{cd} - \Lambda^d \tilde{g}^{bc}) \delta g_{bc,a} \\ &= -s\partial_b Q^b_a + \frac{1}{2} s Q^{bc} g_{bc,a} + \lambda \partial_a l. \end{aligned} \quad (3.160)$$

Wybierając pole X tak, że $X(x^0) = 1$ mamy, że $v_X = \lambda$. Korzystając z tego, że $\partial_c \Lambda^c = -\lambda l$ (3.117) otrzymujemy:

$$v_X \partial_b \left(\frac{\partial_c \Lambda^c}{v_X} \right) = -\lambda \partial_b \left(\frac{\lambda l}{\lambda} \right),$$

a równanie (3.160) przybiera następującą postać:

$$s\mathcal{G}^3_a = -\bar{\nabla}_a Q^a_b(X) - s v_X \partial_b \left(\frac{\partial_c \Lambda^c}{v_X} \right), \quad (3.161)$$

co kończy dowód (3.64). \square

3.9 Alternatywny dowód równań Gaussa-Codazziego

Udowodnimy teraz równania Gaussa-Codazziego zapisane za pomocą trochę inaczej zorganizowanych obiektów. Podobnie jak dla niezdegenerowanych hiperpowierzchni S , z równań Einsteina wynikają równania więzów, które muszą być spełnione przez obiekty opisujące krzywiznę zewnętrzną hiperpowierzchni. W przypadku niezdegenerowanym mamy cztery takie więzy odpowiadające następującym składowym $G^3_a = g^{3\nu}G_{\nu a}$ oraz $G^{33} = g^{3\mu}g^{3\nu}G_{\mu\nu}$ równań Einsteina. W przypadku zerowym mamy do czynienia tylko z trzema niezależnymi równaniami. Korzystając z (3.13), widzimy, że $G^3_a = g^{3\nu}G_{\nu a}$ jest proporcjonalne do $X^b G_{ba}$, a wyrażenie $G^{33} = g^{3\mu}g^{3\nu}G_{\mu\nu}$ jest proporcjonalne do $X^a X^b G_{ab}$, a więc jest równe kombinacji liniowej pierwszej z powyższych wielkości. To odpowiada temu, że wektor prostopadły do S jest także do niej styczny. Zatem równania Gaussa-Codazziego są równoważne poniższym trzem równaniom

$$G_{ab}X^a X^b = 8\pi T_{ab}X^a X^b, \quad (3.162)$$

$$G_{aB}X^a = 8\pi T_{aB}X^a. \quad (3.163)$$

Wyrazimy teraz lewe strony powyższych równań za pomocą obiektów w_a i l_{ab} . Ponieważ $g_{ab}X^a = 0$, zwężenia lewych stron tych równań redukują się do zwężeń z tensorem Ricciego:

$$g^{\kappa\lambda}R_{\kappa a\lambda b}X^a = R_{ab}X^a = G_{ab}X^a = 8\pi T_{ab}X^a.$$

Dla dowolnej wielkości tensorowej $A_{\mu\nu}$, wzory (3.9) i (3.10) dają następującą dekompozycję

$$g^{\mu\nu}A_{\mu\nu} = \tilde{g}^{AB}A_{AB} + X^c A_c^0 + X^c A^0_c + \frac{1}{N^2}X^c X^d A_{cd}. \quad (3.164)$$

Stąd

$$g^{\kappa\lambda}R_{\kappa a\lambda b} = \tilde{g}^{AB}R_{AaBb} + X^c R^0_{acb} + X^c R_{ca}^0_b + \frac{1}{N^2}X^c X^d R_{cadb}. \quad (3.165)$$

Korzystając z symetrii tensora Riemanna mamy:

$$R_{ab}X^a = \tilde{g}^{AB}R_{AaBb}X^a + X^c R^0_{acb}X^a. \quad (3.166)$$

Z dalszego zwężenia (3.166) z X otrzymujemy więzy skalarne (3.162):

$$R_{ab}X^a X^b = \tilde{g}^{AB}R_{AaBb}X^a X^b, \quad (3.167)$$

którego dalszym przekształcaniem się teraz zajmiemy, tzn. wyrazimy lewą stronę równania (3.162) za pomocą obiektów w_a , l_{ab} oraz ich pochodnych.

Tensor krzywizny może być z definicji zapisany następująco:

$$R_{AaBb} = \frac{1}{2}(g_{bA,aB} + g_{aB,bA} - g_{AB,ab} - g_{ab,AB}) + g_{\mu\nu}(\Gamma_{aB}^\mu \Gamma_{Ab}^\nu - \Gamma_{ab}^\mu \Gamma_{AB}^\nu), \quad (3.168)$$

zatem mamy następującą zależność:

$$R_{ab}X^aX^b = \frac{1}{2}\tilde{g}^{AB}\{(g_{bA,aB} + g_{aB,bA} - g_{AB,ab} - g_{ab,AB}) + g_{\mu\nu}(\Gamma_{aB}^\mu\Gamma_{Ab}^\nu - \Gamma_{ab}^\mu\Gamma_{AB}^\nu)\}X^aX^b. \quad (3.169)$$

Udowodnimy teraz, że zachodzą następujące dwie zależności:

$$g_{\mu\nu}\Gamma_{aB}^\mu\Gamma_{Ab}^\nu X^aX^b = \tilde{g}^{ED}\Gamma_{EAb}X^b\Gamma_{DBa}X^a, \quad (3.170)$$

$$g_{\mu\nu}\Gamma_{ab}^\mu\Gamma_{AB}^\nu X^aX^b = \tilde{g}^{ED}\Gamma_{DAB}\Gamma_{Eab}X^aX^b - w_aX^a l_{AB}. \quad (3.171)$$

Dowód wzoru (3.170): Zauważmy najpierw, że

$$g_{\mu\nu}\Gamma_{aB}^\mu\Gamma_{Ab}^\nu X^aX^b = g_{ij}\Gamma_{aB}^i\Gamma_{Ab}^j X^aX^b, \quad (3.172)$$

ponieważ $g_{33} = 0$, a $g_{30}\Gamma_{aB}^3 X^a = g_{30}l_{aB}X^a \equiv 0$, przy czym skorzystaliśmy z tego, że możemy zapisać l_{ab} w następującej postaci: $l_{ab} = M\Gamma_{ab}^3$. Rozwijając dalej prawą stronę powyższego równania mamy:

$$g_{ij}\Gamma_{aB}^i\Gamma_{Ab}^j X^aX^b = \Gamma_{0aB}\Gamma_{Ad}^0 X^aX^b + \Gamma_{DaB}\Gamma_{Ad}^D X^aX^b - \Gamma_{0aB}X^a w_A + \Gamma_{DaB}X^a\Gamma_{Ad}^D X^b,$$

gdzie skorzystaliśmy ze wzoru $w_a = -\Gamma_{ab}^0 X^b$. Korzystając z następujących zależności:

$$l_{ab} = M g^{3\mu}\Gamma_{\mu ab} = \Gamma_{0ab} - n^A\Gamma_{Aab} = X^i\Gamma_{iab}, \quad (3.173)$$

otrzymujemy dalej, że:

$$\Gamma_{Ad}^D = \tilde{g}^{DB}\Gamma_{BA d} + g^{0A}X^i\Gamma_{iAd} - n^D(\Gamma_{Ad}^0 + \frac{1}{N^2}X^i\Gamma_{iAd}) = \tilde{g}^{DB}\Gamma_{BA d} - \frac{m^D}{M}l_{Ad} - n^D\Gamma_{Ad}^0.$$

Zwężając powyższe równanie z X^d , i pamiętając o tym, że $l_{Ad}X^d = 0$, otrzymujemy:

$$\Gamma_{Ad}^D X^d = \tilde{g}^{DB}\Gamma_{BA d} X^d + n^D w_A. \quad (3.174)$$

Korzystając z powyższych wyników mamy, że

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}\Gamma_{aB}^\mu\Gamma_{Ab}^\nu X^aX^b &= -\Gamma_{0aB}X^a w_A + \Gamma_{DaB}X^a(\tilde{g}^{ED}\Gamma_{EAd}X^d + n^D w_A) \\ &= (\tilde{g}^{ED}\Gamma_{EAd}\Gamma_{DBa}\Gamma_{daB}w_A)X^d X^a = \tilde{g}^{ED}\Gamma_{EAd}\Gamma_{DBa}X^d X^a. \end{aligned}$$

co kończy dowód (3.170). □

Dowód wzoru (3.171): Rozwijając lewą stronę (3.171) mamy:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ab}^\mu X^a X^d \Gamma_{\nu AB}^\nu &= \Gamma_{ad}^3 X^a X^d \Gamma_{3AB} + \Gamma_{ad}^0 X^a X^d \Gamma_{0AB} + \Gamma_{ad}^D X^a X^d \Gamma_{DAB} \\ &= -w_a X^a \Gamma_{0AB} + (\tilde{g}^{DE}\Gamma_{Ead}X^a X^d + n^D w_a X^a)\Gamma_{DAB}. \end{aligned}$$

Zwężenie $\Gamma_{ad}^3 X^a X^d$ jest równe zeru:

$$\Gamma_{ad}^3 X^a X^d = g^{3\mu} \Gamma_{\mu ad} X^a X^d = \frac{1}{M} X^i \Gamma_{iad} X^a X^d = 0 .$$

Poza tym mamy:

$$\Gamma_{ad}^D = \tilde{g}^{DE} \Gamma_{Ead} - \frac{m^D}{M} X^i \Gamma_{iad} - n^D \Gamma_{ad}^0 = \tilde{g}^{DE} \Gamma_{Ead} - \frac{m^D}{M} l_{ad} - n^D \Gamma_{ad}^0 .$$

Zwężając powyższe równanie z $X^a X^b$ otrzymujemy:

$$\Gamma_{ad}^D X^a X^b = \tilde{g}^{DE} \Gamma_{Ead} X^a X^b + n^D w_a X^a ,$$

i ostatecznie mamy:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} \Gamma_{ab}^\mu \Gamma_{AB}^\nu X^a X^b &= \tilde{g}^{DE} \Gamma_{DAB} \Gamma_{Ead} X^a X^b - w_a X^a X^i \Gamma_{iAB} \\ &= \tilde{g}^{DE} \Gamma_{DAB} \Gamma_{Ead} X^a X^b - w_a X^a l_{AB} . \end{aligned}$$

□

Zbierając razem wzory (3.170) i (3.171) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} (\Gamma_{aB}^\mu \Gamma_{Ab}^\nu - \Gamma_{ab}^\mu \Gamma_{AB}^\nu) X^a X^b \\ = \tilde{g}^{ED} (\Gamma_{EAb} \Gamma_{DBa} - \Gamma_{DAB} \Gamma_{Eab}) X^a X^b + w_a X^a l_{AB} , \end{aligned} \quad (3.175)$$

co po wstawieniu do (3.169) daje nam:

$$\begin{aligned} R_{ab} X^a X^b &= \frac{1}{2} \tilde{g}^{AB} ((g_{bA,aB} + g_{aB,bA} - g_{AB,ab} - g_{ab,AB}) X^a X^b \\ &\quad + \tilde{g}^{ED} (\Gamma_{EAb} \Gamma_{DBa} - \Gamma_{DAB} \Gamma_{Eab}) X^a X^b + w_a X^a l_{AB}) . \end{aligned} \quad (3.176)$$

Możemy teraz udowodnić następującą tożsamość na S :

$$\begin{aligned} \tilde{g}^{AB} \left(\frac{1}{2} (g_{bA,aB} + g_{aB,bA} - g_{AB,ab} - g_{ab,AB}) + \tilde{g}^{ED} (\Gamma_{EAb} \Gamma_{DBa} - \Gamma_{DAB} \Gamma_{Eab}) \right) X^a X^b \\ = X^a l_{,a} - \tilde{g}^{ED} l_{EA} l_{DB} \tilde{g}^{AB} . \end{aligned} \quad (3.177)$$

Dowód (3.177). Korzystając z tego, że $\Gamma_{abi} X^i = -l_{ab} - X^i{}_{,b} g_{ia}$ (dowód przez przeliczenie) mamy:

$$\begin{aligned} X^d \Gamma_{EAd} &= \Gamma_{EA0} + X^B \Gamma_{EAB} = n_{E||A} - l_{EA} - n^B \Gamma_{EAB} , \\ X^a X^d \Gamma_{Ead} &= X^a (-X^i{}_{,a} g_{iE} - l_{Ea}) = g_{EB} X^A n^B{}_{,a} , \end{aligned}$$

gdzie $\|$ oznacza dwuwymiarową różniczkę kowariantną. Z powyższych równań wynika, że:

$$\begin{aligned} \tilde{g}^{ED} (\Gamma_{EAb} \Gamma_{DBa} - \Gamma_{DAB} \Gamma_{Eab}) \\ = \tilde{g}^{ED} (n_{E||A} - l_{EA} - n^G \Gamma_{EAG}) (n_{D||B} - l_{DB} - n^F \Gamma_{DBF}) - \Gamma_{EAB} X^a n^E{}_{,a} . \end{aligned} \quad (3.178)$$

Korzystając z tego, że $\frac{1}{2}\dot{g}_{ab} = n_{(A||B)} - l_{AB}$ (co wynika z 3.40), mamy:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(g_{bA,aB} + g_{aB,bA} - g_{AB,ab} - g_{ab,AB})X^aX^d &= \frac{1}{2}(\dot{n}_{A,B} + \dot{n}_{B,A} + \ddot{g}_{AB} - (n^D n_D)_{,AB}) \\ &+ \overset{(2)}{R_{AEBF}}n^E n^F - \tilde{g}^{ED}n^G n^F \Gamma_{EAF} \Gamma_{DBG} + \tilde{g}^{ED}n^G n^F \Gamma_{DAB} \Gamma_{EGF} \\ &- \frac{1}{2}n^F(n_{A,FB} + \dot{g}_{FA,B} + n_{B,FA} + \dot{g}_{FB,A} - \dot{g}_{AB,F} - 2n_{F,AB}) . \end{aligned} \quad (3.179)$$

Zbierając wszystko razem i dokonując jeszcze paru żmudnych obliczeń dostajemy ostatecznie

$$\begin{aligned} \tilde{g}^{AB} \left(\frac{1}{2}(g_{bA,aB} + g_{aB,bA} - g_{AB,ab} - g_{ab,AB}) + \tilde{g}^{ED}(\Gamma_{EAb} \Gamma_{DBa} - \Gamma_{DAB} \Gamma_{Eab}) \right) X^a X^b \\ = X^a l_{,a} - \tilde{g}^{ED} l_{EA} l_{DB} \tilde{g}^{AB} . \end{aligned} \quad (3.180)$$

□

Wstawiając (3.177) do (3.176) otrzymujemy:

$$\tilde{g}^{AB} R_{AaBd} X^a X^d = w_a X^a \cdot l + X^a l_{,a} - \tilde{g}^{ED} \tilde{g}^{AB} l_{EA} l_{DB} . \quad (3.181)$$

Podstawiając powyższe do (3.162), otrzymujemy następujące równanie więzów:

$$\dot{l} - n^A \partial_A l + (w_a X^a) l - \frac{1}{2} l^2 - \bar{l}^{AB} \bar{l}_{AB} = 8\pi T_{ab} X^a X^b , \quad (3.182)$$

przy czym dokonaliśmy dekompozycji l_{AB} na ślad l oraz część bezśladową \bar{l}_{AB} :

$$\bar{l}_{AB} := l_{AB} - \frac{1}{2} g_{AB} l . \quad (3.183)$$

W podobny sposób jak powyżej przekształcimy lewą stronę równania (3.163). W tym celu jeszcze raz jeszcze skorzystamy z (3.166):

$$R^\lambda_{a\lambda B} X^a = \tilde{g}^{AC} R_{CaAB} X^a + R^0_{acB} X^c X^a . \quad (3.184)$$

Biorąc pod uwagę rozpisanie tensora krzywizny (3.168), mamy

$$\begin{aligned} R_{AaBD} X^a &= \frac{1}{2}(g_{AD,Ba} - g_{AB,Da} + g_{aB,Da} - g_{aD,AB}) X^a \\ &+ \tilde{g}^{EF}(\Gamma_{FBa} \Gamma_{EAD} - \Gamma_{FDa} \Gamma_{EAB}) X^a + w_D l_{AB} - w_B l_{AD} . \end{aligned} \quad (3.185)$$

Analogicznie jak w (3.177), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(g_{AD,Ba} - g_{AB,Da} + g_{aB,Da} - g_{aD,AB}) X^a \\ + \tilde{g}^{EF} X^a (\Gamma_{FBa} \Gamma_{EAD} - \Gamma_{FDa} \Gamma_{EAB}) = l_{AB||D} - l_{AD||B} . \end{aligned} \quad (3.186)$$

Stąd wynika

$$R_{AaBD}X^a = l_{AB\|D} - l_{AD\|B} + w_D l_{AB} - w_B l_{AD} . \quad (3.187)$$

Podobnie, drugi człon w wyrażeniu (3.184) może być zapisany w następującej postaci:

$$\begin{aligned} R^0_{abD}X^aX^b &= (\Gamma^0_{aD,b} - \Gamma^0_{ab,D} + \Gamma^0_{\mu b}\Gamma^{\mu}_{aD} - \Gamma^0_{\mu D}\Gamma^{\mu}_{ab})X^aX^b \\ &= (w_{a,D} - w_{D,a})X^a + w_A\tilde{g}^{AB}l_{BD} . \end{aligned} \quad (3.188)$$

Podstawiając powyższe wyrażenie do (3.163), otrzymujemy równanie

$$\dot{w}_B - w_{B\|A}n^A - w_A n^A_{\|B} - (w_a X^a)_{\|B} - w_B l + \bar{l}^A_{B\|A} - \frac{1}{2}l_{\|B} = -8\pi T_{aB}X^a . \quad (3.189)$$

W przypadku próżniowym prawe strony równań (3.182) oraz (3.189) znikają tożsamościowo i mamy następujące równania więzów:

$$\dot{l} - n^A \partial_{Al} + (w_a X^a)l - \frac{1}{2}l^2 - \bar{l}^{AB}\bar{l}_{AB} = 0 , \quad (3.190)$$

$$\dot{w}_B - w_{B\|A}n^A - w_A n^A_{\|B} - (w_a X^a)_{\|B} - w_B l + \bar{l}^A_{B\|A} - \frac{1}{2}l_{\|B} = 0 . \quad (3.191)$$

3.10 Izolowane horyzonty

Nieekspandujący horyzont w pustej czasoprzestrzeni Einsteina M , to zerowa hiperpowierzchnia S , dla której znika dywergencja gęstości Λ :

$$\partial_a \Lambda^a \equiv 0 , \quad (3.192)$$

co jest równoważne temu, że $l \equiv 0$. Z wyprowadzonego w poprzednim rozdziale równania więzów (3.182) wynika, że w próżni (tzn. gdy $T_{ab} = 0$) znika również wyrażenie $\bar{l}^{AB}\bar{l}_{AB}$, a zatem zachodzi także $l_{AB} = 0$. Stąd mamy, że $l_{ab} \equiv 0$, czyli inaczej

$$\mathcal{L}_X g_{ab} \equiv 0 . \quad (3.193)$$

Zatem geometria S jest statyczna, niezmienna w czasie wzdłuż pola X . A dokładniej S jest wiązką afiniczną $\pi : S \rightarrow B$ nad rozmaitością bazową B . Zazwyczaj zakładamy, że topologia B jest izomorficzna ze sferą S^2 . Włókna S są liniami całkowymi pola X a ich struktura afiniczna wynika z faktu, że linie te są zerowymi geodezyjnymi na M . Rozmaitość bazowa jest wyposażona w tensor metryczny γ_{AB} , a zdegenerowana metryka g_{ab} na rozmaitości wiązki jest cofnięciem γ_{AB} z B do S :

$$g = \pi^* \gamma .$$

Z kolei prawo transformacyjne (3.42) dla w_a redukuje się w przypadku izolowanego horyzontu do transformacji cechowania:

$$\tilde{w}_a = w_a + \partial_a \varphi . \quad (3.194)$$

Gęstość wektorowa Λ (o znikającej dywergencji) oraz pole cechowania w są obiektami wzajemnie sprzężonymi, opisującymi dane brzegowe dla pola grawitacyjnego na S . Oba te obiekty mają dwa stopnie swobody. Są to stopnie swobody czarnej dziury (albo białej – w zależności od znaku s), oddziałującej z zewnętrznym polem grawitacyjnym. Przyjrzymy się bliżej tej analogii w rozdziale 4.5 niniejszej rozprawy.

Rozdział 4

Ewolucja pola grawitacyjnego w obszarze ograniczonym frontem świetlnym. Termodynamika czarnych dziur

Ewolucja pola grawitacyjnego w skończonym obszarze przestrzeni, tzn. w rurze o brzegu typu czasowego, została opisana jako układ hamiltonowski przez J. Kijowskiego w pracach [18]. W pracy [19] wyniki te zostały uogólnione na szeroką klasę pól materii oddziałujących z grawitacją, rezultaty zawarte w rozdziale 2.2 niniejszej pracy są ich dalszym uogólnieniem, na przypadek osobliwej materii tworzącej masywną, dwuwymiarową powłokę. By móc traktować pole grawitacyjne w skończonej objętości jako hamiltonowski układ zamknięty, trzeba było nałożyć odpowiednie warunki brzegowe na brzegu rury. W pracach [18, 19] pokazano, że dokonując przejścia z obszarem całkowania do nieskończoności otrzymuje się standardowe wyniki ADM z „masą ADM” odgrywającą rolę całkowitego hamiltonianu (energii) pełnego układu „materia + grawitacja”. Powtórzmy te rozważania dla pola grawitacyjnego zawartego w skończonej tubie świata, której brzeg jest powierzchnią zerową. Ostatnio przypadek ten był intensywnie używany w monografii [6] do opisu własności pól w „reżymie promieniowania”, tzn. w nieskończoności zerowej. Nieskończoność zerowa jest również „frontem świetlnym”, zatem był to zasadniczo ten sam przypadek, który zamierzamy opisać w niniejszym rozdziale, jednak asymptotyczne przejście graniczne znacznie upraszcza analizę, bowiem wiele elementów opisu zeruje się w nieskończoności. Obecnie podamy pełny opis hamiltonowski pola wewnątrz (lub na zewnątrz) dowolnego frontu świetlnego. W szczególnym przypadku, gdy ten front świetlny jest horyzontem zdarzeń, otrzymane wyniki natychmiast implikują – jak to pokażemy w rozdziale (4.5) – tzw. *termodynamikę czarnych dziur*.

Na pierwszy rzut oka opis Kijowskiego [19] załamuje się w przypadku brzegu o zdegenerowanej metryce, bowiem większość obiektów używanych do rozwiązania zagadnienia, jak np. krzywizna zewnętrzna oraz kąt między powierzchnią S a brzegiem, staje się zdegenerowana. Te problemy techniczne zostaną ominięte dzięki wprowadzeniu do opisu pola

grawitacyjnego nowych obiektów, dobrze określonych na powierzchni zerowej. W jednym z podrozdziałów zostanie także pokazane, że wyprowadzona przez J. Kijowskiego formuła generująca dla pola grawitacyjnego o danych brzegowych na powierzchni S typu czasowego ma dobrą granicę, gdy S dąży do powierzchni zerowej („kładzie się” na froncie świetlnym). Otrzymany w ten sposób wynik zgadza się z formułą, którą wyprowadzimy niezależnie w podrozdziałach 4.1 i 4.2. Świadczy to o konsystencji naszego podejścia.

Dynamika pola grawitacyjnego jest wyprowadzona z zasady najmniejszego działania $\delta\mathcal{A} = 0$, gdzie działanie pola grawitacyjnego jest zdefiniowane jako całka z lagranżjanu Hilberta:

$$L = \frac{1}{16\pi} \sqrt{|g|} R . \quad (4.1)$$

Metoda zaproponowana przez J. Kijowskiego w jego artykułach [18, 19] prowadzi do zapisania równań pola grawitacyjnego w następującej postaci:

$$\delta L = \partial_\kappa \left(\pi^{\mu\nu} \delta A_{\mu\nu}^\kappa \right) , \quad (4.2)$$

gdzie, jak poprzednio:

$$\begin{aligned} \pi^{\mu\nu} &:= \frac{1}{16\pi} \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} , \\ A_{\mu\nu}^\lambda &:= \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \delta_{(\mu}^\lambda \Gamma_{\nu)\kappa}^\kappa . \end{aligned}$$

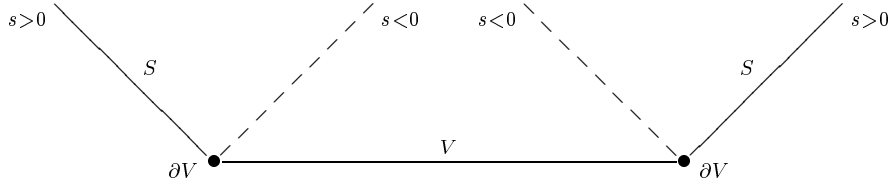
Gdy tylko wybierzemy jakąś (3+1)-dekompozycję czasoprzestrzeni M , nasza teoria pola stanie się układem hamiltonowskim, z przestrzenią danych Cauchy’ego na każdej z trójwymiarowych powierzchni odgrywającą rolę przestrzeni fazowej. Wybierzmy układ współrzędnych zgodny z tą (3+1)-dekompozycją. To znaczy, że współrzędna czasowa $t = x^0$ jest stała na trójwymiarowych powierzchniach tej foliacji. Zakładamy, że te powierzchnie są przestrzennopodobne. Aby otrzymać sformułowanie hamiltonowskie naszej teorii musimy scałkować równanie (4.2) po powierzchni Cauchy’ego $\mathcal{C}_t \subset M$ i potem dokonać transformacji Legendre’a między pochodnymi czasowymi a odpowiadającymi im pędami.

W naszych rozważaniach ograniczymy się do przypadku czasoprzestrzeni asymptotycznie płaskiej i założymy, że także płaty \mathcal{C} naszej (3+1)-dekompozycji są asymptotycznie płaskie w nieskończoności. Aby mieć kontrolę nad dwuwymiarowymi całkami powierzchniowymi w nieskończoności, rozważmy najpierw dynamikę naszego układu w skończonym obszarze. Rozpatrzmy dwa przypadki, pierwszy, gdy tym obszarem jest wnętrze tuby świata \mathcal{T} , której brzeg ma zdegenerowaną metrykę o sygnaturze $(0, +, +)$; i drugi, gdy badamy dynamikę pola grawitacyjnego w skończonym „pierścieniu”, którego wewnętrznym brzegiem jest wspomniany brzeg tuby świata ∂V^- , a zewnętrznym jakaś powierzchnia typu czasowego ∂V^+ .

Tym co odróżnia nasze obecne rozważania od tych zawartych w rozdziale 2 jest niemożność korzystania z metryki odwrotnej (2.30), bowiem nie istnieje ona w przypadku powierzchni frontu świetlnego. Tak więc – w porównaniu do techniki użytej w [19] – będziemy musieli wprowadzić do opisu zupełnie nowe obiekty, charakterystyczne dla powierzchni zerowej.

4.1 Dynamika pola grawitacyjnego wewnątrz powierzchni zerowej

W tym rozdziale rozpatrzmy obszar *wewnątrz* powierzchni zerowej:



Całkując (4.2) po objętości V otrzymujemy:

$$\delta \int_V L = \int_V \partial_\kappa (\pi^{\mu\nu} \delta A_{\mu\nu}^\kappa) = \int_V (\pi^{\mu\nu} \delta A_{\mu\nu}^0)' + \int_{\partial V} \pi^{\mu\nu} \delta A_{\mu\nu}^\perp, \quad (4.3)$$

gdzie „kropka” oznacza pochodną czasową. W powyższym wzorze pominęliśmy dwuwymiarowe dywergencje znikające po wycalkowaniu po powierzchniach ∂V oraz $V \cap S$.

Aby dokonać transformacji Legendre’a w grawitacyjnych stopniach swobody zastosujemy metodę opisaną w rozdziale 2. Zauważmy najpierw, że z metryczności koneksji Γ wynika, że grawitacyjny odpowiednik $\pi^{\mu\nu} \delta A_{\mu\nu}^0$ kanonicznej jednoformy $p_K \delta z^K$ redukuje się następująco:

$$\pi^{\mu\nu} \delta A_{\mu\nu}^0 = -\frac{1}{16\pi} g_{kl} \delta P^{kl} + \partial_k \left(\pi^{00} \delta \left(\frac{\pi^{0k}}{\pi^{00}} \right) \right), \quad (4.4)$$

gdzie P^{kl} oznacza zewnętrzną krzywiznę powierzchni \mathcal{C} zapisaną w postaci ADM. Wzór ten stosowaliśmy już w rozdziale 2, a jego dowód znajduje się w paragrafie 2.3.

Analogicznie, człon brzegowy $\pi^{\mu\nu} \delta A_{\mu\nu}^\perp = \pi^{\mu\nu} \delta A_{\mu\nu}^3$ redukuje się następująco:

$$\pi^{\mu\nu} \delta A_{\mu\nu}^3 = -\frac{1}{16\pi} g_{\mu\nu} \delta \tilde{Q}^{\mu\nu}. \quad (4.5)$$

Dotychczas nie używaliśmy tej formuły, jej prosty, algebraiczny dowód, wynika bezpośrednio z przeliczenia wariacji obiektu $\tilde{Q}^{\mu\nu}$ danego wzorami (2.20) lub (3.75).

Korzystając z tych wzorów i pomijając dwuwymiarowe dywergencje znikające po wycalkowaniu, możemy przepisać prawą stronę (4.3) w następujący sposób:

$$\int_V (\pi^{\mu\nu} \delta A_{\mu\nu}^0)' + \int_{\partial V} \pi^{\mu\nu} \delta A_{\mu\nu}^\perp \quad (4.6)$$

$$= -\frac{1}{16\pi} \int_V (g_{kl} \delta P^{kl})' + \int_{\partial V} \left(\pi^{00} \delta \left(\frac{\pi^{03}}{\pi^{00}} \right) \right)' - \frac{1}{16\pi} \int_{\partial V} g_{\mu\nu} \delta \tilde{Q}^{\mu\nu}. \quad (4.7)$$

Dokonyamy teraz transformacji Legendre’a zarówno w objętości

$$(g_{kl} \delta P^{kl})' = (\dot{g}_{kl} \delta P^{kl} - \dot{P}^{kl} \delta g_{kl}) + \delta (g_{kl} \dot{P}^{kl})$$

jak i na brzegu:

$$g_{\mu\nu}\delta\tilde{Q}^{\mu\nu} = \delta\left(g_{\mu\nu}\tilde{Q}^{\mu\nu}\right) - \tilde{Q}^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}, \quad (4.8)$$

$$\left(\pi^{00}\delta\left(\frac{\pi^{03}}{\pi^{00}}\right)\right)' = \left(\pi^{00}\right)' \delta\left(\frac{\pi^{03}}{\pi^{00}}\right) - \left(\frac{\pi^{03}}{\pi^{00}}\right)' \delta\pi^{00} + \delta\left(\pi^{00}\left(\frac{\pi^{03}}{\pi^{00}}\right)'\right). \quad (4.9)$$

Skorzystamy teraz ze wzoru (2.112), udowodnionego w rozdziale 2.3. Do naszych celów można go przepisać następująco:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{16\pi}\int_V\left(g_{kl}\dot{P}^{kl}\right) + \int_{\partial V}\pi^{00}\left(\frac{\pi^{03}}{\pi^{00}}\right)' \\ = \frac{1}{16\pi}\left\{\partial_k\left(\sqrt{|g|}\left(g^{k\mu}\Gamma_{0\mu}^0 - g^{0\mu}\Gamma_{0\mu}^k\right)\right) + 2\sqrt{|g|}R^0_0\right\}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Zatem formuła generująca (4.3) przyjmuje następującą postać

$$\begin{aligned} \delta\int_V L = \frac{1}{16\pi}\int_V\left(\dot{P}^{kl}\delta g_{kl} - \dot{g}_{kl}\delta P^{kl}\right) - \frac{1}{16\pi}\int_{\partial V}g_{\mu\nu}\delta\tilde{Q}^{\mu\nu} \\ + \int_{\partial V}\left(\dot{\pi}^{00}\delta\left(\frac{\pi^{03}}{\pi^{00}}\right) - \left(\frac{\pi^{03}}{\pi^{00}}\right)'\delta\pi^{00}\right) \\ + \frac{1}{16\pi}\delta\int_{\partial V}\sqrt{|g|}\left(g^{3\mu}\Gamma_{0\mu}^0 - g^{0\mu}\Gamma_{0\mu}^3\right) + \frac{1}{8\pi}\delta\int_V\sqrt{|g|}R^0_0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Korzystając teraz z postaci (3.9) i (3.10) metryki, możemy wyrazić $\pi^{\mu\nu}$ za pomocą występujących tam wielkości. Oznaczając

$$a := \log N \quad (4.12)$$

otrzymujemy wzór

$$\int_{\partial V}\left(\dot{\pi}^{00}\delta\left(\frac{\pi^{03}}{\pi^{00}}\right) - \left(\frac{\pi^{03}}{\pi^{00}}\right)'\delta\pi^{00}\right) \quad (4.13)$$

$$= \frac{s}{16\pi}\int_{\partial V}\left(2\dot{\lambda}\delta a - 2\dot{a}\delta\lambda - \dot{\lambda}\delta\log M + (\log M)'\delta\lambda\right). \quad (4.14)$$

W podobny sposób przekształcimy wyrażenie brzegowe $\tilde{Q}^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}$. Skorzystamy z wyprowadzonych w poprzednim rozdziale wzorów (przypominamy, że wprowadziliśmy symbol \tilde{g}^{ab} na oznaczenie macierzy, której współrzędne \tilde{g}^{AB} pokrywają się z dwuwymiarową macierzą odwrotną do g_{AB} , zaś $\tilde{g}^{0b} \equiv 0$). Potrzebny nam będzie zatem wzór (3.133):

$$\begin{aligned} \tilde{Q}^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = Q^{ab}(X)\delta g_{ab} - \frac{1}{2}s\lambda\tilde{g}^{ab}\delta g_{ab} - \lambda\delta\log M \\ + s\chi_d\left(\Lambda^a\tilde{g}^{bd} + \Lambda^b\tilde{g}^{ad} - \Lambda^d\tilde{g}^{ab}\right)\delta g_{ab}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

oraz (3.135):

$$\tilde{Q}^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = -2s\lambda (l + X^d(w_d + \chi_d)) . \quad (4.16)$$

Po skorzystaniu z tych wyników formuła generująca przyjmuje następującą postać:

$$\begin{aligned} \frac{1}{16\pi} \delta \int_V \sqrt{g} (R - 2R^0_0) &= -\frac{1}{8\pi} \delta \int_V \mathcal{G}^0_0 = \frac{1}{16\pi} \int_V \left(\dot{P}^{kl} \delta g_{kl} - \dot{g}_{kl} \delta P^{kl} \right) \\ &+ \frac{s}{8\pi} \int_{\partial V} \left(\dot{\lambda} \delta a - \dot{a} \delta \lambda \right) + \frac{1}{16\pi} \int_{\partial V} Q^{ab}(X) \delta g_{ab} \\ &+ \frac{s}{16\pi} \int_{\partial V} \left(-\frac{1}{2} \lambda \tilde{g}^{ab} \delta g_{ab} - \lambda \delta \log M - \dot{\lambda} \delta \log M + (\log M) \dot{\delta} \lambda \right. \\ &+ \chi_d \left(\Lambda^a \tilde{g}^{bd} + \Lambda^b \tilde{g}^{ad} - \Lambda^d \tilde{g}^{ab} \right) \delta g_{ab} \\ &+ \left. \frac{1}{16\pi} s \delta \int_{\partial V} \lambda \left(2X^d(w_d + \chi_d) + l \right) + \frac{1}{16\pi} \delta \int_{\partial V} \sqrt{|g|} \left(g^{3\mu} \Gamma^0_{0\mu} - g^{0\mu} \Gamma^3_{0\mu} \right) . \end{aligned} \quad (4.17)$$

Uprośćmy następujące wyrażenie brzegowe:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \lambda \tilde{g}^{ab} \delta g_{ab} - \lambda \delta \log M - \dot{\lambda} \delta \log M + (\log M) \dot{\delta} \lambda \\ + \chi_d \left(\Lambda^a \tilde{g}^{bd} + \Lambda^b \tilde{g}^{ad} - \Lambda^d \tilde{g}^{ab} \right) \delta g_{ab} . \end{aligned} \quad (4.18)$$

Korzystając z tego, że $l = -\dot{\lambda} + \partial_A(n^A \lambda)$ (3.41) oraz $X^b \delta g_{bc} = -g_{bc} \delta X^b$ i pomijając dwuwymiarowe dywergencje, otrzymujemy, że wyrażenie (4.18) przyjmuje następującą postać:

$$\begin{aligned} (\partial_A n^A) \delta \lambda - \partial_A (n^A \lambda) \delta \log M + n^A \partial_A (\log M) \delta \lambda \\ + \lambda (\partial_A \log M) \delta n^A - \lambda (\partial_A \log \lambda) \delta n^A . \end{aligned} \quad (4.19)$$

Powyższe wyrażenie jest całkowane po ∂V , a więc część wyrazów skraca się następująco:

$$\int_{\partial V} (\partial_A (\log M) \delta \Lambda^A - (\partial_A \Lambda^A) \delta \log M) = -\delta \int_{\partial V} ((\partial_A \Lambda^A) \log M) , \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} ((\partial_A n^A) \delta \lambda - (\partial_A \lambda) \delta n^A) &= \int_{\partial V} (\partial_A n^A) \delta \lambda + \lambda \delta (\partial_A n^A) \\ &= \delta \int_{\partial V} \lambda (\partial_A n^A) . \end{aligned} \quad (4.21)$$

Wyrażenie (4.18) przyjmuje wtedy następującą postać (*modulo* dwuwymiarowe dywergencje):

$$\delta \left((\partial_A \Lambda^A) \log M + \lambda \partial_A n^A \right) ,$$

a formuła (4.17) wygląda następująco:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{8\pi}\delta \int_V \sqrt{g}\mathcal{G}^0_0 &= \frac{1}{16\pi} \int_V \left(\dot{P}^{kl}\delta g_{kl} - \dot{g}_{kl}\delta P^{kl} \right) \\
&+ \frac{s}{8\pi} \int_{\partial V} \left(\dot{\lambda}\delta a - \dot{a}\delta\lambda \right) + \frac{1}{16\pi} \int_{\partial V} Q^{ab}(X)\delta g_{ab} \\
&+ \frac{s}{16\pi}\delta \int_{\partial V} \left((\partial_A\Lambda^A) \log M + \lambda\partial_A n^A \right) \\
&+ \frac{1}{16\pi}s\delta \int_{\partial V} \lambda \left(2X^d(w_d + \chi_d) + l \right) + \frac{1}{16\pi}\delta \int_{\partial V} \sqrt{|g|} \left(g^{3\mu}\Gamma_{0\mu}^0 - g^{0\mu}\Gamma_{0\mu}^3 \right) . \quad (4.22)
\end{aligned}$$

Spróbujemy teraz zebrać razem człony będące pełnymi dywergencjami, tzn. uprościć wyrażenie:

$$(\partial_A\Lambda^A) \log M + \lambda\partial_A n^A + \lambda \left(2X^d(w_d + \chi_d) + l \right) + \sqrt{|g|} \left(g^{3\mu}\Gamma_{0\mu}^0 - g^{0\mu}\Gamma_{0\mu}^3 \right) . \quad (4.23)$$

Korzystając z tego, że $X^\mu\Gamma_{\mu a}^0 = -w_a$ (3.36) i $X_\mu\Gamma_{ab}^\mu = l_{ab}$ (3.35) oraz z postaci Γ_{3a}^3 (3.119):

$$\Gamma_{3a}^3 = w_a + \frac{s}{M}m^c l_{ca} + \frac{1}{M}M_{,a}$$

otrzymujemy, że (4.23), *modulo* dwuwymiarowe dywergencje, sprowadza się do następującego wyrażenia:

$$2s\lambda(l - n^A w_A) . \quad (4.24)$$

Otrzymujemy więc następującą formułę brzegową

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{8\pi}\delta \int_V \mathcal{G}^0_0 &= \frac{1}{16\pi} \int_V \left(\dot{P}^{kl}\delta g_{kl} - \dot{g}_{kl}\delta P^{kl} \right) \\
&+ \frac{s}{8\pi} \int_{\partial V} \left(\dot{\lambda}\delta a - \dot{a}\delta\lambda \right) + \frac{1}{16\pi} \int_{\partial V} \left(Q^{ab}(X)\delta g_{ab} - 2sl\delta\lambda \right) + \frac{1}{8\pi}\delta \int_{\partial V} \lambda(l - n^A w_A) . \quad (4.25) \\
&\quad (4.26)
\end{aligned}$$

Z tożsamości $Q^{ab}(X)\delta g_{ab} = 2Q^0_A(X)\delta n^A - Q_{AB}(X)\delta\tilde{g}^{AB}$ oraz korzystając z faktu, że $n_A w^A = Q^0_A(X)n^A$ otrzymujemy ostatecznie:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{8\pi}\delta \int_V \mathcal{G}^0_0 &= \frac{1}{16\pi} \int_V \left(\dot{P}^{kl}\delta g_{kl} - \dot{g}_{kl}\delta P^{kl} \right) \\
&+ \frac{s}{8\pi} \int_{\partial V} \left(\dot{\lambda}\delta a - \dot{a}\delta\lambda \right) - \frac{1}{16\pi} \int_{\partial V} \left(Q_{AB}(X)\delta\tilde{g}^{AB} + 2n^A\delta Q^0_A(X) - 2\lambda\delta l \right) . \quad (4.27)
\end{aligned}$$

Możemy jeszcze wyrazić wielkości Q za pomocą niezależnych obiektów l_{ab} i w_a . Korzystając z równania (3.128):

$$sQ^a_b(X) = \lambda\tilde{g}^{ac}l_{cb} + \Lambda^a w_b - \delta^a_b\Lambda^c w_c \quad (4.28)$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned} -\delta\mathcal{H} &= \frac{1}{16\pi} \int_V \left(\dot{P}^{kl} \delta g_{kl} - \dot{g}_{kl} \delta P^{kl} \right) + \frac{s}{8\pi} \int_{\partial V} (\dot{\lambda} \delta a - \dot{a} \delta \lambda) \\ &+ \frac{s}{16\pi} \int_{\partial V} (\lambda^{AB} \delta g_{AB} - 2(w_0 \delta \Lambda^0 - \Lambda^A \delta w_A)) , \end{aligned} \quad (4.29)$$

gdzie

$$\mathcal{H} = \frac{1}{8\pi} \int_V \mathcal{G}^0_0 + \frac{s}{8\pi} \int_{\partial V} \lambda \equiv \frac{s}{8\pi} \int_{\partial V} \lambda . \quad (4.30)$$

Człon objętościowy znika na mocy równań więzów $\mathcal{G}^\mu_\nu = 0^1$. Używa się też następującej terminologii ([24]): $\mathcal{G}^0_0 = N\mathcal{H} + N^k \mathcal{H}_k$, gdzie \mathcal{H} to tzw. więzy hamiltonowskie, a \mathcal{H}_k – więzy wektorowe, N i N^k są funkcjami lapsu i shiftu. Na mocy równań więzów $\mathcal{H} = 0$ i $\mathcal{H}_k = 0$ wynika znikanie \mathcal{G}^0_0 .

Ze względu na przydatność do opisu czarnych dziur, ostatnie wyrażenie we wzorze (4.29) przekształcimy następująco:

$$-\Lambda^A \delta w_A = \lambda n^A \delta w_A = n^A \delta \mathcal{W}_A - n^A w_A \delta \lambda ,$$

gdzie $\mathcal{W}_A := \lambda w_A$. Oznaczając dodatkowo $\kappa := w_0 - n^A w_A = X^a w_a$ otrzymujemy w końcu następującą formułę generującą:

$$\begin{aligned} -\delta\mathcal{H} &= \frac{1}{16\pi} \int_V \left(\dot{P}^{kl} \delta g_{kl} - \dot{g}_{kl} \delta P^{kl} \right) + \frac{s}{8\pi} \int_{\partial V} (\dot{\lambda} \delta a - \dot{a} \delta \lambda) \\ &+ \frac{s}{16\pi} \int_{\partial V} (\lambda^{AB} \delta g_{AB} - 2(\kappa \delta \lambda + n^A \delta \mathcal{W}_A)) . \end{aligned} \quad (4.31)$$

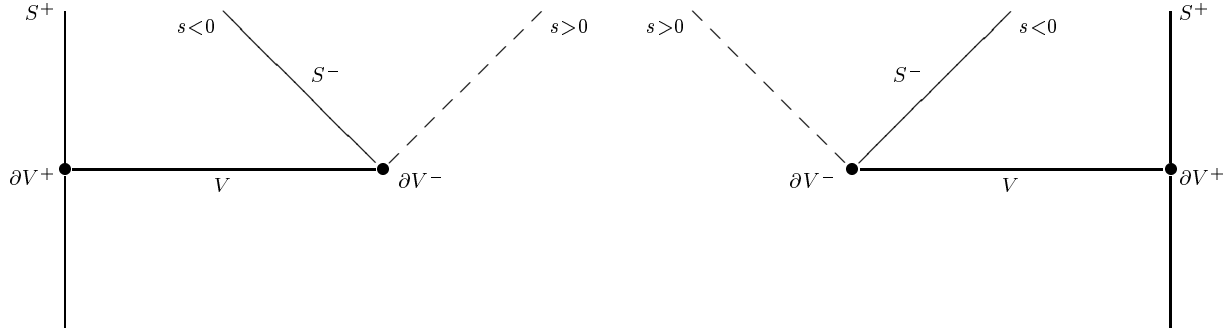
Wielkość κ taką, że $X^a \nabla_a X = -\kappa X$ nazywa się tradycyjnie „grawitacją powierzchniową” (*surface gravity*) na S . Zwracamy jednak uwagę, że wielkość ta nie charakteryzuje bynajmniej samej powierzchni, lecz jedynie wybór pola zerowego X . Kanonicznego sensu nabiera zatem wielkość κ jedynie wtedy, gdy sytuacja fizyczna powoduje, że jest kanonicznie wyróżnione pewne pole zerowe X . Tak będzie w tzw. „termodynamice czarnych dziur”, kiedy to X jest polem symetrii (Killinga) rozwiązania stacjonarnego, i to takim, które w nieskończoności przestrzennej zbiega do pola jednostkowego w kierunku czasowym. Wtedy odpowiadający mu generator odpowiada energii a – jak zobaczymy – odpowiednia wersja powyższej formuły generującej daje tzw. pierwsze prawo termodynamiki czarnych dziur.

4.2 Dynamika pola grawitacyjnego na zewnątrz powierzchni zerowej

Rozpatrzmy teraz dynamikę pola grawitacyjnego w obszarze na zewnątrz tuby świata, której brzeg S^- jest powierzchnią typu zerowego, i ograniczonym z zewnątrz pewną hiper-

¹Tak jest w teorii pustej czasoprzestrzeni. Gdyby obecna była jeszcze materia, wtedy człon objętościowy przybierałby postać $\mathcal{G}^0_0 - 8\pi T^0_0$ i też by zniknął na mocy równań więzów.

powierzchnią S^+ typu czasowego:



gdzie $\partial V^+ = V \cap S^+$, a $\partial V^- = V \cap S^-$.

Obliczenia prowadzące do otrzymania formuły brzegowej są analogiczne do tych w poprzednim podrozdziale oraz tych zawartych w pracach Kijowskiego [18, 19] (zob. także rozdział 2) i sprowadzają się do całkowania po V formuły generującej (4.2). Używając tych samych przekształceń co w poprzednim paragrafie i uwzględniając, że $\int_{\partial V} = \int_{\partial V^+} - \int_{\partial V^-}$ (zmiana orientacji ∂V^- !) oraz to, że zmieniając punkt widzenia musimy zmienić znak s , otrzymujemy następujący wzór:

$$\begin{aligned} -\delta\mathcal{H} &= -\delta\mathcal{H}^+ - \delta\mathcal{H}^- = \frac{1}{16\pi} \int_V \left(\dot{P}^{kl} \delta g_{kl} - \dot{g}_{kl} \delta P^{kl} \right) \\ &+ \frac{1}{16\pi} \int_{\partial V^+} \left(\dot{\lambda} \delta \alpha - \dot{\alpha} \delta \lambda \right) - \frac{1}{16\pi} \int_{\partial V^+} \mathcal{Q}^{ab} \delta g_{ab} \\ &+ \frac{s}{8\pi} \int_{\partial V^-} \left(\dot{\lambda} \delta a - \dot{a} \delta \lambda \right) + \frac{s}{16\pi} \int_{\partial V^-} \left(\lambda l^{AB} \delta g_{AB} - 2 \left(w_0 \delta \Lambda^0 - \Lambda^A \delta w_A \right) \right), \end{aligned} \quad (4.32)$$

gdzie α i \mathcal{Q}^{ab} są obiektami żyjącymi na powierzchni typu czasowego wprowadzonymi w rozdziale 2, a wielkość \mathcal{H}^+ jest równa:

$$\mathcal{H}^+ = \frac{1}{16\pi} \int_{\partial V^+} \left(\mathcal{Q}^{AB} g_{AB} - \mathcal{Q}^{00} g_{00} \right). \quad (4.33)$$

W granicy $\partial V^+ \rightarrow \infty$ powyższe wyrażenie na \mathcal{H}^+ daje nam masę ADM, którą oznaczamy \mathcal{M} . Podobnie jak w poprzednim rozdziale \mathcal{H}^- wynosi:

$$\mathcal{H}^- = \frac{s}{8\pi} \int_{\partial V} \lambda. \quad (4.34)$$

Ostatecznie formuła generująca dla pola grawitacyjnego o danych brzegowych zadanych na zerowej hiperpowierzchni S jest następująca:

$$\begin{aligned} -\delta\mathcal{M} - \delta\mathcal{H}^- &= \frac{1}{16\pi} \int_V \left(\dot{P}^{kl} \delta g_{kl} - \dot{g}_{kl} \delta P^{kl} \right) \\ &+ \frac{s}{8\pi} \int_{\partial V^-} \left(\dot{\lambda} \delta a - \dot{a} \delta \lambda \right) + \frac{s}{16\pi} \int_{\partial V^-} \left(\lambda l^{AB} \delta g_{AB} - 2 \left(\kappa \delta \lambda + n^A \delta \mathcal{W}_A \right) \right). \end{aligned} \quad (4.35)$$

4.3 Wyprowadzenie formuły generującej poprzez przejście graniczne z przypadku niezdegenerowanej geometrii brzegu

Wyprowadzona przez nas w poprzednich dwóch podrozdziałach formuła generująca dla pola grawitacyjnego o danych brzegowych na powierzchni zerowej może być także uzyskana z formuły brzegowej J. Kijowskiego [19] w przypadku granicznym, gdy czasowa powierzchnia „kładzie się” na powierzchnię zerową S .

Weźmy zatem rodzinę powierzchni S_ϵ parametryzowaną wielkością ϵ , taką, że dla $\epsilon \rightarrow 0$ mamy $S_\epsilon \rightarrow S$. Równanie tych powierzchni w naszym specjalnym układzie współrzędnych jest postaci $\{t + s\epsilon r = \text{const.}\}$ i $\{r - s\epsilon t = \text{const.}\}$. Zbadajmy zachowanie się formuły kontrolującej pole grawitacyjne wewnątrz tuby świata, której brzegiem jest S_ϵ ([19], rozważania w rozdziale 2. tej rozprawy), przy przejściu $\epsilon \rightarrow 0$ (wtedy składowa metryki g^{33} na powierzchni S_ϵ zachowuje się jak ϵ i znika dla $\epsilon = 0$, czyli na powierzchni zerowej). W dowolnej (niezerowej) metryce formuła ta ma postać ([19], p. także rozdział 2):

$$\begin{aligned} -\delta\mathcal{H} &= \frac{1}{16\pi} \int_V \left(\dot{P}^{kl} \delta g_{kl} - \dot{g}_{kl} \delta P^{kl} \right) + \frac{1}{16\pi} \int_{\partial V} \left(\dot{\lambda} \delta \alpha - \dot{\alpha} \delta \lambda \right) \\ &\quad - \frac{1}{16\pi} \int_{\partial V} g_{ab} \delta \mathcal{Q}^{ab} , \end{aligned} \quad (4.36)$$

gdzie hamiltonian \mathcal{H} jest następujący:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \int_V \left(-g_{kl} \dot{P}^{kl} - L \right) + \frac{1}{8\pi} \int_{\partial V} \lambda \dot{\alpha} \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_V \mathcal{G}^0_0 + \frac{1}{16\pi} \int_{\partial V} \left(\mathcal{Q}^{AB} g_{AB} - \mathcal{Q}^{00} g_{00} \right) . \end{aligned} \quad (4.37)$$

Biorąc pod uwagę równania Einsteina mamy, że człon objętościowy \mathcal{G}^0_0 znika, a więc:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{16\pi} \int_{\partial V} \left(\mathcal{Q}^{AB} g_{AB} - \mathcal{Q}^{00} g_{00} \right) . \quad (4.38)$$

Podążając za rozważaniami w pracy [19] możemy przepisać tę formułę do postaci jednorodnej. W tym celu wprowadźmy następujące oznaczenia: niech n i n^A oznaczają, standardowo, odpowiednio „laps” i „shift” trójwymiarowej geometrii na brzegu tuby świata:

$$n : = \frac{1}{\sqrt{|\hat{g}^{00}|}} , \quad (4.39)$$

$$n^A : = \tilde{\tilde{g}}^{AB} g_{0B} , \quad (4.40)$$

gdzie \hat{g}^{ab} oznacza trójwymiarową metrykę odwrotną do metryki indukowanej g_{ab} na powierzchni S .

Składowe tensora krzywizny zewnętrznej \mathcal{Q}^{ab} (wprowadzonej w rozdziale 2, wzór (2.74)) mogą zostać przereanżowane zgodnie z $(2+1)$ -dekompozycją metryki na brzegu tuby świata. W tym celu wprowadźmy dwuwymiarowe obiekty zdefiniowane na ∂V : \mathcal{Q} (gęstość skalarna), \mathcal{Q}_A (gęstość kowektorowa) i $\overset{\perp}{\mathcal{Q}}^{AB}$, wyrażające się przez krzywiznę zewnętrzną \mathcal{Q}^{ab} następująco:

$$\mathcal{Q} := n\mathcal{Q}^{00}, \quad (4.41)$$

$$\mathcal{Q}_A := \mathcal{Q}^0{}_A, \quad (4.42)$$

$$\overset{\perp}{\mathcal{Q}}^{AB} := \mathcal{Q}_{CD}\tilde{g}^{CA}\tilde{g}^{DB}. \quad (4.43)$$

Dla tych wielkości zachodzą następujące związki ([18]):

$$\begin{aligned} g_{ab}\delta\mathcal{Q}^{ab} &= g_{AB}\delta\overset{\perp}{\mathcal{Q}}^{AB} - 2\mathcal{Q}^0{}_A\delta n^A - n^2\delta\mathcal{Q}^{00}, \\ \mathcal{Q}^{AB}g_{AB} - \mathcal{Q}^{00}g_{00} &= \overset{\perp}{\mathcal{Q}}^{AB}g_{AB} - 2\mathcal{Q}^0{}_An^A - \mathcal{Q}^{00}n^2. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Podstawiając powyższe zależności do (4.36) otrzymujemy następującą jednorodną formułę brzegową:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V \left(\dot{P}^{kl}\delta g_{kl} - \dot{g}_{kl}\delta P^{kl} \right) + 2 \int_{\partial V} \left(\dot{\lambda}\delta\alpha - \dot{\alpha}\delta\lambda \right) \\ &\quad + \int_{\partial V} \left(\overset{\perp}{\mathcal{Q}}^{AB}\delta g_{AB} - 2n^A\delta\mathcal{Q}_A + 2n\delta\mathcal{Q} \right). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Występująca w „lapsie” składowa metryki trójwymiarowej \hat{g}^{ab} wyraża się przez składowe metryki czasoprzestrzennej następująco:

$$\hat{g}^{00} = g^{00} - \frac{(g^{03})^2}{g^{33}} = \frac{g^{00}g^{33} - (g^{03})^2}{g^{33}}. \quad (4.46)$$

Czterowymiarową składową g^{33} metryki odwrotnej możemy wyrazić za pomocą składowej trójwymiarowej metryki \tilde{g}^{33} odwrotnej do metryki indukowanej g_{kl} na V :

$$g^{33} = \tilde{g}^{33} + \frac{(g^{03})^2}{g^{00}}. \quad (4.47)$$

Wtedy

$$\hat{g}^{00} = \frac{g^{00}\tilde{g}^{33}}{g^{33}}. \quad (4.48)$$

Postać metryki g_{kl} bierzemy w takiej samej postaci jak w rozdziale 3 – wzór (3.9) (tylko człon g_{00} określa degenerację metryki, ale tych składowych nie bierzemy pod uwagę, więc poniższy zapis jest poprawny w dowolnej niezerowej dekompozycji metryki):

$$g_{kl} = \left[\begin{array}{c|c} g_{AB} & m_A \\ \hline m_A & \left(\frac{M}{N}\right)^2 + m^A m_A \end{array} \right]. \quad (4.49)$$

Metryka odwrotna jest wtedy następująca:

$$\tilde{g}^{kl} = \left(\frac{N}{M}\right)^2 \left[\begin{array}{c|c} \left(\left(\frac{M}{N}\right)^2 + m^A m_A\right) \tilde{g}^{AB} & -m^A \\ \hline -m^A & 1 \end{array} \right]. \quad (4.50)$$

W tym zapisie $g^{00} = -1/N^2$, a więc otrzymujemy, że $\hat{g}^{00} = -1/(M^2 g^{33})$ oraz, że „laps” n jest następujący:

$$n = M\sqrt{g^{33}}. \quad (4.51)$$

Spróbujmy teraz przearanżować wyrazy występujące w (4.45) tak, żeby otrzymać wyrażenia dobrze zachowujące się przy przejściu $S_\epsilon \rightarrow S$ – inaczej mówiąc, gdy g^{33} dąży do zera. Na razie zarówno α jak i wielkości \mathcal{Q} , \mathcal{Q}_A i \mathcal{Q}^{AB} nie mają dobrej granicy.

Ze wzoru (2.78) mamy, że wariacja kąta hiperbolicznego α jest następująca:

$$\delta\alpha = \frac{\delta q}{\sqrt{1+q^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+q^{-2}}} \delta(\log q). \quad (4.52)$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\log q = \log g^{03} - \frac{1}{2}(\log |g^{00}| + \log g^{33}), \quad (4.53)$$

możemy zapisać wariację α w następującej postaci:

$$\delta\alpha = \delta \log N - \delta \log \left(M\sqrt{g^{33}} \right). \quad (4.54)$$

Definiujemy następującą wielkość \mathbf{a} :

$$\mathbf{a} := -\log \sqrt{|g^{00}|} \equiv \log N. \quad (4.55)$$

Jest ona częścią α z równania (4.54), tzn.

$$\delta\alpha = \delta\mathbf{a} - \delta \log \left(M\sqrt{g^{33}} \right), \quad (4.56)$$

a ponadto dobrze zachowuje się przy przejściu granicznym $S_\epsilon \rightarrow S$. Wtedy też \mathbf{a} staje się kątem hiperbolicznym a , występującym w dopiero co wyprowadzonej formule zerowej (4.27). Wyrażenie $\delta \log \left(M\sqrt{g^{33}} \right)$ oczywiście nie ma dobrej granicy, ale być może „skasuje” się z podobnymi członami występującymi w obiektach \mathcal{Q} . Przearanżujmy więc teraz te człony. Mamy, że:

$$\mathcal{Q}_A = \mathcal{Q}^0_A = \tilde{g}^{0b} \mathcal{Q}_{bA} = \lambda M \left(g^{0b} - \frac{g^{30} g^{3b}}{g^{33}} \right) (\Gamma^3_{bA} - g_{bA} \Gamma^3_{cd} \tilde{g}^{cd}). \quad (4.57)$$

Korzystając z następującego wzoru:

$$-\frac{1}{2}(\log g^{33})_{,a} = \Gamma_{a3}^3 + \frac{1}{g^{33}}\Gamma_{ab}^3 g^{3b}, \quad (4.58)$$

otrzymujemy

$$\mathcal{Q}^0_A = \lambda (\Gamma_{3A}^3 - m^B \Gamma_{BA}^3) + \frac{1}{2} \lambda (\log g^{33})_{,A}. \quad (4.59)$$

Zdefiniujmy wielkość \mathfrak{w}_a :

$$\mathfrak{w}_a := -\frac{g^{3\mu}}{g^{30}} \Gamma_{\mu a}^0. \quad (4.60)$$

Biorąc pod uwagę, że zachodzi:

$$\Gamma_{3a}^3 - m^B \Gamma_{Ba}^3 \equiv \mathfrak{w}_a + (\log M)_{,a}, \quad (4.61)$$

widzimy, że \mathcal{Q}^0_A może być napisane w następującej postaci

$$\mathcal{Q}^0_A = \lambda \mathfrak{w}_A + \lambda (\log M)_{,A} + \frac{1}{2} (\log g^{33})_{,A}. \quad (4.62)$$

Podobnie postępując możemy zapisać $\overset{\perp}{\mathcal{Q}}^{AB} g_{AB}$ w następujący sposób

$$\begin{aligned} \overset{\perp}{\mathcal{Q}}^{AB} g_{AB} &= -\lambda l - 2\lambda \mathfrak{w}_0 + 2\lambda n^A \mathfrak{w}_A - 2\lambda (\partial_0 - n^A \partial_A) \log M \\ &\quad - \lambda (\partial_0 - n^A \partial_A) (\log g^{33}), \end{aligned}$$

a $n\mathcal{Q}$ jest równe:

$$n\mathcal{Q} = n^2 \mathcal{Q}^{00} = \lambda M \Gamma_{AB}^3 \tilde{g}^{AB} = \lambda l, \quad (4.63)$$

i zachodzi następujący wzór:

$$2n\delta\mathcal{Q} = 2n\mathcal{Q}\delta(\log \mathcal{Q}) = 2\lambda\delta(\log \lambda l - \log n). \quad (4.64)$$

Wzory wyprowadzone powyżej zebrane razem wyglądają następująco

$$\begin{aligned} 2\dot{\lambda}\delta\alpha &= 2\dot{\lambda}\delta\mathfrak{a} - 2\dot{\lambda}\delta \log n, \\ -2\dot{\alpha}\delta\lambda &= -2\partial_0 \mathfrak{a} \delta\lambda + 2\partial_0 \log n \delta\lambda, \\ 2n\delta\mathcal{Q} &= 2\delta(\lambda l) - 2\lambda\delta(\log n), \\ -2n^A \delta\mathcal{Q}_A &= -2n^A \delta(\lambda \mathfrak{w}_A) - 2n^A \delta(\lambda (\log n)_{,A}), \\ \overset{\perp}{\mathcal{Q}}^{AB} g_{AB} \delta \log \lambda &= -[l + 2\mathfrak{w}_0 - 2n^A \mathfrak{w}_A + 2(\partial_0 - n^A \partial_A) (\log n)] \delta \lambda, \\ \overset{\perp}{\mathcal{Q}}^{AB} \delta g_{AB} &= \lambda \bar{l}^{AB} \delta g_{AB}. \end{aligned}$$

Możemy teraz przearanżować wyrażenia występujące w formule brzegowej (4.45) wyrażając za pomocą powyższych wzorów wielkości występujące po prawej stronie tej formuły:

$$0 = \int_V \left(\dot{P}^{kl} \delta g_{kl} - \dot{g}_{kl} \delta P^{kl} \right) + 2 \int_{\partial V} (\dot{\lambda}\delta\alpha - \dot{\alpha}\delta\lambda) + \int_{\partial V} \left(\overset{\perp}{\mathcal{Q}}^{AB} \delta g_{AB} - 2n^A \delta\mathcal{Q}_A + 2n\delta\mathcal{Q} \right) \quad (4.65)$$

otrzymujemy

$$0 = \int_V \left(\dot{P}^{kl} \delta g_{kl} - \dot{g}_{kl} \delta P^{kl} \right) + 2 \int_{\partial V} (\dot{\lambda} \delta \mathbf{a} - \dot{\mathbf{a}} \delta \lambda) + 2\delta \int_{\partial V} \lambda + \int_{\partial V} (\lambda^{AB} \delta g_{AB} - 2\lambda n^A \delta \mathbf{w}_A - 2\mathbf{w}_0 \delta \lambda) . \quad (4.66)$$

W granicy zerowej $\epsilon \rightarrow 0$, mamy, że $\mathbf{a} \rightarrow a$ oraz $\mathbf{w}_a \rightarrow w_a$. Formuła brzegowa (4.66) przyjmuje wtedy następującą postać :

$$0 = \int_V \left(\dot{P}^{kl} \delta g_{kl} - \dot{g}_{kl} \delta P^{kl} \right) + 2 \int_{\partial V} (\dot{\lambda} \delta a - \dot{a} \delta \lambda) + 2\delta \int_{\partial V} \lambda + \int_{\partial V} (\lambda^{AB} \delta g_{AB} - 2\lambda n^A \delta w_A - 2w_0 \delta \lambda) . \quad (4.67)$$

Przenosząc $2\delta \int_{\partial V} \lambda$ na lewą stronę otrzymujemy wzór identyczny z (4.29) otrzymanym w rozdziale 4.2. Zgodność ta wskazuje na konsystencję naszego podejścia.

4.4 Dynamika horyzontów zdarzeń

Rozważmy sytuację, gdy brzegiem naszej hiperpowierzchni jest nieekspandujący horyzont czarnej dziury. Dynamika takiego układu będzie generowana przez (4.32), przy $\partial V^+ \rightarrow \infty$. Całka z gęstości hamiltonianu \mathcal{H}^+ będzie wtedy masą ADM \mathcal{M} . Na brzegu ∂V^- , z racji tego, że jest horyzontem czarnej dziury, mamy $l \equiv 0$ i $l_{AB} \equiv 0$ (p. rozdział 3.10), wtedy hamiltonian \mathcal{H}^- dany wzorem (4.34) też jest równy zero. Otrzymujemy więc następującą formułę generującą dynamikę czarnej dziury:

$$-\delta \mathcal{M} = \frac{1}{16\pi} \int_V \left(\dot{P}^{kl} \delta g_{kl} - \dot{g}_{kl} \delta P^{kl} \right) + \frac{s}{8\pi} \int_{\partial V^-} (\dot{\lambda} \delta a - \dot{a} \delta \lambda) - \frac{s}{8\pi} \int_{\partial V^-} (\kappa \delta \lambda + n^A \delta \mathcal{W}_A) . \quad (4.68)$$

Tutaj $s > 0$ oznacza tzw. białą dziurę, a $s < 0$ czarną dziurę.

4.5 Termodynamika czarnych dziur

Tak zwana „termodynamika czarnych dziur” jest analizą możliwych sytuacji stacjonarnych na zewnątrz horyzontu zdarzeń. Stacjonarność oznacza założenie o istnieniu pola symetrii (Killinga) o charakterze czasowym. Gdy istnieje takie pole symetrii to możemy zawsze wybrać układ współrzędnych w którym wszystkie pochodne czasowe ($\dot{}$) są równe zero. Wtedy formuła brzegowa (4.68) redukuje się do wzoru:

$$\delta \mathcal{M} = \frac{s}{8\pi} \int_{\partial V^-} (\kappa \delta \lambda + n^A \delta \mathcal{W}_A) . \quad (4.69)$$

Wielkość κ taką, że $X^a \nabla_a X = -\kappa X$ nazywa się tradycyjnie „grawitacją powierzchniową” (*surface gravity*) na S .

W rozdziale 3.10 analizowaliśmy strukturę geometryczną S , która jest wiązką afiniczną $\pi : S \rightarrow B$ nad rozmaitością bazową B i założyliśmy, że topologia B jest izomorficzna ze sferą S^2 . Włókna S są liniami całkowymi pola X , a ich struktura afiniczna wynika z faktu, że linie te są geodezyjnymi zerowymi na M . Pokazaliśmy, że gdy S jest horyzontem to zachodzi $\mathcal{L}_X g_{ab} = 0$. Wynika stąd, że metryka g na S daje się rzutować na przestrzeń włókien, którą z kolei można utożsamić z bazą B . W ten sposób pokazujemy, że B jest wyposażona w dobrą (riemannowską) metrykę, którą oznaczymy γ_{AB} , a zdegenerowana metryka g_{ab} na rozmaitości wiązki jest cofnięciem γ_{AB} z B do S :

$$g = \pi^* \gamma .$$

Poza tym prawo transformacyjne (3.42) dla w_a redukuje się w przypadku izolowanego horyzontu do transformacji cechowania:

$$\tilde{w}_a = w_a + \partial_a \varphi . \quad (4.70)$$

Ponieważ ograniczamy się tylko do przypadku stacjonarnego, rozpatrujemy transformacje cechowania niezależne od czasu. Gdyby używać na każdym włóknie współrzędnych afinicznych, otrzymalibyśmy równania $\kappa \equiv X^a w_a = 0$. Nie będziemy jednak używać tych współrzędnych, ale współrzędnych zgodnych z polem Killinga – chcemy bowiem wykorzystać stacjonarność rozważanych rozwiązań równań Einsteina.

Przypuszczamy, że pole Killinga powinno być w tej sytuacji styczne do S w punktach należących do S , bowiem w przeciwnym wypadku mielibyśmy zbyt wiele symetrii i S nie mogłoby być horyzontem. Mimo poważnych wysiłków, nie udało nam się wykazać tej hipotezy, która ma związek z istnieniem pewnych rozwiązań klasy Kundta. Jest to klasa metryk biorących się z lokalnej foliacji nieekspandującymi horyzontami. W przypadku gdy mamy czasowe pole Killinga i cięcia powierzchni S są sferami, znamy tylko jeden przykład aksjalnie symetryczny takiej metryki, ale oczywiście nie jest on asymptotycznie płaski. Nasza hipoteza głosi, że sferyczna symetria cięć oraz asymptotyczna płaskość nie mogą być spełnione dla metryk z klasy Kundta. W niniejszej pracy przyjmujemy zatem ten fakt jako założenie. Poza warunkiem styczności do S , nie możemy natomiast nakładać dalszych żądań na pole Killinga, a w szczególności żądać, by było ono polem zerowym lub by było unormowane zgodnie z parametrem afinicznym. Pole Killinga jest bowiem strukturą globalną, którego unormowanie jest jednoznacznie ustalone przez warunek unormowania w nieskończoności. Wynika stąd, że nie możemy przejść do układu współrzędnych w którym κ zeruje się, bowiem w układzie takim metryka nie byłaby na ogół stacjonarna. Wartość grawitacji powierzchniowej κ jest zatem w naszym sformułowaniu termodynamiki czarnych dziur wielkością o charakterze globalnym i nie daje się odczytać lokalnie, z żadnej informacji o geometrii czasoprzestrzeni na horyzoncie i jego pobliżu. Rzeczywiście: pole Killinga pomnożone przez dowolną liczbę dodatnią $c > 0$ jest lokalnie równie dobre jak pole pierwotne. Oznacza to, że współrzędna $\tilde{x}^0 = \frac{1}{c} x^0$ jest równie dobra do powyższych rozważań jak współrzędna x^0 . Aby odpowiadający jej hamiltonian był energią, a nie jej

wielokrotnością, musimy żądać, by było ono unormowane w nieskończoności: $\|dx^0\| = -1$. Żądając zatem, by pole Killinga było równe $\frac{\partial}{\partial x^0}$ w nieskończoności otrzymujemy jednoznacznie wartość zmiennej w oraz zmiennych pola wektorowego n^A na brzegu wewnętrznym $\partial V^- \simeq S^2$.

Mamy zatem dwa pola symetrii metryki horyzontu S : ∂_0 (jako styczne do S pole symetrii całej metryki, jest ono również polem symetrii metryki horyzontu) oraz pole $X = \partial_0 - n^A \partial_A$. Wynika stąd, że również ich różnica – to znaczy pole $\vec{n} := n^A \partial_A$ – jest polem symetrii riemannowskiej metryki g_{AB} . Ponieważ struktura konforemna zawarta w g_{AB} jest zawsze izomorficzna ze strukturą konforemną sfery S^2 , możemy wybrać taki układ współrzędnych, w którym $g_{AB} = f h_{AB}$ (h_{AB} oznacza standardową metrykę na sferze). Pole \vec{n} musi być polem symetrii tej struktury konforemnej. Wynika stąd, że \vec{n} należy do sześciowymiarowej przestrzeni pól konforemnych na sferze. Operując pozostałą jeszcze dowolnością wyboru współrzędnych konforemnych można uzyskać to, by \vec{n} było po prostu polem obrotów na sferze. W paragrafie 4.5.1 pokażemy, że istnieje układ współrzędnych w którym zachodzi wzór:

$$\vec{n} = \Omega^k \epsilon_{klm} \frac{x^l}{r} \partial^m, \quad (4.71)$$

gdzie Ω^k są składowymi pewnego wektora trójwymiarowego zwanego wektorem prędkości kątowej czarnej dziury, zaś x^k są współrzędnymi na S^2 powstałymi z obcięcia współrzędnych kartezjańskich na \mathbb{R}^3 do sfery jednostkowej. Oczywiście można zawsze wybrać oś współrzędnej z równoległe do wektora prędkości kątowej. Wtedy zachodzi: $(\Omega^k) = (\Omega, 0, 0)$, gdzie liczba Ω jest długością tego wektora, oraz:

$$n = \Omega \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (4.72)$$

Wstawiając tę postać do drugiej części całki w formule generującej (4.69) otrzymujemy

$$\int_{\partial V^-} n^A \delta \mathcal{W}_A = \Omega \delta J, \quad (4.73)$$

gdzie oznaczyliśmy przez

$$J \equiv J_z := \int_{S^2} \epsilon_{zlm} \frac{x^l}{r} w^m d\sigma \quad (4.74)$$

składową z pewnego wektora trójwymiarowego równoległego do osi z , który nosi nazwę momentu pędu czarnej dziury.

Dotychczas wykorzystaliśmy symetrię struktury konforemnej niesionej przez g_{AB} . Symetria całej metryki implikuje stałość czynnika konforemnego wzdłuż pola \vec{n} . Aby się o tym przekonać, wystarczy zauważyć, że ślad równania Killinga oznacza znikanie dywergencji pola \vec{n} :

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_A (\sqrt{\det g_{CD}} n^A) = \partial_A (f \sqrt{\det h_{CD}} n^A) \\ &= n^A \sqrt{\det h_{CD}} \partial_A f + f \partial_A (\sqrt{\det h_{CD}} n^A) = n^A \sqrt{\det h_{CD}} \partial_A f, \end{aligned} \quad (4.75)$$

bowiem \vec{n} jest polem symetrii metryki h . Jeśli wybrać współrzędne sferyczne (θ, φ) na S^2 w taki sposób, by było $\vec{n} = \Omega \partial_\varphi$, to czynnik konforemny f nie będzie zależał od zmiennej φ i będzie tylko funkcją zmiennej θ .

Okazuje się, że kanonicznie sprzężoną do niej zmienną κ można również przecechować w ten sposób, by była stała wzdłuż pola \vec{n} . Dowód tego jest zawarty w paragrafie 4.5.2.

Wynik ten został otrzymany lokalnie, czy raczej *quasi*-lokalnie, tzn. z analizy pola na samym horyzoncie. Tymczasem znane twierdzenia *globalne*, mówiące o istnieniu rozwiązań stacjonarnych posiadających horyzont, implikują tzw. *zerowe prawo termodynamiki* czarnych dziur. Głosi ono, że grawitacja powierzchniowa κ może zostać przecechowana w taki sposób, by była *stała na horyzoncie* ([11]). Uwzględniając ten wynik, (4.69) przyjmuje następującą postać:

$$s\delta\mathcal{M} = \frac{1}{8\pi}\kappa \int_{S^2} \delta\lambda + \Omega\delta J . \quad (4.76)$$

Ale

$$\delta\lambda = \delta(f\lambda_0) = (\delta f)\lambda_0 d^2x = (\delta f)d\sigma . \quad (4.77)$$

Całka $A := \int_{S^2} f d\sigma$ jest polem powierzchni horyzontu S . Mamy więc ostatecznie następującą formułę

$$s\delta\mathcal{M} = \frac{1}{8\pi}\kappa\delta A + \Omega\delta J , \quad (4.78)$$

która stanowi tzw. *pierwsze prawo dynamiki* czarnych dziur. Jak widać, jest to prosta konsekwencja formuły generującej dynamikę pola grawitacyjnego (4.35) w obszarze na zewnątrz horyzontu, wyspecyfikowanej do przypadku rozwiązania stacjonarnego w czasie.

4.5.1 Wyprowadzenie wzoru (4.72)

Pole $\vec{n} = n^A$ jest polem symetrii metryki g_{AB} , zatem spełnia równanie Killinga:

$$n_{A||B} + n_{B||A} = 0 . \quad (4.79)$$

Jak już zostało omówione, możemy wybrać układ współrzędnych taki, że $g_{AB} = fh_{AB}$, a h_{AB} jest standardową metryką na sferze. Pole \vec{n} jest też polem symetrii struktury konforemnej niesionej przez metrykę h_{AB} , zatem musi spełniać równanie:

$$n_{A||B} + n_{B||A} - h_{AB}n^C{}_{||C} = 0 , \quad (4.80)$$

gdzie $||$ oznacza dwuwymiarową różniczkę względem metryki h na sferze. Stąd wynika, że \vec{n} należy do sześciowymiarowej przestrzeni pól konforemnych na sferze, tzn. jest postaci:

$$n^A = \varepsilon^{AB} \overset{1}{v}_{,B} + \overset{2}{v}_{,B} h^{AB} , \quad (4.81)$$

gdzie $\overset{1}{v}$, $\overset{2}{v}$ są funkcjami dipolowymi, tzn. postaci: $\overset{1}{v} = a_i k^i$, $\overset{2}{v} = b_i k^i$; k^i są współrzędnymi wektora jednostkowego:

$$\begin{aligned} k^1 &= \sin \theta \cos \varphi , \\ k^2 &= \sin \theta \sin \varphi , \\ k^3 &= \cos \theta . \end{aligned}$$

Pole \vec{n} jest więc następujące:

$$n^A \partial_A = (\varepsilon^{\theta\varphi} (a_i k^i)_{,\varphi} + (b_i k^i)_{,\theta}) \partial_\theta + \left(\varepsilon^{\varphi\theta} (a_i k^i)_{,\theta} + (b_i k^i)_{,\varphi} \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) \partial_\varphi .$$

Pokażemy, że istnieje układ współrzędnych, w którym \vec{n} jest postaci

$$n^A \partial_A = \Omega \frac{\partial}{\partial \varphi} .$$

Dowód. Chcemy, żeby w $\theta = 0$ składowa n^θ zniknęła. Zatem $a_1 = b_2$ i $a_2 = -b_1$. Wtedy:

$$n^\theta = (\cos \theta - 1)(a_1 \sin \varphi + b_1 \cos \varphi) - b_3 \sin \theta , \quad (4.82)$$

$$n^\varphi = (\cos \theta - 1)(b_1 \sin \varphi - a_1 \cos \varphi) \frac{1}{\sin \theta} + a_3 . \quad (4.83)$$

Możemy obrócić układ współrzędnych tak, że składowe n^θ i n^φ będą postaci:

$$n^\theta = (\cos \theta - 1)a \sin \varphi - b \sin \theta , \quad (4.84)$$

$$n^\varphi = (\cos \theta - 1)(-a \cos \varphi) \frac{1}{\sin \theta} + c . \quad (4.85)$$

Z tego, że S jest horyzontem, mamy:

$$(\lambda n^A)_{,A} = 0 ,$$

gdzie w naszym układzie współrzędnych $\lambda = f \sin \theta$, otrzymujemy następujące równanie:

$$\begin{aligned} & \{ f \sin \theta ((\cos \theta - 1)a \sin \varphi - b \sin \theta) \}_{,\theta} \\ & + \left\{ f \sin \theta \left((\cos \theta - 1)(-a \cos \varphi) \frac{1}{\sin \theta} + c \right) \right\}_{,\varphi} = 0 . \end{aligned} \quad (4.86)$$

Całkując powyższe równanie po φ i pomijając znikającą całkę $\int (\lambda n^\varphi)_{,\varphi} d\varphi$ otrzymujemy

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^{2\pi} f \sin \theta ((\cos \theta - 1)a \sin \varphi - b \sin \theta) d\varphi = 0 , \quad (4.87)$$

zatem

$$\frac{\cos \theta - 1}{\sin \theta} a \int_0^{2\pi} f \sin \varphi d\varphi + b \int_0^{2\pi} f d\varphi = 0 . \quad (4.88)$$

Przy $\theta \rightarrow 0$ wyrażenie $\frac{\cos\theta-1}{\sin\theta}a \int_0^{2\pi} f \sin\varphi d\varphi$ znika, zatem w $\theta = 0$:

$$2\pi b f(\theta = 0) = b \int_0^{2\pi} f d\varphi = 0$$

Stąd bezpośrednio wynika, że $b = 0$, bowiem czynnik konforemny f jest dodatni i jego średnia po równoleżniku nie może się zerować. Zatem \vec{n} jest postaci:

$$n^\theta = (\cos\theta - 1)a \sin\varphi, \quad (4.89)$$

$$n^\varphi = (\cos\theta - 1)(-a \cos\varphi) \frac{1}{\sin\theta} + c. \quad (4.90)$$

Zapiszmy \vec{n} we współrzędnych stereograficznych na płaszczyźnie (x, y) przecinającej naszą sferę wzdłuż równika:

$$x = \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} \cos\varphi$$

$$y = \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} \sin\varphi. \quad (4.91)$$

$$(4.92)$$

Wtedy:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} = -\frac{1}{2} \frac{\cos\varphi}{\sin^2\frac{\theta}{2}} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\sin\varphi}{\sin^2\frac{\theta}{2}} \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} = -\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} \sin\varphi \frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} \cos\varphi \frac{\partial}{\partial y},$$

a $n^A \partial_A$ jest postaci:

$$n^A \partial_A = a \frac{\partial}{\partial y} + c \left(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (4.93)$$

Rozpatrzmy dwa przypadki: $c = 0$ i $c \neq 0$:

- $c = 0$

W tym przypadku równanie $(f \sin\theta n^A)_{,A} = 0 - (4.86)$, jest następujące:

$$(f \sin\theta (\cos\theta - 1) a \sin\varphi)_{,\theta} + \left(f \sin\theta (\cos\theta - 1) (-a \cos\varphi) \frac{1}{\sin\theta} \right)_{,\varphi} = 0. \quad (4.94)$$

W zmiennych stereograficznych (4.91) przyjmuje ono postać:

$$(\log f)_{,y} = \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}. \quad (4.95)$$

Rozwiązaniem tego równania jest

$$f(x, y) = C(x)(1 + x^2 + y^2) , \quad (4.96)$$

gdzie $C(x)$ jest jakąś dowolną funkcją x . Trzymajmy x ustalone i dążmy z y do nieskończoności. Jeśli $C(x) \neq 0$ to $f \rightarrow \infty$, a jeśli $C(x) = 0$ to $f \equiv 0$. Ale czynnik konforemny f musi być skończony i różny od zera. Czyli dla $c = 0$ nie mamy rozwiązań na f .

- $c \neq 0$

W tym przypadku możemy napisać, że

$$n^A \partial_A = c \left(\left(x + \frac{a}{c} \right) \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) . \quad (4.97)$$

Dokonajmy transformacji $\tilde{x} = x + \frac{a}{c}$. Wtedy $n^A \partial_A$ przyjmie postać:

$$n^A \partial_A = c \left(\tilde{x} \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \right) , \quad (4.98)$$

zatem $n^A \partial_A$ jest polem obrotów i może być zapisane w postaci

$$n^A \partial_A = \Omega \frac{\partial}{\partial \tilde{\varphi}} . \quad (4.99)$$

□

Dowód tego samego faktu, ale wyrażony w innym formalizmie, zawarty jest w pracy [3].

4.5.2 Dowód tego, że lokalnie κ jest stała wzdłuż \vec{n}

Dokonyamy takiego przecechowania κ , aby była ona stała wzdłuż pola \vec{n} . W tym celu użyjemy pozostałej nam swobody w wyborze powierzchni początkowej i – co za tym idzie – wszystkich powierzchni $\{t = \text{const.}\}$. Dokonyamy zatem transformacji polegającej na tym, że współrzędne przestrzenne zachowujemy ($\tilde{x}^k = x^k$) a współrzędną czasową przesuamy o stałą zależną do współrzędnych przestrzennych. Na powierzchni S (gdzie $x^3 = \text{const.}$) daje to:

$$\tilde{x}^0 = x^0 + \alpha(x^A) . \quad (4.100)$$

Zgodnie z wzorami (3.15)–(3.21), mamy $\tilde{X} = cX$, gdzie

$$c = (1 - n^A \partial_A \alpha)^{-1} .$$

Tymczasem wielkości w_a – zgodnie ze wzorem (3.42) transformują się następująco:

$$\tilde{w}_a = w_a + \partial_a (\log c) . \quad (4.101)$$

Wobec tego mamy

$$\tilde{\kappa} = \tilde{X}^a \tilde{w}_a = c X^a \left(w_a + \frac{\partial_a c}{c} \right) = c\kappa + X(c) , \quad (4.102)$$

gdzie $X(c) = -\Omega \frac{\partial c}{\partial \varphi}$ (bo $X = \partial_0 - n^A \partial_A$, człon $n^A \partial_A$ możemy zastąpić wyrażeniem $\Omega \partial_\varphi$, a $\partial_0 c = 0$). Otrzymujemy zatem następujące równanie

$$\Omega \frac{\partial c}{\partial \varphi} - c\kappa + \tilde{\kappa} = 0 . \quad (4.103)$$

którego rozwiązaniem jest

$$c = - \int \frac{\tilde{\kappa}}{\Omega} e^{(-\Omega^{-1} \int \kappa d\varphi)} d\varphi . \quad (4.104)$$

Oznaczając przez

$$F(\theta, \varphi) = \int e^{(-\Omega^{-1} \int \kappa d\varphi)} d\varphi \quad (4.105)$$

otrzymujemy

$$c^{-1} = -\frac{\Omega}{\tilde{\kappa}} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\log F) . \quad (4.106)$$

Ale z drugiej strony:

$$c^{-1} = 1 - \frac{1}{\Omega \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi}} , \quad (4.107)$$

zatem:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} = \frac{1}{\Omega} + \frac{1}{\tilde{\kappa}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \log F . \quad (4.108)$$

Rozwiązaniem powyższego równania jest

$$\alpha = \frac{\varphi}{\Omega} + \frac{1}{\tilde{\kappa}} \log F , \quad (4.109)$$

gdzie

$$F(\varphi) = C_1 \left(\int_0^\varphi e^{(-\Omega^{-1} \int_0^u \kappa(s) ds)} du + C_2 \right) , \quad (4.110)$$

a C_1 i C_2 są stałymi całkowania. Z warunków cykliczności:

$$\alpha(0) = \alpha(2\pi) \quad (4.111)$$

$$\frac{d}{d\varphi} (\log F)(0) = \frac{d}{d\varphi} (\log F)(2\pi) \quad (4.112)$$

mamy, że

$$\tilde{\kappa} = \frac{\Omega}{2\pi} \log \frac{F(0)}{F(2\pi)} . \quad (4.113)$$

Wyznamy jeszcze wartoŃci $F(0)$ i $F(2\pi)$. Oznaczmy przez $f(\varphi)$ wyrażenie:

$$f(\varphi) := \int_0^\varphi e^{(-\Omega^{-1} \int_0^u \kappa(s) ds)} du . \quad (4.114)$$

Zatem F i $\log F$ są następującej postaci:

$$F = C_1(f + C_2) , \quad (4.115)$$

$$\log F = \log C_1 + \log(f + C_2) . \quad (4.116)$$

A więc:

$$\frac{f'(0)}{f(0) + C_3} = \frac{f'(2\pi)}{f(2\pi) + C_3} \text{ i } f(0) = 1 , \text{ stąd } C_3 = \frac{f(2\pi)}{f'(2\pi) - 1} , \quad (4.117)$$

mamy więc

$$\tilde{\kappa} = \frac{\Omega}{2\pi} \log \frac{C_3}{f(2\pi) + C_3} . \quad (4.118)$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\tilde{\kappa} = -\frac{\Omega}{2\pi} \log f'(2\pi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \kappa(s) ds . \quad (4.119)$$

Zatem dokonaliŃmy takiego przecechowania κ do $\tilde{\kappa}$, Źe jest ona stała na rownoleŹnikach sfery S^2 .

Rozdział 5

Materia świetlna

5.1 Tensor energii-pędu dla materii typu świetlnego. Tożsamość Belinfantego-Rosenfelda

Chcemy opisać oddziaływanie między cienką powłoką materii typu świetlnego a polem grawitacyjnym. Wszystkie własności materii opisane są za pomocą gęstości lagranżjanu L . Może ona zależeć od jakichś pól materii z^K żyjących na powierzchni zerowej S a także ich pierwszych pochodnych $z^K_a := \partial_a z^K$, oraz oczywiście od tensora metrycznego g_{ab} na S :

$$L = L(z^K; z^K_a; g_{ab}) . \quad (5.1)$$

Zakładamy, że L jest niezmienniczą gęstością skalarną na S . Z niezmienniczości lagranżjanu wynikają pewne dodatkowe warunki: tożsamość Belinfantego-Rosenfelda oraz twierdzenie Noether. Dla uproszczenia rozważań założymy, że pola materii z^K są czasoprzestrzennymi skalarami (p. [8, 20]). Oznacza to, że pochodna Liego $\mathcal{L}_Y z$ tych pól względem pola wektorowego Y na S jest w zasadzie pochodną cząstkową

$$(\mathcal{L}_Y z)^K = z^K_a Y^a .$$

Następujący lemat opisuje własności niezmienniczych lagranżjanów:

Lemat 5.2. *Gęstość lagranżjanu (5.1) skoncentrowana na zerowej hiperpowierzchni S jest niezmiennicza wtedy i tylko wtedy, jeśli jest ona następującej postaci:*

$$L = v_X f(z; \mathcal{L}_X z; g) , \quad (5.2)$$

gdzie X jest dowolnym polem degeneracji metryki g_{ab} na S , a $f(\cdot; \cdot; \cdot)$ jest funkcją skalarną jednorodną stopnia pierwszego względem jej drugiej zmiennej.

Uwaga: Z jednorodności funkcji f względem $\mathcal{L}_X z$ wynika, że powyższa wielkość nie zależy od szczególnego wyboru pola degeneracji X .

Dowód lematu (5.2). Ponieważ lagranżjan materii (5.1) jest niezmienniczą gęstością tensorową, jego wartość może być liczona w dowolnym układzie współrzędnych. Dla potrzeb naszego dowodu ograniczmy się do lokalnego układu współrzędnych (x^a) na S , który jest zgodny z degeneracją metryki, tzn. pole $X := \partial_0$ jest zerowe.

Przypuśćmy, że (x^a) i (y^a) są dwoma takimi układami współrzędnych w otoczeniu punktu $x \in S$. Co więcej, przypuśćmy, że oba wektory ∂_0 są sobie równe. Łatwo sprawdzić, że stąd wynika następująca macierz transformacji między tymi układami

$$y^A = y^A(x^B), \quad (5.3)$$

$$y^0 = x^0 + \psi(x^A). \quad (5.4)$$

Trójwymiarowy jacobian takiej transformacji jest równy dwuwymiarowemu: $\det(\partial y^A / \partial x^B)$. Zauważmy, że dwuwymiarowa część g_{AB} metryki g_{ab} transformuje się zgodnie z tą dwuwymiarową macierzą, a więc jej wyznacznik λ jest wymnażany przez ten sam dwuwymiarowy jacobian podczas przejścia z układu (x^a) do (y^a) . Tak samo element objętości v_X . To znaczy, że funkcja zdefiniowana następująco

$$f := \frac{L}{v_X}, \quad (5.5)$$

nie zmienia wartości podczas takiej transformacji. W zasadzie mamy:

$$f = f(z^K; z^K_0; z^K_A; g_{ab}), \quad (5.6)$$

ale pokażemy, że f nie zależy od pochodnych z^K_A . W tym celu wprowadźmy nowe współrzędne:

$$y^A = x^A, \quad (5.7)$$

$$y^0 = x^0 - \epsilon_1 x^1 - \epsilon_2 x^2. \quad (5.8)$$

Stąd:

$$\frac{\partial}{\partial y^A} = \frac{\partial}{\partial x^A} + \epsilon_A \frac{\partial}{\partial x^0}.$$

Podczas przejścia z układu (x^a) do (y^a) , wartość z^K_A zmieni się na $z^K_A + \epsilon_A z^K_0$, podczas gdy pozostałe zmienne funkcji (5.6) (a także jej wartość) nie zmieniają się. Stąd mamy następujący wzór:

$$f(z^K; z^K_0; z^K_A; g_{ab}) = f(z^K; z^K_0; z^K_A + \epsilon_A z^K_0; g_{ab}), \quad (5.9)$$

który musi być prawdziwy dla każdej konfiguracji pola z^K . Zatem taka funkcja nie może zależeć od z^K_A ! Ale w naszym układzie współrzędnych $z^K_0 = z^K_a X^a = \mathcal{L}_X z^K$. A więc pokazaliśmy, że

$$f = f(z^K; \mathcal{L}_X z^K; g_{ab}). \quad (5.10)$$

Rezygnując z warunku (5.4) i dopuszczając dowolną współrzędną czasową y^0 , widzimy, że zależność wyrażenia (5.10) od jego drugiej zmiennej musi kasować (jednorodnie stopnia -1) zależność gęstości v_X od pola X we wzorze (5.2). Co pokazuje, że f musi być jednorodna stopnia pierwszego w swojej drugiej zmiennej $\mathcal{L}_X z^K$. \square

Dynamika opisywanej materii jest określona przez jej kanoniczny tensor energii-pędu zdefiniowany następująco:

$$T^a_b := \frac{\partial L}{\partial z^K_a} z^K_b - \delta^a_b L . \quad (5.11)$$

Jest on symetryczny w sensie poniższego stwierdzenia:

Stwierdzenie 2. *Kanoniczny tensor energii-pędu T^a_b skonstruowany z niezmienniczej gęstości lagranżjanu, spełnia równania (3.47) oraz (3.48), tzn. zachodzi:*

$$T^a_b X^b = 0 \quad \text{i} \quad T_{ab} = T_{ba} . \quad (5.12)$$

Dowód: Weźmy gęstość lagranżjanu (5.2). Mamy wtedy:

$$T^a_b = \frac{\partial L}{\partial z^K_a} z^K_b - \delta^a_b L = v_X \left(X^a \frac{\partial f}{\partial (z^K_d X^d)} z^K_b - \delta^a_b f \right) , \quad (5.13)$$

i stąd dostajemy

$$T_{ab} = T^c_b g_{ca} = -v_X f g_{ab} = T_{ba} . \quad (5.14)$$

Z jednorodności f względem $(z^K_d X^d)$ mamy:

$$T^a_b X^b = v_X X^a \left(\frac{\partial f}{\partial (z^K_d X^d)} (z^K_b X^b) - f \right) = 0 . \quad (5.15)$$

□

W przypadku niezdegenerowanej geometrii S można rozważyć także symetryczny tensor energii-pędu τ^{ab} :

$$\tau^{ab} := 2 \frac{\partial L}{\partial g_{ab}} . \quad (5.16)$$

W naszym przypadku zdegenerowana metryka spełnia więzy $\det g_{ab} \equiv 0$. Zatem powyższa wielkość nie jest zdefiniowana jednoznacznie. Możemy jednak spróbować ją zdefiniować z dokładnością do anihilatora tych więzów. Łatwo sprawdzić, że ten anihilator jest postaci $C X^a X^b$. Zatem dowolność w definicji symetrycznego tensora energii-pędu jest dokładnie taka sama jak dowolność definicji T^{ab} . Ta dowolność znika po obniżeniu jednego wskaźnika. Udowodnimy w następnym twierdzeniu, że jeśli są spełnione równania pola, składowe kanonicznego i symetrycznego tensora energii-pędu są sobie równe¹. Jest to analogiczne do standardowej tożsamości Belinfantego-Rosenfelda ([5]). Co więcej zachodzi także „twierdzenie” Noether, czyli znikanie dywergencji T . Zapiszemy to w następujący sposób:

¹W przyjętej przez nas konwencji energia jest opisywana wyrażeniem $H = T^0_0 = p_K^0 \dot{z}^K - L \geq 0$, analogicznie do $H = pq - L$ w mechanice, i może być łatwo uogólniona do potrzeb hamiltonianu. Jest to trochę inna konwencja od tej używanej np. w książce [24], gdzie energia jest zadana przez T_{00} . Aby mieć ciągle standardową postać równań Einsteina, przyjmujemy standardową definicję symetrycznego tensora energii-pędu τ^a_b . Dlatego właśnie tożsamość Belinfantego-Rosenfelda ma postać $\tau^a_b = -T^a_b$.

Stwierdzenie 3. Niech L będzie niezmienniczym lagranżjanem, oraz niech pola z^K spełniają równania Eulera-Lagrange'a:

$$\frac{\partial L}{\partial z^K} - \partial_a \frac{\partial L}{\partial z^K_a} = 0 , \quad (5.17)$$

wtedy zachodzą poniższe fakty:

1. Tożsamość Belinfantego-Rosenfelda: składowe kanonicznego tensora energii-pędu T^a_b są równe (z dokładnością do znaku wynikającego z konwencji) składowym symetrycznego tensora energii-pędu τ^{ab} :

$$T^a_b = -\tau^{ac} g_{cb} , \quad (5.18)$$

2. Twierdzenie Noether:

$$\bar{\nabla}_a T^a_b = 0 . \quad (5.19)$$

Dowód: Niezmienniczość lagranżjanu względem dyfeomorfizmów czasoprzestrzeni generowanych za pomocą pola Y na S oznacza, że transport zmiennych $(z; \partial z; g)$, których funkcją jest L , wzdłuż Y , daje taki sam wynik jak transport wartości L na S :

$$\frac{\partial L}{\partial z^K} (\mathcal{L}_Y z)^K + \frac{\partial L}{\partial z^K_a} (\mathcal{L}_Y z)^K_a + \frac{\partial L}{\partial g_{ac}} (\mathcal{L}_Y g)_{ac} = \mathcal{L}_Y L . \quad (5.20)$$

Weźmy dla uproszczenia $Y = \frac{\partial}{\partial x^b}$ (tzn. $Y^a = \delta^a_b$). Mamy więc: $(\mathcal{L}_Y z)^K_a = z^K_{ba} = z^K_{ab}$. Stosując ten wzór i dokonując paru elementarnych przekształceń otrzymujemy:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial z^K} - \partial_a \frac{\partial L}{\partial z^K_a} \right) z^K_b + \partial_a \left(\frac{\partial L}{\partial z^K_a} z^K_b - \delta^a_b L \right) + \frac{\partial L}{\partial g_{ac}} g_{ac,b} = 0 . \quad (5.21)$$

Z równań Eulera-Lagrange'a (5.17) i definicji (5.11) oraz (5.16) obu tensorów energii-pędu, powyższy wzór redukuje się do następującego wyrażenia:

$$\partial_a T^a_b + \frac{1}{2} \tau^{ac} g_{ac,b} = 0 . \quad (5.22)$$

Nasz dowód tego wzoru jest prawdziwy w dowolnym układzie współrzędnych. W szczególności możemy użyć takiego układu, w którym wszystkie pochodne cząstkowe tensora metrycznego znikają w danym punkcie $x \in S$. W tym układzie mamy:

$$\bar{\nabla}_a T^a_b(x) = \partial_a T^a_b(x) = 0 .$$

Ale $\bar{\nabla}_a T^a_b(x) = 0$ jest wyrażeniem niezależnym od wyboru układu odniesienia. Udowodnione w jednym układzie, jest prawdziwe w każdym innym. Powtarzając to rozumowanie dla wszystkich punktów $x \in S$ po kolei, pokazujemy twierdzenie Noether (5.19). Odejmując (5.22) od (5.19) otrzymujemy

$$T^{ab} g_{ab,c} = -\tau^{ab} g_{ab,c} ,$$

co musi zachodzić w dowolnym układzie odniesienia. Zatem zarówno T^{ab} jak i τ^{ab} są zdefiniowane z dokładnością do członu postaci CX^aX^b , znikającego po zwięźeniu z $g_{ab,c}$. W standardowej pseudoriemannowskiej niezdegenerowanej metryce pochodne $g_{ab,c}$ mogą być wybrane dowolnie w każdym z punktów z osobna, co automatycznie daje tożsamość Belinfantego-Rosenfelda $T = -\tau$. W naszym przypadku dowolność wyboru tych pochodnych jest ograniczona więzami $\det g_{ab} = 0$. Jest to jedyne ograniczenie, a więc tożsamość Belinfantego-Rosenfelda zachodzi z dokładnością do anihilatora tych więzów, a więc w formie (5.18). □

5.2 Niejednoznaczność w wyborze układu odniesienia

Zauważmy, że przypadku geometrii niezdegenerowanej znikanie pochodnych tensora metrycznego w jakimś punkcie x definiuje jednoznacznie lokalny inercjalny układ odniesienia w punkcie x . Jeśli każdy z dwóch układów odniesienia (x^a) i (y^a) spełnia w punkcie x warunek znikania pierwszych pochodnych tensora metrycznego w tym układzie, drugie pochodne x^a względem y^b znikają tożsamościowo w tym punkcie. Zatem pochodne kowariantne mogą być zdefiniowane jako pochodne cząstkowe, ale liczone względem inercjalnego układu odniesienia, tzn. dowolnego układu z tej samej klasy układów.

W przypadku zdegenerowanym, znikanie pochodnych tensora metrycznego nie zadaje jednoznacznie inercjalnego układu odniesienia. Możemy mieć dwa układy współrzędnych (x^a) i (y^a) takie, że w każdym z nich znika $g_{ab,c}$ w x , ale

$$\frac{\partial^2 y^a}{\partial x^b \partial x^c}(x) \neq 0 .$$

Dlatego właśnie jakakolwiek próba zdefiniowania pochodnej kowariantnej dowolnego tensora na S musi się skończyć niepowodzeniem. Ta nieokreśloność może być jednak zneutralizowana dodatkowymi własnościami algebraicznymi, które posiada tensor energii-pędu, a dokładnie wzorami (3.47) oraz (3.48). To pozwala zdefiniować nam w sposób jednoznaczny dywergencję wielkości tensorowych typu tensor energii-pędu, za pomocą wzoru (3.53).

Dokonajmy przejścia ze zdegenerowanego układu współrzędnych do układu, gdzie znikają wszystkie pochodne tensora metrycznego:

$$\begin{aligned} 0 = g_{\tilde{a}\tilde{b},\tilde{c}} &= \frac{\partial x^a}{\partial y^{\tilde{a}}} \frac{\partial x^b}{\partial y^{\tilde{b}}} \frac{\partial x^c}{\partial y^{\tilde{c}}} \frac{\partial}{\partial x^c} g_{ab} + \frac{\partial x^c}{\partial y^{\tilde{c}}} \frac{\partial}{\partial x^c} \left(\frac{\partial x^a}{\partial y^{\tilde{a}}} \frac{\partial x^b}{\partial y^{\tilde{b}}} \right) g_{ab} \\ &= \frac{\partial x^a}{\partial y^{\tilde{a}}} \frac{\partial x^b}{\partial y^{\tilde{b}}} \frac{\partial x^c}{\partial y^{\tilde{c}}} \frac{\partial}{\partial x^c} g_{ab} + \left(\frac{\partial x^a}{\partial y^{\tilde{a}}} \frac{\partial^2 x^b}{\partial y^{\tilde{c}} \partial y^{\tilde{b}}} + \frac{\partial x^a}{\partial y^{\tilde{b}}} \frac{\partial^2 x^b}{\partial y^{\tilde{c}} \partial y^{\tilde{a}}} \right) g_{ab} \end{aligned} \quad (5.23)$$

Człon $\frac{\partial x^a}{\partial y^{\tilde{a}}} \frac{\partial x^b}{\partial y^{\tilde{b}}} \frac{\partial x^c}{\partial y^{\tilde{c}}} \frac{\partial}{\partial x^c} g_{ab}$ jest dobrze określony przy przejściu do układu współrzędnych, w którym $g_{\tilde{a}\tilde{b},\tilde{c}} = 0$. Dowolność mamy dopiero w drugich pochodnych $\frac{\partial^2 x^a}{\partial y^{\tilde{b}} \partial y^{\tilde{c}}}$, które nie są określone jednoznacznie. Pokażemy teraz, że ze względu na nieodwracalność g_{ab} nie

możemy określić drugich pochodnych macierzy przejścia. W tym celu wybierzmy jakiś punkt x_0^a gdzie te dwa układy współrzędnych (x^a) i $(y^{\tilde{a}})$ pokrywają się, a więc:

$$x_0^a = \delta^a_{\tilde{a}} y_0^{\tilde{a}} .$$

W otoczeniu tego punktu dokonajmy rozwinięcia w szereg współrzędnej x^a względem $(y^{\tilde{a}})$:

$$x^a = \delta^a_{\tilde{a}} y^{\tilde{a}} + \frac{1}{2} F_{\tilde{b}\tilde{c}}^a y^{\tilde{b}} y^{\tilde{c}} + \mathcal{O}(y^3) ,$$

gdzie $F_{\tilde{b}\tilde{c}}^a$ ma takie samo znaczenie jak drugie pochodne, które w tym przypadku nie są zdefiniowane jednoznacznie. Mamy więc

$$-\frac{\partial x^a}{\partial y^{\tilde{a}}} \frac{\partial x^b}{\partial y^{\tilde{b}}} \frac{\partial x^c}{\partial y^{\tilde{c}}} \frac{\partial}{\partial x^c} g_{ab} = \frac{1}{2} g_{ab} (\delta^a_{\tilde{a}} F_{\tilde{b}\tilde{c}}^b + \delta^b_{\tilde{b}} F_{\tilde{a}\tilde{c}}^a) \quad (5.24)$$

Ponieważ wyrażenie stojące po lewej stronie powyższego równania nie jest zadane jednoznacznie, możemy dodać do „drugich pochodnych” $F_{\tilde{b}\tilde{c}}^a$ dowolne wyrażenie typu $X^a \omega_{\tilde{b}\tilde{c}}$, gdzie $\omega_{\tilde{b}\tilde{c}}$ jest jakimś dowolnym symetrycznym obiektem. Zatem dowolność w wyborze układu współrzędnych jest zadana przez $x^a + X^a \omega_{\tilde{b}\tilde{c}} y^{\tilde{b}} y^{\tilde{c}}$.

5.3 Przykłady niezmienniczych gęstości lagranżjanu

Weźmy trójwymiarową rozmaitość czasoprzestrzenną oraz układ współrzędnych x^a , $a = 0, 1, 2$. Na tej rozmaitości wprowadźmy pole wektorowe $X^a = (X^0, X^A)$, $A = 1, 2$, takie, że

$$g_{ab} X^b = 0 , \quad (5.25)$$

$$X^0 = 1 . \quad (5.26)$$

Rozwiązanie powyższego układu jest następujące:

$$X^0 = 1 , \quad (5.27)$$

$$X^B = -g_{A0} \tilde{g}^{AB} , \quad (5.28)$$

gdzie \tilde{g}^{AB} oznacza dwuwymiarową metrykę odwrotną do g_{AB} .

Pole to odpowiada polu X^a wprowadzonemu w rozdziale 3.1, będącemu obcięciem pola X^μ do S . W tym rozdziale przyjmujemy $X(x^0) = 1$.

Przykład 1

Rozważmy ośrodek „elastyczny” opisany za pomocą zmiennych materiałowych z^A , $A = 1, 2$. Metryka materialna jest oznaczana przez γ_{AB} . Weźmy także następującą przykładową gęstość lagranżjanu:

$$L = \lambda (X^a z_{,a}^K X^b z_{,b}^L \gamma_{KL}(z^A))^\alpha (X^c \xi_{,c})^\beta , \quad (5.29)$$

taką, że $2\alpha + \beta = 1$ i $\lambda = \sqrt{\det g_{AB}}$. Przez ξ oznaczyliśmy dodatkowe pole skalarne. Zapiszmy pole X^a w postaci (5.27), mamy wtedy:

$$L = \lambda \left\{ \left((z^K)^\cdot - g_{C0} \tilde{g}^{CD} z_{,D}^K \right) \left((z^L)^\cdot - g_{E0} \tilde{g}^{EF} z_{,F}^L \right) \gamma_{KL}(z) \right\}^\alpha \left(\xi^\cdot - g_{I0} \tilde{g}^{IJ} \xi_{,J} \right)^\beta, \quad (5.30)$$

gdzie $(\)^\cdot$ oznacza pochodną czasową.

Kanoniczny tensor energii-pędu T^a_b jest następujący

$$T^a_b = \frac{\partial L}{\partial z^N_{,a}} z^N_{,b} + \frac{\partial L}{\partial \xi_{,a}} \xi_{,b} - \delta^a_b L. \quad (5.31)$$

Mamy:

$$\frac{\partial L}{\partial z^N_{,a}} = \lambda \alpha \left(X^c z^K_{,c} X^d z^L_{,d} \gamma_{KL}(z^A) \right)^{\alpha-1} \left(X^f \xi_{,f} \right)^\beta 2X^a X^c z^M_{,c} \gamma_{MN}, \quad (5.32)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \xi_{,a}} = \lambda \beta \left(X^c z^K_{,c} X^d z^L_{,d} \gamma_{KL}(z) \right)^\alpha \left(X^f \xi_{,f} \right)^{\beta-1} X^a. \quad (5.33)$$

Stąd

$$T^a_b = \lambda \left(X^c z^K_{,c} X^d z^L_{,d} \gamma_{KL}(z^A) \right)^{\alpha-1} \left(X^f \xi_{,f} \right)^{\beta-1} X^c z^M_{,c} \gamma_{MN} \quad (5.34)$$

$$\times \left(2\alpha X^a z^N_{,b} X^f \xi_{,f} + \beta X^d z^N_{,d} X^a \xi_{,b} - \delta^a_b X^d z^N_{,d} X^f \xi_{,f} \right). \quad (5.35)$$

Wyznamy teraz symetryczny tensor energii-pędu τ^{ab} :

$$\tau^{ab} = 2 \frac{\partial L}{\partial g_{ab}}. \quad (5.36)$$

Mamy, że

$$\frac{\partial L}{\partial g_{00}} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial g_{0A}} &= \frac{1}{2} \lambda \left\{ \left((z^K)^\cdot - g_{C0} \tilde{g}^{CD} z_{,D}^K \right) \left((z^L)^\cdot - g_{E0} \tilde{g}^{EF} z_{,F}^L \right) \gamma_{KL}(z) \right\}^{\alpha-1} \left(\xi^\cdot - g_{I0} \tilde{g}^{IJ} \xi_{,J} \right)^{\beta-1} \\ &\quad \gamma_{MN} \left\{ \alpha \left(-\tilde{g}^{AD} \left(z^M_{,D} (z^N)^\cdot + z^N_{,D} (z^M)^\cdot \right) + \tilde{g}^{CD} \tilde{g}^{EF} z^M_{,D} z^N_{,F} \left(g_{E0} \delta^A_C + g_{C0} \delta^A_E \right) \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left(\xi^\cdot - g_{I0} \tilde{g}^{IJ} \xi_{,J} \right) - \beta \tilde{g}^{AJ} \xi_{,J} \left((z^M)^\cdot - g_{C0} \tilde{g}^{CD} z^M_{,D} \right) \left((z^N)^\cdot - g_{E0} \tilde{g}^{EF} z^N_{,F} \right) \gamma_{MN}(z) \right\}. \end{aligned}$$

Składowa τ^0_b wynosi:

$$\begin{aligned} \tau^0_b &= \tau^{00} g_{0b} + \tau^{0A} g_{Ab} = \tau^{0A} g_{Ab} = -\lambda \left(X^a z^K_{,a} X^b z^L_{,b} \gamma_{KL}(z) \right)^{\alpha-1} \left(X^c \xi_{,c} \right)^{\beta-1} \\ &\quad \gamma_{MN} \left(\tilde{g}^{AD} z^M_{,D} X^c z^N_{,c} + \tilde{g}^{AD} z^N_{,D} X^c z^M_{,c} \right) X^f \xi_{,f} + \beta \tilde{g}^{AJ} \xi_{,J} X^c X^d z^M_{,c} z^N_{,d} g_{Ab}, \quad (5.37) \end{aligned}$$

przy czym $\tau^{00} = 0$. Korzystając z tego, że

$$g_{Ab} = g_{0A} \delta^0_b + g_{CA} \delta_b^C$$

możemy wyznaczyć τ^0_b :

$$\begin{aligned}
\tau^0_b &= -\lambda (X^a z^K_{,a} X^b z^L_{,b} \gamma_{KL}(z))^{\alpha-1} (X^c \xi_{,c})^{\beta-1} \\
&\quad \gamma_{MN} \{ \alpha (-\delta^0_b X^D z^M_{,D} + \delta^D_b z^M_{,D}) X^c z^N_{,c} X^f \xi_{,f} \\
&\quad + \alpha (-\delta^0_b X^D z^N_{,D} + \delta^b N z^B_{,D}) X^c z^M_{,c} X^f \xi_{,f} \\
&\quad + \beta (-\delta^0_b X^J + \delta^J_b) \xi_{,J} X^c X^d z^M_{,c} z^N_{,d} \} \\
&= -\lambda (X^a z^K_{,a} X^b z^L_{,b} \gamma_{KL}(z^A))^{\alpha-1} (X^c \xi_{,c})^{\beta-1} \gamma_{MN} \\
&\quad \{ -\delta^0_b (2\alpha + \beta) X^c X^d z^M_{,c} z^N_{,d} X^f \xi_{,f} \\
&\quad + \alpha \delta^0_b ((z^M) \cdot z^N_{,d} + (z^N) \cdot z^M_{,d}) X^d X^f \xi_{,f} + \beta \delta^0_b (\xi) \cdot X^c X^d z^M_{,c} z^N_{,d} \\
&\quad + \alpha \delta^D_b (z^M_{,D} z^N_{,c} + z^N_{,D} z^M_{,c}) X^f \xi_{,f} + \beta \delta^J_b \xi_{,J} X^c X^d z^M_{,c} z^N_{,d} \} . \tag{5.38}
\end{aligned}$$

Uwzględniając poniższą tożsamość;

$$\delta^0_b (z^K) \cdot + \delta^D_b z^K_{,D} = \delta^d_b z^K_{,d} = X^0 z^K_{,b}$$

oraz założenie, że $2\alpha + \beta = 1$, otrzymujemy składową T^0_b (ze znakiem „minus”!) kanonicznego tensora energii-pędu.

Aby obliczyć τ^{AB} skorzystajmy z faktu, że

$$\frac{\partial \lambda}{\partial g_{AB}} = \frac{1}{2} \lambda \tilde{g}^{AB}$$

oraz z tożsamości

$$d\tilde{g}^{CD} = -\tilde{g}^{AC} \tilde{g}^{BD} dg_{AB} .$$

Otrzymujemy wtedy

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial g_{AB}} &= \frac{1}{2} \lambda (X^a z^K_{,a} X^b z^L_{,b} \gamma_{KL}(z))^{\alpha-1} (X^c \xi_{,c})^{\beta-1} \gamma_{MN} \\
&\quad \times \{ X^c X^d z^M_{,c} z^N_{,d} (\tilde{g}^{AB} X^f \xi_{,f} + \beta (\tilde{g}^{AI} \tilde{g}^{BJ} + \tilde{g}^{AJ} \tilde{g}^{BI}) g_{I0} \xi_{,J}) \\
&\quad + 2\alpha (\tilde{g}^{AC} \tilde{g}^{BD} + \tilde{g}^{AD} \tilde{g}^{BC}) g_{C0} z^M_{,D} X^c z^N_{,c} X^f \xi_{,f} \} \tag{5.39}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \tau^{AB} . \tag{5.40}$$

Wyznamy teraz składową τ^A_i :

$$\tau^A_i = \tau^{Ab} g_{bi} = \tau^{A0} g_{0i} + \tau^{AB} g_{Bi} ,$$

korzystając z tożsamości

$$g_{Bi} = g_{Bj} \delta^j_i = g_{BC} \delta^C_i + g_{B0} \delta^0_i$$

oraz jej konsekwencji

$$\tilde{g}^{BD} g_{Bi} = \delta^D_i + \tilde{g}^{BD} g_{B0} \delta^0_i .$$

Mamy wtedy

$$\begin{aligned}
\tau^{AB} g_{Bi} &= -\lambda (X^a z_{,a}^K X^b z_{,b}^L \gamma_{KL}(z^A))^{\alpha-1} (X^c \xi_{,c})^{\beta-1} \gamma_{MN} \\
&\times \{ -X^c X^d z_{,c}^M z_{,d}^N ((\delta_i^A + \tilde{g}^{AB} g_{B0} \delta_i^0) X^f \xi_{,f} \\
&+ \beta (\tilde{g}^{AI} (\delta_i^J + \tilde{g}^{JB} g_{B0} \delta_i^0) + \tilde{g}^{AJ} (\delta_i^I + \tilde{g}^{IB} g_{B0} \delta_i^0)) g_{I0} \xi_{,J}) \\
&- 2\alpha (\tilde{g}^{AC} (\delta_i^D + \tilde{g}^{DB} g_{B0} \delta_i^0) + \tilde{g}^{AD} (\delta_i^C + \tilde{g}^{CB} g_{B0} \delta_i^0)) g_{C0} z_{,D}^M X^d z_{,d}^N X^f \xi_{,f} \} \\
&= -\lambda (X^a z_{,a}^K X^b z_{,b}^L \gamma_{KL}(z^A))^{\alpha-1} (X^c \xi_{,c})^{\beta-1} \gamma_{MN} \\
&\times (-(\delta_i^A - \delta_i^0 X^A) X^c X^d z_{,c}^M z_{,d}^N X^f \xi_{,f} \\
&- \beta (-X^A \xi_{,i} + \delta_i^0 X^A X^f \xi_{,f} + \tilde{g}^{AJ} \xi_{,J} g_{0i}) X^c X^d z_{,c}^M z_{,d}^N \\
&- \alpha (-X^A z_{,i}^M + \delta_i^0 X^A X^c z_{,c}^M + \tilde{g}^{AD} z_{,D}^M g_{i0}) X^d z_{,d}^N X^f \xi_{,f}) . \tag{5.41}
\end{aligned}$$

Zbierając razem człony $\tau^{A0} g_{0i}$ i $\tau^{AB} g_{Bi}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\tau^A_i &= -\lambda (X^a z_{,a}^K X^b z_{,b}^L \gamma_{KL}(z^A))^{\alpha-1} (X^c \xi_{,c})^{\beta-1} \gamma_{MN} \\
&\times (2\alpha g_{0i} \tilde{g}^{AD} z_{,d}^M X^c z_{,c}^N X^f \xi_{,f} + \beta \tilde{g}^{AL} \xi_{,L} g_{0i} X^c X^d z_{,c}^M z_{,d}^N \\
&- \beta \tilde{g}^{AL} \xi_{,L} g_{0i} X^c X^d z_{,c}^M z_{,d}^N - 2\alpha g_{0i} \tilde{g}^{AD} z_{,d}^M X^c z_{,c}^N X^f \xi_{,f} \\
&+ \beta X^A \xi_{,i} X^c X^d z_{,c}^M z_{,d}^N + 2\alpha X^A z_{,i}^M X^d z_{,d}^N X^f \xi_{,f} \\
&- \delta_i^A X^c X^d z_{,c}^M z_{,d}^N X^f \xi_{,f} + \delta_i^0 X^A X^c X^d z_{,c}^M z_{,d}^N X^f \xi_{,f} \\
&- \delta_i^0 X^A (2\alpha + \beta) X^c X^d z_{,c}^M z_{,d}^N X^f \xi_{,f}) . \tag{5.42}
\end{aligned}$$

Uwzględniając związek między α i β : $2\alpha + \beta = 1$, mamy ostatecznie

$$\tau^A_i = -T^A_i .$$

Przykład 2

Weźmy lagranżjan o dwóch stopniach swobody, z którego będziemy intensywnie korzystać w rozdziale 7:

$$L = \lambda X^a z_{,a}^K F_K(z^K) , \tag{5.43}$$

$K = 1, 2$, z^K są zmiennymi materiałowymi, a F_K jakimiś skalarnymi funkcjami tych zmiennych.

Dokonując $(2+1)$ -dekompozycji pola X otrzymujemy powyższy lagranżjan w następującej postaci:

$$L = \lambda \left((z^K) - g_{C0} \tilde{g}^{CD} z_{,D}^K \right) F_K . \tag{5.44}$$

Pędy uogólnione są równe:

$$p^a_K = \frac{\partial L}{\partial z_{,a}^K} = \lambda X^a F_K , \tag{5.45}$$

a kanoniczny tensor energii pędu T^a_b wynosi:

$$T^a_b = \lambda X^a z_{,b}^K F_K - \delta^a_b \lambda X^a z_{,a}^K F_K . \tag{5.46}$$

Policzmy teraz symetryczny tensor energii-pędu τ^{ab} :

$$\tau^{ab} = 2 \frac{\partial L}{\partial g_{ab}} . \quad (5.47)$$

Mamy, że

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial g_{00}} &= 0 , \\ \frac{\partial L}{\partial g_{0C}} &= -\lambda \tilde{g}^{CD} z^K{}_{,D} F_K . \end{aligned}$$

Zatem składowa $\tau^0{}_b$ wynosi:

$$\tau^0{}_b = \tau^{00} g_{0b} + \tau^{0C} g_{Cb} = \tau^{0C} g_{Cb} = -\lambda \tilde{g}^{CD} z^K{}_{,D} F_K g_{Cb} , \quad (5.48)$$

ponieważ $\tau^{00} = 0$. Korzystając z tego, że

$$g_{Ab} = g_{0A} \delta^0{}_b + g_{CA} \delta_b{}^C$$

możemy wyznaczyć $\tau^0{}_b$:

$$\begin{aligned} \tau^0{}_b &= -\lambda \tilde{g}^{CD} (g_{0C} \delta^0{}_b + g_{AC} \delta^A{}_b) z^K{}_{,D} F_K = \lambda (\delta^0{}_b X^D - \tilde{g}^{CD} g_{AC} \delta^A{}_b) z^K{}_{,D} F_K \\ &= \lambda (\delta^0{}_b X^d z^K{}_{,d} F_K - \delta^0{}_b (z^K) \cdot F_K - \delta^D{}_b z^K{}_{,d} F_K) . \end{aligned}$$

Uwzględniając tożsamość:

$$\delta^0{}_b (z^K) \cdot + \delta^D{}_b z^K{}_{,D} = \delta^d{}_b z^K{}_{,d} = X^0 z^K{}_{,b}$$

otrzymujemy więc składową $T^0{}_b$ (ze znakiem „minus”) kanonicznego tensora energii-pędu.

Aby obliczyć τ^{AB} skorzystamy tak jak w poprzednim przykładzie z faktu, że

$$\frac{\partial \lambda}{\partial g_{AB}} = \frac{1}{2} \lambda \tilde{g}^{AB}$$

oraz z tożsamości

$$d\tilde{g}^{CD} = -\tilde{g}^{AC} \tilde{g}^{BD} dg_{AB} .$$

Otrzymujemy wtedy

$$\frac{\partial L}{\partial g_{AB}} = \frac{1}{2} \lambda \tilde{g}^{AB} X^a z^K{}_{,a} F_K - \frac{1}{2} \lambda (\tilde{g}^{AC} \tilde{g}^{BD} + \tilde{g}^{AD} \tilde{g}^{BC}) g_{C0} z^K{}_{,D} F_K = \frac{1}{2} \tau^{AB} . \quad (5.49)$$

Wyznamy składową $\tau^A{}_i$:

$$\tau^A{}_i = \tau^{Ab} g_{bi} = \tau^{A0} g_{0i} + \tau^{AB} g_{Bi} ,$$

korzystając z tożsamości podanej w poprzednim przykładzie

$$g_{Bi} = g_{Bj}\delta_i^j = g_{BC}\delta_i^C + g_{B0}\delta_i^0$$

oraz jej konsekwencji

$$\tilde{g}^{BD}g_{Bi} = \delta_i^D + \tilde{g}^{BD}g_{B0}\delta_i^0.$$

Mamy wtedy

$$\begin{aligned} \tau^{AB}g_{Bi} &= \lambda(\delta_i^A + \tilde{g}^{AB}g_{B0}\delta_i^0)X^a z^K_{,a}F_K \\ &\quad + \lambda(\tilde{g}^{AC}(\delta_i^D + \tilde{g}^{BD}g_{B0}\delta_i^0) + \tilde{g}^{AD}(\delta_i^C + \tilde{g}^{BC}g_{B0}\delta_i^0))g_{C0}z^K_{,D}F_K \\ &= \lambda((\delta_i^A + \tilde{g}^{AB}g_{B0}\delta_i^0)X^a z^K_{,a}F_K + \lambda(-X^A z^K_{,i} + \delta_i^0 X^A X^d z^K_{,d} + \tilde{g}^{AD}z^K_{,D}g_{0i})F_K). \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} \tau^A_i &= -\lambda\tilde{g}^{AD}z^K_{,D}F_K g_{0i} \\ &\quad + \lambda((\delta_i^A + \tilde{g}^{AB}g_{B0}\delta_i^0)X^a z^K_{,a}F_K + \lambda(-X^A z^K_{,i} + \delta_i^0 X^A X^d z^K_{,d} + \tilde{g}^{AD}z^K_{,D}g_{0i})F_K) \\ &= \lambda(\delta_i^A X^a z^K_{,a}F_K - X^A z^K_{,i}F_K) \end{aligned}$$

i otrzymaliśmy

$$\tau^A_i = -T^A_i.$$

Rozdział 6

Dynamika samograwitującej powłoki materii świetlnej

6.1 Dynamika powłoki materii zerowej

Rozważmy dynamikę zerowej powłoki materialnej oddziałującej z polem grawitacyjnym. Dynamika ta zostanie wyprowadzona z zasady najmniejszego działania $\delta\mathcal{A} = 0$, gdzie działanie

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\text{graw}}^{\text{reg}} + \mathcal{A}_{\text{graw}}^{\text{sing}} + \mathcal{A}_{\text{mat}} , \quad (6.1)$$

jest sumą działania grawitacyjnego $\mathcal{A}_{\text{graw}}$ i działania materii \mathcal{A}_{mat} . W szczególności wszystkie wyniki tego rozdziału stosują się do przypadku bez materii, gdy $\mathcal{A}_{\text{mat}} \equiv 0$. Inaczej niż dla powierzchni „czasowo-przestrzennej” – o niezdegenerowanej metryce wewnętrznej, nawet w takim przypadku nieobecności teoria dopuszcza nieciągłości pochodnych metryki, które propagują się po froncie świetlnym i opisują sytuację, którą moglibyśmy nazwać „grawitacyjną falą uderzeniową”.

Działanie grawitacyjne jest zdefiniowane jako całka z lagranżjanu Hilberta $L_{\text{graw}} = 1/(16\pi)\sqrt{|g|} R$. Dzieli się on na część regularną i osobliwą:

$$L_{\text{graw}} = \frac{1}{16\pi} \sqrt{|g|} R = \frac{1}{16\pi} \sqrt{|g|} (\text{reg}(R) + \text{sing}(R)) = L_{\text{graw}}^{\text{reg}} + L_{\text{graw}}^{\text{sing}} . \quad (6.2)$$

Korzystając ze wzorów (3.72)–(3.82) możemy wyrazić osobliwą część R za pomocą osobliwej części tensora Einsteina:

$$\sqrt{|g|} \text{sing}(R) = -\text{sing}(\mathcal{G}) = -\mathbf{G}^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \delta(x^3) . \quad (6.3)$$

Jak pokazaliśmy w paragrafie 3.5, dowolność w wyborze $\mathbf{G}^{\mu\nu}$ modulo człon $CX^\mu X^\nu$, jest nieznacząca, ponieważ kasuje ją zwężenie z $g_{\mu\nu}$:

$$\mathbf{G}^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = \mathbf{G}^{ab} g_{ab} = \mathbf{G}^a_a .$$

Jeśli chodzi o lagranżjan materii L_{mat} , to nakładamy na niego założenia jak w rozdziale 5.1. Ostatecznie, całkowite działanie jest sumą trzech całek:

$$\mathcal{A} = \int_D L_{\text{graw}}^{\text{reg}} + \int_D L_{\text{graw}}^{\text{sing}} + \int_{D \cap S} L_{\text{mat}} , \quad (6.4)$$

gdzie D jest czterowymiarowym obszarem w czasoprzestrzeni, a S trójwymiarową hiperpowierzchnią typu świetlnego. Będziemy wariować względem czasoprzestrzennego tensora metrycznego $g_{\mu\nu}$ i względem pól materii z^K na S . Świetlny charakter rozpatrywanej materii oznacza zerowy charakter S , tzn. zdegenerowanie metryki indukowanej: $\det g_{ab} = 0$.

Powtarzając szczegółowe rozumowanie z rozdziałów 2. i 4. otrzymujemy, że wariacja grawitacyjnej części działania jest następująca :

$$\delta L_{\text{graw}} = -\frac{1}{16\pi} \mathcal{G}^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + \partial_\kappa (\pi_\lambda^{\mu\nu\kappa} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) , \quad (6.5)$$

przy czym oba człony składają się zarówno z części regularnej jak i osobliwej.

Wariacja materialnej części L_{mat} działania na S jest postaci:

$$\begin{aligned} \delta L_{\text{mat}} &= \frac{\partial L_{\text{mat}}}{\partial g_{ab}} \delta g_{ab} + \frac{\partial L_{\text{mat}}}{\partial z^K} \delta z^K + \frac{\partial L_{\text{mat}}}{\partial z_a^K} \partial_a \delta z^K \\ &= \frac{1}{2} \tau^{ab} \delta g_{ab} + \left(\frac{\partial L_{\text{mat}}}{\partial z^K} - \partial_a \frac{\partial L_{\text{mat}}}{\partial z_a^K} \right) \delta z^K \\ &\quad + \partial_a (p_K^a \delta z^K) , \end{aligned} \quad (6.6)$$

gdzie skorzystaliśmy z definicji (5.16) i wprowadziliśmy pędy sprzężone do zmiennej materialowej z^K :

$$p_K^a := \frac{\partial L_{\text{mat}}}{\partial z_a^K} . \quad (6.7)$$

Ostatecznie otrzymujemy następujący wzór na wariację całkowitego (tzn. obejmującego materię i pole grawitacyjne) lagranżjanu:

$$\begin{aligned} \delta L &= -\frac{1}{16\pi} \text{reg}(\mathcal{G})^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + \delta(x^3) \left(\frac{\partial L_{\text{mat}}}{\partial z^K} - \partial_a \frac{\partial L_{\text{mat}}}{\partial z_a^K} \right) \delta z^K \\ &\quad - \delta(x^3) \frac{1}{16\pi} (\mathbf{G}^{ab} - 8\pi\tau^{ab}) \delta g_{ab} + \partial_\kappa (\pi_\lambda^{\mu\nu\kappa} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) + \delta(x^3) \partial_a (p_K^a \delta z^K) . \end{aligned} \quad (6.8)$$

Założmy na razie, że zarówno $\delta g_{\mu\nu}$ jak i δz^K znikają na brzegu ∂D obszaru D czasoprzestrzeni. Z tego założenia zrezygnujemy później w czasie opisu struktury hamiltonowskiej naszej teorii. Ostatnie dwa człony brzegowe w powyższym wzorze znikają po wycalkowaniu po D . Znikanie wariacji $\delta \mathcal{A} = 0$ z ustalonymi wartościami brzegowymi daje równania Eulera-Lagrange'a (5.17) dla pól materii z^K , razem z równaniami Einsteina dla pola grawitacyjnego. Nieosobliwa część równań Einsteina:

$$\text{reg}(\mathcal{G})^{\mu\nu} = 0$$

musi być spełniona wszędzie poza S , a część osobliwa musi być spełniona na S . Aby uniknąć dowolności typu CX^aX^b , napiszemy to równanie w następującej postaci:

$$\mathbf{G}^a{}_b = 8\pi\tau^a{}_b .$$

Zbierając osobliwą i nieosobliwą część powyższych wielkości oraz wprowadzając czterowymiarowy tensor energii-pędu $\mathcal{T}^{\mu\nu} := \delta(x^3)\tau^{\mu\nu}$ taki, że $\tau^{\perp\nu} \equiv 0$, możemy zapisać równanie (6.8) następująco:

$$\begin{aligned} \delta L &= \frac{1}{16\pi} (\mathcal{G}^{\mu\nu} - 8\pi\mathcal{T}^{\mu\nu}) \delta g_{\mu\nu} + \delta(x^3) \left(\frac{\partial L_{\text{mat}}}{\partial z^K} - \partial_a \frac{\partial L_{\text{mat}}}{\partial z^K{}_a} \right) \delta z^K \\ &+ \partial_\kappa (\pi_\lambda{}^{\mu\nu\kappa} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) + \delta(x^3) \partial_a (p_K{}^a \delta z^K) . \end{aligned} \quad (6.9)$$

Równania pola są równoważne temu, że człony objętościowe w wariacji lagranżjanu (6.9) muszą zniknąć tożsamościowo. Zatem mogą być one zapisane w następujący sposób:

$$\delta L = \partial_\kappa (\pi^{\mu\nu} \delta A_{\mu\nu}^\kappa) + \delta(x^3) \partial_a (p_K{}^a \delta z^K) . \quad (6.10)$$

gdzie, jak w poprzednich rozdziałach, używamy następujących oznaczeń:

$$\begin{aligned} \pi^{\mu\nu} &:= \frac{1}{16\pi} \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} , \\ A_{\mu\nu}^\lambda &:= \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \delta_{(\mu}^\lambda \Gamma_{\nu)\kappa}^\kappa . \end{aligned}$$

Dla uproszczenia rachunków wybierzmy układ współrzędnych zgodny z ustaloną (3+1)-dekompozycją czasoprzestrzeni: zakładamy, że współrzędna czasowa $t = x^0$ jest stała na trójwymiarowych powierzchniach tej foliacji. Zakładamy również, że te powierzchnie są przestrzennopodobne. Aby otrzymać sformułowanie hamiltonowskie naszej teorii musimy scałkować równanie (6.10) po powierzchni Cauchy'ego $\mathcal{C} \subset M$ i potem dokonać transformacji Legendre'a między pochodnymi czasowymi a odpowiadającymi im pędami.

W naszych rozważaniach ograniczymy się do przypadku czasoprzestrzeni asymptotycznie płaskiej i założymy, że także płaty \mathcal{C}_t naszej (3+1)-dekompozycji są asymptotycznie płaskie w nieskończoności. Aby mieć kontrolę nad dwuwymiarowymi całkami powierzchniowymi w nieskończoności, rozważymy najpierw dynamikę naszego układu „materia + grawitacja” w skończonej tubie świata \mathcal{T} , której brzeg ma niezdegenerowaną metrykę o sygnaturze $(-, +, +)$. W pewnym momencie przejdziemy do nieskończoności z brzegiem tuby. Zakładamy, że tuba ta zawiera powierzchnię S wraz z poruszającą się wzdłuż niej naszą zerową materią.

Oznaczając przez $V := \mathcal{T} \cap \mathcal{C}$ tę część \mathcal{C} , która jest zawarta w tubie \mathcal{T} , całkujemy (6.10) po skończonym obszarze $V \subset \mathcal{C}$ i trzymamy całki powierzchniowe na brzegu ∂V obszaru V . Otrzymamy z nich masę ADM jako hamiltonian całego układu „materia + grawitacja”, gdy przejdziemy do nieskończoności z $\partial V = \mathcal{C} \cap \partial \mathcal{T}$. Ponieważ nasz opis jest geometryczny i nie zależy od wyboru układu współrzędnych, możemy uprościć nasze rachunki używając takiego układu, w którym współrzędna x^3 jest stała zarówno na S jak i na brzegu tuby $\partial \mathcal{T}$.

Całkując (6.10) po objętości V otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \delta \int_V L &= \int_V \partial_\kappa (\pi^{\mu\nu} \delta A_{\mu\nu}^\kappa) + \int_V \boldsymbol{\delta}(x^3) \partial_a (p_K^a \delta z^K) \\ &= \int_V (\pi^{\mu\nu} \delta A_{\mu\nu}^0)' + \int_{\partial V} \pi^{\mu\nu} \delta A_{\mu\nu}^\perp + \int_{V \cap S} (p_K^0 \delta z^K)' , \end{aligned} \quad (6.11)$$

gdzie „kropka” oznacza pochodną czasową. W powyższym wzorze pominęliśmy dwuwymiarowe dywergencje znikające po wycałkowaniu po powierzchniach ∂V oraz $V \cap S$.

Aby jeszcze bardziej uprościć nasze oznaczenia, niech $p_K := p_K^0$ będzie składową czasową pędu sprzężonego kanonicznie do zmiennej materiałowej z^K . Dokonajmy transformacji Legendre’a:

$$(p_K \delta z^K)' = \dot{p}_K \delta z^K - \dot{z}^K \delta p_K + \delta (p_K \dot{z}^K) . \quad (6.12)$$

Ostatni człon umieszczony po lewej stronie równania (6.11) daje, razem z lagranżjanem materii, hamiltonian materii:

$$L_{\text{mat}} - p_K \dot{z}^K = L_{\text{mat}} - p_K^0 \dot{z}^K_0 = -T^0_0 = \tau^0_0 . \quad (6.13)$$

Aby dokonać transformacji Legendre’a w grawitacyjnych stopniach swobody zastosujemy metodę opisaną we wcześniejszych rozdziałach. Korzystając ze wzorów wyprowadzonych w rozdziale 2. możemy przepisać grawitacyjną część (6.11) w następujący sposób:

$$\begin{aligned} &\int_V (\pi^{\mu\nu} \delta A_{\mu\nu}^0)' + \int_{\partial V} \pi^{\mu\nu} \delta A_{\mu\nu}^\perp \\ &= -\frac{1}{16\pi} \int_V (g_{kl} \delta P^{kl})' - \frac{1}{16\pi} \int_{\partial V} g_{ab} \delta \mathcal{Q}^{ab} \\ &\quad + \int_{\partial V} \left(\pi^{00} \delta \left(\frac{\pi^{03}}{\pi^{00}} \right) + \pi^{33} \delta \left(\frac{\pi^{30}}{\pi^{33}} \right) \right)' , \end{aligned} \quad (6.14)$$

gdzie \mathcal{Q}^{ab} oznacza krzywiznę zewnętrzną tuby $\partial\mathcal{T}$ zapisaną w postaci ADM. Ostatni człon wyrażenia (6.14) może być zapisany za pomocą kąta hiperbolicznego α między powierzchniami \mathcal{C} oraz $\partial\mathcal{T}$, który jest zdefiniowany jako $\alpha = \text{arsinh}(q)$, gdzie

$$q = \frac{g^{30}}{\sqrt{|g^{00}g^{33}|}} , \quad (6.15)$$

oraz dwuwymiarowej formy objętościowej $\lambda = \sqrt{\det g_{AB}}$ na ∂V :

$$\pi^{00} \delta \left(\frac{\pi^{03}}{\pi^{00}} \right) + \pi^{33} \delta \left(\frac{\pi^{30}}{\pi^{33}} \right) = \frac{1}{8\pi} \lambda \delta \alpha . \quad (6.16)$$

Mamy więc:

$$\begin{aligned} &\int_V (\pi^{\mu\nu} \delta A_{\mu\nu}^0)' + \int_{\partial V} \pi^{\mu\nu} \delta A_{\mu\nu}^\perp \\ &= -\frac{1}{16\pi} \int_V (g_{kl} \delta P^{kl})' - \frac{1}{16\pi} \int_{\partial V} g_{ab} \delta \mathcal{Q}^{ab} + \frac{1}{8\pi} \int_{\partial V} (\lambda \delta \alpha)' . \end{aligned} \quad (6.17)$$

Dokonajmy teraz transformacji Legendre'a zarówno w objętości

$$(g_{kl}\delta P^{kl})' = (\dot{g}_{kl}\delta P^{kl} - \dot{P}^{kl}\delta g_{kl}) + \delta(g_{kl}\dot{P}^{kl})$$

jak i na brzegu:

$$(\lambda\delta\alpha)' = (\dot{\lambda}\delta\alpha - \dot{\alpha}\delta\lambda) + \delta(\lambda\dot{\alpha}) .$$

Możemy zebrać razem całkowite różniczki korzystając ze wzoru (2.80):

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{16\pi}\delta\int_V(g_{kl}\dot{P}^{kl}) + \frac{1}{8\pi}\delta\int_{\partial V}\lambda\dot{\alpha} \\ & = \frac{1}{8\pi}\delta\int_V\sqrt{|g|}R^0_0 + \frac{1}{16\pi}\delta\int_{\partial V}(\mathcal{Q}^{AB}g_{AB} - \mathcal{Q}^{00}g_{00}) . \end{aligned} \quad (6.18)$$

Wtedy

$$\frac{1}{16\pi}\delta\int_V L_{\text{graw}} - \frac{1}{8\pi}\delta\int_V\sqrt{|g|}R^0_0 = \frac{1}{16\pi}\delta\int_V\sqrt{|g|}(R - 2R^0_0) = -\frac{1}{8\pi}\delta\int_V\mathcal{G}^0_0 \quad (6.19)$$

Człon objętościowy umieszczony po lewej stronie równania (6.11) spotyka lagranżjan grawitacyjny. Rozbijając lagranżjan grawitacyjny na część osobliwą i nieosobliwą otrzymujemy:

$$\frac{1}{8\pi}\delta\int_V\mathcal{G}^0_0 = \frac{1}{8\pi}\delta\int_V\text{reg}(\mathcal{G}^0_0) + \frac{1}{8\pi}\delta\int_V\text{sing}(\mathcal{G}^0_0) , \quad (6.20)$$

Nieosobliwa część gęstości tensorowej Einsteina $\text{reg}(\mathcal{G}^{\mu\nu})$ znika zgodnie z równaniami pola. Część osobliwa

$$\text{sing}(\mathcal{G}^0_0) = \delta(x^3)\mathbf{G}^0_0 \quad (6.21)$$

i stąd

$$\frac{1}{8\pi}\delta\int_V\text{sing}(\mathcal{G}^0_0) = \frac{1}{8\pi}\delta\int_{V\cap S}\mathbf{G}^0_0, \quad (6.22)$$

co zgodnie z równaniami pola jest równe hamiltonianowi materii

$$\frac{1}{8\pi}\delta\int_{V\cap S}(\mathbf{G}^0_0 - 8\pi\tau^0_0) = 0 . \quad (6.23)$$

Ostatecznie formuła generująca przybiera następującą postać

$$\begin{aligned} 0 & = \frac{1}{16\pi}\int_V(\dot{P}^{kl}\delta g_{kl} - \dot{g}_{kl}\delta P^{kl}) \\ & + \frac{1}{16\pi}\int_{\partial V}(\dot{\lambda}\delta\alpha - \dot{\alpha}\delta\lambda) - \frac{1}{16\pi}\int_{\partial V}g_{ab}\delta\mathcal{Q}^{ab} + \frac{1}{16\pi}\delta\int_{\partial V}(\mathcal{Q}^{AB}g_{AB} - \mathcal{Q}^{00}g_{00}) \\ & + \int_{V\cap S}(\dot{p}^0_K\delta z^K - \dot{z}^K\delta p^0_K) . \end{aligned} \quad (6.24)$$

Formuła ta została wyprowadzona w pracy J. Kijowskiego [19] dla szerokiej klasy lagranżjanów materii, jednak zawsze w modelu materii ciągłej. W rozdziale 2. pokazaliśmy, że jest ona prawdziwa również dla materii osobliwej, skoncentrowanej na dwuwymiarowej powłoce S , której metryka wewnętrzna jest niezdegenerowana i nosi sygnaturę $(-, +, +)$. Teraz wykazaliśmy, że jest ona prawdziwa również dla materii świetlnej, poruszającej się po powierzchni frontu świetlnego, którego metryka jest zdegenerowana.

W granicy, gdy brzeg tuby ∂V dąży do nieskończoności a trójwymiarowe całki po ∂V są odpowiednio kontrolowane, otrzymujemy w przypadku asymptotycznie płaskim standardową formułę hamiltonowską dla pola grawitacyjnego i pól materii z hamiltonianem równym masie ADM. Jest ona dana przez odpowiednią całkę brzegową w nieskończoności. Tak więc, oznaczając pędy materii następująco:

$$\pi_K := p_K \delta(x^3), \quad (6.25)$$

ostateczna formuła hamiltonowska w przypadku granicznym $\partial V \rightarrow \infty$ (tzn. gdy V pokrywa całą powierzchnię Cauchy'ego \mathcal{C} , a więc $V \rightarrow \mathcal{C}$) przybiera następującą postać:

$$-\delta\mathcal{H} = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{C}} \left(\dot{P}^{kl} \delta g_{kl} - \dot{g}_{kl} \delta P^{kl} \right) + \int_{\mathcal{C}} \left(\dot{\pi}_K \delta z^K - \dot{z}^K \delta \pi_K \right), \quad (6.26)$$

gdzie \mathcal{H} jest hamiltonianem całego układu, równym masie ADM liczonej w nieskończoności. Wypisane powyżej stopnie swobody pola nie są niezależne, lecz podlegają więzom.

6.2 Więzy

Rozważmy dane początkowe $(P^{kl}, g_{kl}, \pi_K, z^K)$ na trójwymiarowej powierzchni typu przestrzennego V_t . Niech \tilde{g}^{kl} oznacza trójwymiarową metrykę odwrotną do metryki na powierzchni g_{kl} , a $\gamma := \sqrt{\det g_{kl}}$, R jest trójwymiarowym skalarzem krzywizny metryki g_{kl} , $P := P^{kl} g_{kl}$, a „ \cdot ” oznacza trójwymiarową pochodną kowariantną względem g_{kl} .

Pokażemy, że dane te muszą spełniać więzy wynikające z równań Gaussa-Codazziego dla składowej \mathcal{G}^0_{μ} gęstości tensora Einsteina. Możemy rozłożyć \mathcal{G}^0_{μ} na część przestrzenną – styczną do V_t , i część czasową – normalną do V_t , w następujący sposób:

$$\mathcal{G}^0_l = -P_l^k{}_{|k}, \quad (6.27)$$

oraz

$$2\mathcal{G}^0_{\mu} n^{\mu} = -\gamma \overset{(3)}{R} + \left(P^{kl} P_{kl} - \frac{1}{2} P^2 \right) \frac{1}{\gamma}, \quad (6.28)$$

gdzie n jest jednostkowym wektorem prostopadłym do powierzchni Cauchy'ego V_t :

$$n^{\mu} = -\frac{g^{0\mu}}{\sqrt{-g^{00}}}.$$

Z próżniowych równań Einsteina na zewnątrz oraz wewnątrz S wynika, że regularna część \mathcal{G}^0_μ znika. Zatem nieosobliwa część więzów wektorowych jest następująca:

$$\text{reg}(P_l^k|_k) = 0 ,$$

a regularna część skalarnego równania więzów redukuje się do

$$\text{reg}\left(\gamma \overset{(3)}{R} - \left(P^{kl}P_{kl} - \frac{1}{2}P^2\right) \frac{1}{\gamma}\right) = 0 .$$

Wyprowadzimy teraz osobliwą część równań więzów, o nośniku na przecięciu $S_t = V_t \cap S$.

Osobliwa część trójwymiarowej różniczki kowariantnej pędu ADM P_{kl} składa się z pochodnych w kierunku x^3 :

$$\text{sing}(P_l^k|_k) = \text{sing}(\partial_3 P_l^3) = \boldsymbol{\delta}(x^3)[P_l^3] ,$$

a więc pełne przestrzenne równania Gaussa-Codazziego (6.27) mają następującą postać:

$$\mathcal{G}^0_l = -P_l^k|_k = -[P_l^3]\boldsymbol{\delta}(x^3) . \quad (6.29)$$

Składowe pędu ADM P^{kl} są regularne, zatem osobliwa część wyrażenia $(P^{kl}P_{kl} - \frac{1}{2}P^2)$ jest równa zero. Singularna część trójwymiarowego skalaru krzywizny składa się z różniczkowanych w kierunku x^3 trójwymiarowych symboli Christoffela:

$$\text{sing}(\overset{(3)}{R}) = \text{sing}(\partial_3(\Gamma_{kl}^3\tilde{g}^{kl} - \Gamma_{ml}^m\tilde{g}^{3l})) = \boldsymbol{\delta}(x^3) [\Gamma_{kl}^3\tilde{g}^{kl} - \Gamma_{ml}^m\tilde{g}^{3l}] ,$$

przy czym wyrażenie w nawiasach kwadratowych może być przepisane następująco:

$$\gamma [\Gamma_{kl}^3\tilde{g}^{kl} - \Gamma_{ml}^m\tilde{g}^{3l}] = -2\sqrt{\tilde{g}^{33}} \left[\partial_3 \left(\gamma \sqrt{\tilde{g}^{33}} \right) \right] = -2\sqrt{\tilde{g}^{33}} \left[\partial_k \left(\frac{\gamma \tilde{g}^{3k}}{\sqrt{\tilde{g}^{33}}} \right) \right] , \quad (6.30)$$

ponieważ pochodne styczne do S są ciągłe. Z drugiej strony wyrażenie w nawiasach kwadratowych jest równe skalarowi krzywizny zewnętrznej k dwuwymiarowej powierzchni S_t zanurzonej w V_t :

$$\gamma k = -\partial_k \left(\frac{\gamma \tilde{g}^{3k}}{\sqrt{\tilde{g}^{33}}} \right) . \quad (6.31)$$

Zatem mamy, że

$$\text{sing}\left(\gamma \overset{(3)}{R}\right) = 2\gamma\sqrt{\tilde{g}^{33}}[k]\boldsymbol{\delta}(x^3) = 2[\lambda k]\boldsymbol{\delta}(x^3) .$$

Ostatecznie, pełne czasowe równanie Gaussa-Codazziego (6.28) jest następujące:

$$\gamma \overset{(3)}{R} - \left(P^{kl}P_{kl} - \frac{1}{2}P^2\right) \frac{1}{\gamma} = 2[\lambda k]\boldsymbol{\delta}(x^3) . \quad (6.32)$$

Równania (6.29) i (6.32) są uogólnieniem w sensie dystrybucji zwykłych próżniowych równań więzów, skalarnego i wektorowego.

Pokażemy teraz jak materia skoncentrowana na S_t generuje cztery wielkości powierzchniowe $[P^3_k]$ i $[\lambda k]$, które występują w osobliwej części więzów. Styczna do S część składowej \mathcal{G}^0_μ może być rozłożona na dwuwymiarową część styczną do S_t oraz część transwersalną (w kierunku zerowym).

Styczna do S_t część równań Einsteina daje nam następujące równania

$$\mathcal{G}^0_A = 8\pi\delta(x^3)\tau^0_A, \quad (6.33)$$

które, korzystając ze wzorów (6.27) i (6.29), generują następujące dwa równania więzów

$$[P^3_B] = -8\pi\tau^0_B. \quad (6.34)$$

Pozostała część (zerowa) równań Einsteina jest następująca:

$$\mathcal{G}^0_\mu X^\mu = 8\pi\delta(x^3)\tau^0_\mu X^\mu = 0, \quad (6.35)$$

ponieważ $\tau^0_\mu X^\mu = 0$. Pokażemy, że to równanie generuje następujące równanie więzów:

$$\left[\frac{P^{33}}{\sqrt{\tilde{g}^{33}}} + \lambda k \right] = 0. \quad (6.36)$$

Dowód (6.36). Korzystając z dekompozycji metryki (3.9), (3.10), możemy przepisać wektor n , ortonormalny do powierzchni Cauchy'ego V_t , w następujący sposób:

$$n = \frac{1}{N} \left(\partial_0 - n^A \partial_A + s \frac{N^2}{M} m^A \partial_A - s \frac{N^2}{M} \partial_3 \right).$$

Wybierając $X = \partial_0 - n^A \partial_A$, mamy:

$$\frac{1}{N} X = s \frac{N}{M} (\partial_3 - m^A \partial_A) + n. \quad (6.37)$$

Możemy więc przepisać lewą część równania (6.35) następująco:

$$\frac{1}{N} \mathcal{G}^0_\mu X^\mu = s \frac{N}{M} \mathcal{G}^0_3 - s \frac{N}{M} m^A \mathcal{G}^0_A + \mathcal{G}^0_\mu n^\mu. \quad (6.38)$$

Wyrażając \mathcal{G}^0_μ za pomocą pędu ADM P_{kl} (p. równania (6.27) i (6.28)), otrzymujemy równanie (6.35) w następującej postaci:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{N} \mathcal{G}^0_\mu X^\mu \\ &= s \frac{N}{M} (P_3^k{}_{|k} - m^A P_A^k{}_{|k}) + \frac{1}{2} \left(\gamma R - \left(P^{kl} P_{kl} - \frac{1}{2} P^2 \right) \frac{1}{\gamma} \right). \end{aligned} \quad (6.39)$$

Z równań (6.29) i (6.32) otrzymujemy

$$s \frac{N}{M} ([P_3^3] - m^A [P_A^3]) + [\lambda k] = 0 . \quad (6.40)$$

Korzystając z dekompozycji metryki (3.9), możemy napisać trójwymiarową metrykę \tilde{g}^{kl} odwrotną do g_{kl} postaci:

$$\tilde{g}^{kl} = \left(\frac{N}{M} \right)^2 \left[\begin{array}{c|c} \left(\left(\frac{M}{N} \right)^2 + m^A m_A \right) \tilde{g}^{AB} & -m^A \\ \hline -m^A & 1 \end{array} \right] . \quad (6.41)$$

Korzystając z tej formy \tilde{g}^{kl} możemy przepisać pędowną część równania (6.40) następująco:

$$s \frac{N}{M} ([P_3^3] - m^A [P_A^3]) = s \frac{M}{N} [P^{33}] = \frac{\gamma}{\lambda} [P^{33}] = \left[\frac{P^{33}}{\sqrt{\tilde{g}^{33}}} \right] , \quad (6.42)$$

i ostatecznie otrzymujemy równanie więzów (6.36). \square

Warto jeszcze zauważyć, że osobliwa część \mathcal{G}^0_3 nie może być jednoznacznie zdefiniowana. Mamy więc tylko trzy równania więzów dla osobliwych części (6.36) i (6.34). Czwarte równanie więzów (które występuje w przypadku niezdegenerowanym), zostało tutaj zastąpione warunkiem znikania $\det g_{ab}$, a więc warunkiem degeneracji metryki na S . Równania (6.34), (6.36) wraz z (6.29) i (6.32) są więzami na dane początkowe naszego układu.

6.2.1 Przykłady

Przykład 1

Dla gęstości lagranżjanu (5.29)

$$L = \lambda (X^a z^K_{,a} X^b z^L_{,b} \gamma_{KL}(z^A))^{\alpha} (X^c \xi_{,c})^{\beta} , \quad (6.43)$$

równania więzów przyjmują następującą postać:

$$\left[\frac{P^{33}}{\sqrt{\tilde{g}^{33}}} + \lambda k \right] = 0 , \quad (6.44)$$

oraz

$$[P^3_B] = 8\pi\lambda (X^c z^K_{,c} X^d z^L_{,d} \gamma_{KL}(z^A))^{\alpha-1} (X^f \xi_{,f})^{\beta-1} X^c z^M_{,c} \gamma_{MN} \quad (6.45)$$

$$\times (2\alpha z^N_{,B} X^f \xi_{,f} + \beta X^d z^N_{,d} \xi_{,B}) . \quad (6.46)$$

Wyrażmy prawą stronę powyższego równania za pomocą danych początkowych $(\pi_K, z^K, \tilde{\pi}, \xi)$, tzn. zamieńmy prędkości $(\dot{z}^k, \dot{\xi})$ na pędy na przestrzeni danych

początkowych $(\pi_K, \tilde{\pi})$. Pędy te możemy wyrazić następująco: $\pi_K = 8\pi\delta(x^3)p^0_K$ i $\tilde{\pi} = 8\pi\delta(x^3)\tilde{p}^0$, gdzie $p^0_K = \partial L/\partial z^K_0$ i $\tilde{p}^0 = \partial L/\partial \xi_{,0}$. Z postaci lagranżjanu mamy, że

$$p^a_K = \frac{\partial L}{\partial z^K_a} = \lambda\alpha (X^c z^N_{,c} X^d z^L_{,d} \gamma_{NL}(z^A))^{\alpha-1} (X^f \xi_{,f})^\beta 2X^a X^c z^M_{,c} \gamma_{MK}, \quad (6.47)$$

$$\tilde{p}^a = \frac{\partial L}{\partial \xi_{,a}} = \lambda\beta (X^c z^K_{,c} X^d z^L_{,d} \gamma_{KL}(z))^\alpha (X^f \xi_{,f})^{\beta-1} X^a, \quad (6.48)$$

a więc

$$\pi_K = 8\pi\delta(x^3)p^0_K = 8\pi\delta(x^3)\lambda\alpha (X^c z^N_{,c} X^d z^L_{,d} \gamma_{NL}(z^A))^{\alpha-1} (X^f \xi_{,f})^\beta 2X^c z^M_{,c} \gamma_{MK}, \quad (6.49)$$

$$\tilde{\pi} = 8\pi\delta(x^3)\tilde{p}^0 = 8\pi\delta(x^3)\lambda\beta (X^c z^K_{,c} X^d z^L_{,d} \gamma_{KL}(z))^\alpha (X^f \xi_{,f})^{\beta-1}. \quad (6.50)$$

Możemy więc wyrazić prawą stronę wektorowego równania więzów następująco:

$$8\pi\delta(x^3)\tau^0_B = 8\pi\delta(x^3)(p^0_N z^N_{,B} + \tilde{p}^0 \xi_{,B}) = \pi_N z^N_{,B} + \tilde{\pi} \xi_{,B} \quad (6.51)$$

i równanie (6.45) przyjmuje następującą postać:

$$\delta(x^3) [P^3_B] - (\pi_N z^N_{,B} + \tilde{\pi} \xi_{,B}) = 0. \quad (6.52)$$

Uwaga. Lagranżjan (5.29):

$$L = \lambda (X^a z^K_{,a} X^b z^L_{,b} \gamma_{KL}(z^A))^\alpha (X^c \xi_{,c})^\beta L, \quad (6.53)$$

dla $\alpha = 0$, $\beta = 1$ przyjmuje następującą postać:

$$L = \lambda X^c \xi_{,c}. \quad (6.54)$$

Jest to lagranżjan **osobliwy**, liniowy w prędkości $\dot{\xi}$, a więc nie można wyrazić pędu π przez prędkość.

Przykład 2

Rozpatrzmy teraz drugi przykład lagranżjanu (5.43), z podanych w poprzednim rozdziale

$$L = \lambda X^a z^K_{,a} F_K(z^K), \quad (6.55)$$

$K = 1, 2$, z^K są zmiennymi materiałowymi a F_K jakimiś skalarnymi funkcjami tych zmiennych.

Równania więzów przyjmują następującą postać:

$$\left[\frac{P^{33}}{\sqrt{\tilde{g}^{33}}} + \lambda k \right] = 0, \quad (6.56)$$

oraz

$$[P^3_B] = 8\pi\lambda X^a z^K_{,b} F_K . \quad (6.57)$$

Wyrażmy prawą stronę powyższego równania za pomocą danych początkowych (π_K, z^K) , tzn. zamieńmy prędkości \dot{z}^k na pędy na przestrzeni danych początkowych π_K . Pędy te możemy wyrazić następująco: $\pi_K = 8\pi\delta(x^3)p^0_K$, gdzie $p^0_K = \partial L/\partial z^K_0$. Z postaci lagranżjanu mamy, że

$$p^a_K = \frac{\partial L}{\partial z^K_{,a}} = \lambda X^a F_K , \quad (6.58)$$

a więc

$$\pi_K = 8\pi\delta(x^3)p^0_K = \delta(x^3)\lambda X^a F_K , \quad (6.59)$$

Możemy więc wyrazić prawa stronę wektorowego równania więzów następująco:

$$8\pi\delta(x^3)\tau^0_B = 8\pi\delta(x^3)p^0_K z^K_{,B} = \pi_K z^K_{,B} \quad (6.60)$$

i równanie (6.57) przyjmuje następującą postać:

$$\delta(x^3) [P^3_B] - \pi_K z^K_{,B} = 0 . \quad (6.61)$$

Rozdział 7

Przypadek sferycznie symetryczny

Rozpatrzmy cienką powłokę materii opisaną gęstością lagranżjanu $L = L(X^a z_{,a}^K)$, gdzie $K = 1 \dots n$ (własności tego lagranżjanu opisane są w rozdziale 5).

Jako najprostszy przykład powyższego lagranżjanu weźmy

$$L = \lambda X^a z_{,a} , \quad (7.1)$$

Jest to przykład lagranżjanu (5.29) z rozdziału 5., w którym położyliśmy $\alpha = 0$, $\beta = 1$ oraz $\xi \equiv z$.

Powyższy lagranżjan w układzie o sferycznej symetrii przybiera postać:

$$L = \lambda \dot{z} . \quad (7.2)$$

Pęd kanonicznie p sprzężony do zmiennej z jest następujący:

$$p = \lambda . \quad (7.3)$$

Gęstość hamiltonianu materii jest równa składowej T^0_0 kanonicznego tensora energii-pędu:

$$T^a_b = \frac{\partial L}{\partial z_{,a}} z_{,b} - \delta^a_b L , \quad (7.4)$$

zatem

$$H = 0 .$$

Z równań Hamiltona oraz postaci pędu kanonicznego (7.3) wynika następujące równanie

$$\dot{\lambda} = 0 . \quad (7.5)$$

Zatem materia opisana lagranżjanem (7.1) sprzęga się do izolowanego horyzontu, tzn. może istnieć tylko na izolowanym horyzontem opisanym równaniem (w przypadku sferycznie symetrycznym) $\dot{\lambda} = 0$ (p. definicja izolowanego horyzontu (3.192) i wzór (3.41)).

Rozpatrując materię opisaną szerszą klasą lagranżjanów postaci (5.29):

$$L = \lambda (X^a z_{,a}^K X^b z_{,b}^L \gamma_{KL}(z^A))^\alpha (X^c \xi_{,c})^\beta ,$$

(gdzie ξ jest jakimś polem skalarnym oraz $2\alpha + \beta = 1$), albo lagranżjan opisany powyżej, ale o większej ilości stopni swobody:

$$L = \lambda \prod_{K=1}^n (X^a z_{,a}^K)^{\alpha_K}$$

(gdzie $\sum_{K=1}^n \alpha_K = 1$), dostajemy taki sam rezultat. To znaczy, że materia opisana wymienionymi lagranżjanami może istnieć tylko na izolowanym horyzoncie. Interesuje nas mniej trywialny przypadek, tzn. sferycznie symetryczne powłoka zerowa, niekoniecznie będąca izolowanym horyzontem. Okazuje się, że nietrywialne wyniki można otrzymać rozpatrując cieką powłokę materii opisanej gęstością lagranżjanu o co najmniej dwóch stopniach swobody, który zależy nie tylko od prędkości, ale i od samych konfiguracji pól materii. Weźmy zatem lagranżjan typu (5.43):

$$L = L(X^a z_{,a}^K) = \lambda X^a z_{,a}^K F_K(z^K) ,$$

gdzie $K = 2 \dots n$, a F_K jest jakimś polem kowektorowym określonym na przestrzeni zmiennych materiałowych. Ograniczmy się do dwóch stopni swobody:

$$L = \lambda X^a z_{,a}^K F_K(z^K) , \quad (7.6)$$

$K = 1, 2$. W przypadku sferycznie symetrycznym lagranżjan ten przyjmie postać:

$$L = \lambda \dot{z}^K F_K(z^K) . \quad (7.7)$$

Równania Eulera-Lagrange'a dla takiego układu są następujące:

$$\dot{\lambda} F_1 = \lambda (F_{2,1} - F_{1,2}) \dot{z}^2 , \quad (7.8)$$

$$\dot{\lambda} F_2 = -\lambda (F_{2,1} - F_{1,2}) \dot{z}^1 . \quad (7.9)$$

Jeśli wyrażenie $(F_{2,1} - F_{1,2})$ jest równe zero, tzn. jeśli F jest formą zamkniętą: $dF = 0$, wtedy $\lambda = 0$, a więc materia opisywana takim lagranżjanem sprzęga się do izolowanego horyzontu. Ten przypadek nie wnosi zatem nic nowego. W dalszych rozważaniach będziemy zatem zakładać, że $dF \neq 0$. Równania Eulera-Lagrange'a implikują wtedy równanie więzów:

$$F_1 \dot{z}^1 + F_2 \dot{z}^2 = 0 .$$

Przestrzeń danych początkowych takiego układu może być parametryzowana następującą przestrzenią funkcji:

$$\mathcal{P} := \{(g_{kl}, P^{kl}, z^K, p_K)\} .$$

Tak jak w poprzednich rozdziałach, g_{kl} jest trójwymiarową metryką na przestrzennopodobnej powierzchni Cauchy'ego, a P^{kl} są odpowiednimi pędami ADM opisującymi krzywiznę zewnętrzną tej powierzchni. Ograniczymy się do przypadku topologicznie trywialnego $\mathcal{C} \simeq \mathbf{R}^3$ i zakładamy, że geometria \mathcal{C} jest asymptotycznie płaska w nieskończoności.

Powyższa przestrzeń fazowa jest wyposażona w strukturę symplektyczną:

$$\Omega := \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{C}} \{ \delta P^{kl}(x) \wedge \delta g_{kl}(x) \} d^3x + \int_{\mathcal{C} \cap S} \left(\sum_{K=1}^2 \delta p_K \wedge \delta z^K \right) d^2x . \quad (7.10)$$

W dalszych rachunkach warto wydzielić zależność lagranżjanu od λ , zgodnie z lematem 5.2. Jeśli więc mamy

$$L = \lambda f ,$$

to również

$$p_K = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}^K} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \dot{z}^K} := \lambda P_K .$$

Wtedy powyższa forma daje:

$$\Omega := \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{C}} \{ \delta P^{kl}(x) \wedge \delta g_{kl}(x) \} d^3x + \int_{\mathcal{C} \cap S \lambda} \left(\sum_{K=1}^2 \delta(\lambda P_K) \wedge \delta z^K \right) d^2x . \quad (7.11)$$

W poprzednim rozdziale opisaliśmy, jak równania dynamiki systemu nakładają następujące więzy na powyższe dane:

$$0 = \frac{1}{n} P_3^k{}_{|k} + s \frac{1}{2} \left(\gamma R^{(3)} - \left(P^{kl} P_{kl} - \frac{1}{2} P^2 \right) \frac{1}{\gamma} \right) , \quad (7.12)$$

$$0 = -\frac{1}{8\pi} P^k{}_{A|k} + \mathcal{P}_A , \quad (7.13)$$

gdzie gęstość pędu P_A jest zdefiniowana jako składowa kanonicznej gęstości energii-pędu $\mathcal{T}^\lambda{}_\mu$ materii: $\mathcal{P}_l := \mathcal{T}^0{}_l$ i n^μ jest wektorem normalnym do \mathcal{C} . Wielkość ta jest typu funkcja delta Diraca na dwuwymiarowym przecięciu $S^{(2)} = S \cap \mathcal{C}$. Dokładniej:

$$\mathcal{P}_A = -\Delta_{S^{(2)}} \sqrt{\det g_{AB}} p_A , \quad (7.14)$$

gdzie $\Delta_{S^{(2)}}$ oznacza funkcję delta Diraca skoncentrowaną na $S^{(2)}$.

7.1 Sferyczna symetria

Założenie sferycznej symetrii danych początkowych $(g_{kl}, P^{kl}, z^K, p_K)$ oznacza tutaj, że istnieje układ współrzędnych $(x^1, x^2, x^3) = (\theta, \varphi, r)$ na \mathcal{C} . Poza tym, zgodnie z przyjętą przez nas konwencją, ustalamy układ współrzędnych tak, że historia naszej powłoki jest opisana równaniem $x^3 \equiv \zeta = \text{const}$. Na pierwszy rzut oka opis dynamiki ustalając na początku wartość jednej ze współrzędnych może wydać się dość paradoksalne. Założenie $x^3 = \text{const}$. nie jest jednak żadnym założeniem fizycznym, tylko ustaleniem pewnego cechowania. Można postępować tak jak w pracach [8, 9, 21], nie ustalając tego cechowania, ale niczego by to w fizycznej stronie rozwiązania nie zmieniło, a nam wybór takiego cechowania ułatwia rozważania i rachunki.

Trójwymiarowa metryka na powierzchni danych początkowych w przypadku sferycznie symetrycznym przyjmuje następującą postać:

$$g_{kl} = \left[\begin{array}{c|c} l(r) \gamma_{AB} & 0 \\ \hline 0 & n^2(r) \end{array} \right], \quad (7.15)$$

gdzie l i n są pewnymi funkcjami zmiennej radialnej r , a γ_{AB} oznacza standardową metrykę sfery jednostkowej

$$\gamma_{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (7.16)$$

Składowe P^{kl} są następującej postaci

$$\begin{aligned} P^{AB} &= \frac{1}{2} u(r) \gamma^{AB} \sqrt{\det \gamma}, \\ P^{33} &= \frac{f(r)}{n(r)} \sqrt{\det \gamma}, \\ P^{3A} &= 0, \end{aligned}$$

i u oraz f są pewnymi funkcjami zmiennej radialnej r , których postać wyznaczymy w toku obliczeń. Funkcje te są kawałkami ciągle poza powierzchnią sfery określonej równaniem $r = \zeta$, a współczynniki metryki n oraz l muszą być także ciągle w $r = \zeta$.

Dane te spełniają równania wyprowadzone w poprzednim rozdziale. Wektorowe równanie więzów $\mathcal{G}^0_A = -P_A^k|_k$ jest w układzie sferycznym spełnione tożsamościowo. Lewa strona równania (7.12)

$$\frac{1}{n} P_3^k|_k = s \frac{1}{2} \left(-\gamma^{(3)} R + \left(P^{kl} P_{kl} - \frac{1}{2} P^2 \right) \frac{1}{\gamma} \right) \quad (7.17)$$

może być wyrażona za pomocą radialnej składowej pędu

$$\mathcal{P}_3 = \frac{1}{8\pi} P^k{}_{3|k}. \quad (7.18)$$

a prawa jako

$$E := \frac{1}{2} \left(\gamma^{(3)} R - \left(P^{kl} P_{kl} - \frac{1}{2} P^2 \right) \frac{1}{\gamma} \right), \quad (7.19)$$

co daje pewien ekwiwalent równania stanu (ale nim nie będący!):

$$-\frac{s}{n} \mathcal{P}_3 = E. \quad (7.20)$$

Dalej rachunki zostaną przeprowadzone w analogiczny sposób jak w pracy J. Kijowskiego ([21]), z tą jednak różnicą, że równanie stanu materii (tzn. związek między pędem a

energia) jest w naszym przypadku zastąpione przez powyższy związek energii z pędem (który wynika jedynie z „zerowości” materii, a nie innych konkretnych wewnętrznych jej własności). Oznaczając przez p wielkość taką, że $\mathcal{P}_3 = -p\Delta_{S^{(2)}}\sqrt{\det g_{AB}}$, s jest znakiem g^{30} , możemy przepisać równanie (7.20) jako:

$$\frac{|p|}{n} = e \quad (7.21)$$

(podobne równanie zostało otrzymane w pracy [22]), i stąd mamy:

$$-8\pi\frac{sp}{n}\Delta(r-\zeta) = f' - \frac{1}{2}\frac{u}{n}l', \quad (7.22)$$

gdzie przez „ l' ” oznaczyliśmy pochodną radialną $\partial/\partial r$ a Δ jest jednowymiarową funkcją delta Diraca. Analogicznie, druga część skalarne równania więzów może być zapisana następująco:

$$-8\pi e(p, l, n)\Delta(r-\zeta) = \left(\frac{l'}{n}\right)' - n - \frac{1}{4}\frac{(l')^2}{ln} + \frac{1}{4}\frac{n}{l}f^2 - \frac{1}{2}fu. \quad (7.23)$$

Powyższe więzy generują dwuwymiarową grupę reparametryzacji czasoprzestrzeni, gdzie zmienne (t, r) mogą być zastąpione dowolnymi innymi zmiennymi (\tilde{t}, \tilde{r}) , zachowującymi sferyczną symetrię naszego układu. Transformacje cechowania pojawiają się jako kierunki degeneracji struktury symplektycznej \mathcal{P}_{sym} , otrzymane przez obcięcie formy Ω z \mathcal{P} do \mathcal{P}_{sym} . Aby obliczyć to obcięcie rozważmy wzór (7.11) dla naszego układu sferycznie symetrycznego i scałkujemy po kątach. Stąd wynika następująca struktura symplektyczna w \mathcal{P}_{sym} :

$$\Omega = \int_0^\infty \left(\frac{1}{4}\delta u(r) \wedge \delta l(r) + \frac{1}{2}\delta f(r) \wedge \delta n(r) \right) dr + 4\pi \sum_{K=1}^2 \delta(P_{Kl}(\zeta)) \wedge \delta z^K. \quad (7.24)$$

Dla celów czysto rachunkowych wygodnie będzie zapisać dwuformę Ω jako różniczkę zewnętrzną $\Omega = \delta\Theta$ następującej jednoformy:

$$\Theta = \int_0^\infty \left(\frac{1}{4}u(r)\delta l(r) - \frac{1}{2}n(r)\delta f(r) \right) dr + 4\pi l(\zeta) \sum_{K=1}^2 P_K \delta z^K. \quad (7.25)$$

Każde sferycznie symetryczne rozwiązanie równań Einsteina musi być izomorficzne z rozwiązaniem Schwarzschilda, a jedynym, które spełnia warunek regularności w $r = 0$ jest płaska czasoprzestrzeń Minkowskiego. Stąd wynika, że geometria \mathcal{C} powinna być gładką trójwymiarową podprzestrzenią przestrzeni Minkowskiego dla $r < \zeta$ i podprzestrzenią czasoprzestrzeni Schwarzschilda dla $r > 0$.

7.2 Rozwiązanie równań więzów

Aby rozwiązać równania więzów musimy nałożyć warunek cechowania ustalający jednoznacznie współrzędną czasową. Z powodów czysto technicznych zaczniemy od rodziny cechowań, która została użyta w pracy J. Kijowskiego i J. Jezierskiego [14] w celu pokazania dodatniości energii ADM. W dalszej części rachunków przejdziemy już do jednoznacznego warunku cechowania.

Rozważmy więc następujący warunek cechowania $\beta P^{33} g_{33} + P^{AB} g_{AB} = 0$, gdzie β jest pewną ustaloną stałą. Warunek ten wyrażony za pomocą naszych zmiennych przyjmuje postać

$$\frac{u}{n} = -\beta \frac{f}{l}. \quad (7.26)$$

W naszych rachunkach będziemy rozważać tylko wartości $\beta < -1$. Stosując powyższą zależność do równania (7.22) widzimy, że poza powłoką rozważane dane początkowe muszą spełniać następujące równanie

$$f' + \frac{1}{2}\beta \frac{l'}{l} f = 0. \quad (7.27)$$

Stąd wynika, że funkcja $\log(f l^{\frac{\beta}{2}})$ jest stała poza powłoką. A więc mamy, że

$$f = \begin{cases} A_+ l^{-\frac{\beta}{2}} & \text{dla } r > \zeta, \\ A_- l^{-\frac{\beta}{2}} & \text{dla } r < \zeta. \end{cases} \quad (7.28)$$

Skok ($A_+ - A_-$) jest także wyznaczony przez równanie (7.22) – jedyny człon osobliwy po prawej stronie tego równania pochodzi ze skoku f i jest równy $(A_+ - A_-)(l(\zeta))^{-\frac{\beta}{2}} \Delta(r - \zeta)$. Oznaczmy fizyczny promień powłoki następująco

$$R := \sqrt{l(\zeta)},$$

a unormowaną radialną składową pędu przez U

$$U := \frac{P}{n(\zeta)\sqrt{l(\zeta)}} = \frac{4\pi p s}{n(\zeta)R}. \quad (7.29)$$

Z równania (7.22) otrzymujemy:

$$A_+ - A_- = -2UR^{1+\beta}. \quad (7.30)$$

Równanie więzów wciąż jest nierozwiązane, ponieważ muszą być spełnione warunki brzegowe, tzn. dla $r \rightarrow \infty$ dane początkowe muszą być asymptotycznie płaskie, a dla $r \rightarrow 0$ zachowywać się regularnie. Biorąc pod uwagę, że l musi się zachowywać jak r^2 zarówno w zerze jak i w nieskończoności, powyższy warunek daje nam, że dla $\beta < -1$ mamy $A_+ = 0$ (ponieważ powinno zachodzić, że $f(\infty) = 0$). Stąd mamy:

$$f = \begin{cases} 0 & \text{dla } r > \zeta, \\ 2UR^{1+\beta} l^{-\frac{\beta}{2}} & \text{dla } r < \zeta. \end{cases} \quad (7.31)$$

Rozwiążemy teraz drugą część (7.23) naszego skalarnego równania więzów. Najpierw przeprowadzimy analizę tego równania poza powłoką. Korzystając z warunku cechowania (7.26) oraz przed chwila otrzymanego rozwiązania (7.28), dostajemy następujące równanie:

$$0 = \left(\frac{l'}{n}\right)' - n - \frac{1}{4} \frac{(l')^2}{ln} + \frac{1+2\beta}{4l^{1+\beta}} n A_{\pm}^2, \quad (7.32)$$

gdzie A_{\pm} oznacza A_+ na zewnątrz powłoki oraz A_- wewnątrz niej. Wprowadźmy następującą wielkość:

$$k := \frac{l'}{n\sqrt[4]{l}}. \quad (7.33)$$

Stąd widać, że równanie (7.32) może być przepisane w następujący sposób:

$$0 = \frac{\sqrt[4]{l}}{n} k' - 1 + \frac{1+2\beta}{4l^{1+\beta}} A_{\pm}^2, \quad (7.34)$$

co jest równoważne

$$0 = \left\{ k^2 - 4\sqrt{l} \left(1 + \frac{A_{\pm}^2}{4l^{1+\beta}} \right) \right\}'. \quad (7.35)$$

To oznacza, że różniczkowana funkcja musi być kawałkami ciągła. Z regularności metryki w $r = 0$ wynika, że dla małych r funkcja l musi się zachowywać jak $n^2 r^2$. A stąd mamy, że k^2 zachowuje się jak $4\sqrt{l}$ i nie ma żadnej dodatkowej wewnętrznej stałej. Oznaczając pozostałą zewnętrzną stałą przez „ $-8H$ ”, dostajemy

$$\frac{l'}{n} = \begin{cases} \pm 2\sqrt{l} \sqrt{1 - \frac{2H}{\sqrt{l}} + \frac{A_{\pm}^2}{4l^{1+\beta}}} & \text{dla } r > \zeta, \\ 2\sqrt{l} \sqrt{1 + \frac{A_{\pm}^2}{4l^{1+\beta}}} & \text{dla } r < \zeta, \end{cases} \quad (7.36)$$

gdzie znak \pm występujący w pierwszej linijce tego wzoru zależy od tego, czy pochodna l' jest dodatnia czy ujemna. Poza powłoką znak ten może się zmieniać w punktach, w których wyrażenie pod pierwiastkiem znika. Z kolei wewnątrz powłoki znak ten jest jednoznacznie dodatni, ponieważ dla przestrzennopodobnej powierzchni w przestrzeni Minkowskiego l jest zawsze rosnące

Twierdzimy, że wartość H jest równa energii ADM liczonej dla $r \rightarrow \infty$. Aby to sprawdzić, wybierzmy współrzędną r w taki sposób, że dla dużych wartości r mamy $l(r) = r^2$. Wtedy z równania (7.36) wynika

$$g_{33} = n^2 = \frac{1}{1 - \frac{2H}{r} + \frac{A_{\pm}^2}{4r^{2+2\beta}}}, \quad (7.37)$$

gdzie $A_{\pm} = 0$. Stąd wnioskujemy, że H może pełnić rolę hamiltonianu naszego systemu. Wartość H może być wyznaczona z osobliwej części równania (7.23) – osobliwa część prawej strony tego równania jest równa skokowi $\frac{l'}{n}$. Stąd mamy:

$$-8\pi e = 2R \left(\epsilon \sqrt{1 - \frac{2H}{R} + \frac{A_{\pm}^2}{4R^{2+2\beta}}} - \sqrt{1 + \frac{A_{\pm}^2}{4R^{2+2\beta}}} \right), \quad (7.38)$$

gdzie ϵ oznacza znak l' na zewnątrz powłoki. Korzystając z dotychczasowych wyników, oraz naszego pseudo-równania stanu otrzymujemy:

$$-U = \epsilon \sqrt{1 - \frac{2H}{R}} - \sqrt{1 + U^2} . \quad (7.39)$$

oraz wyrażenie na hamiltonian

$$H(R, U) = \frac{R}{2} \left\{ 1 - \left(\sqrt{1 + U^2} - U \right)^2 \right\} . \quad (7.40)$$

Także wartość ϵ jest jednoznacznie otrzymana z równania (7.39):

$$\epsilon = \operatorname{sgn} \left(\sqrt{1 + U^2} - U \right) = 1 . \quad (7.41)$$

Widzimy, że nasza zredukowana przestrzeń fazowa $\tilde{\mathcal{P}}$ może być globalnie parametryzowana dwiema zmiennymi R oraz U , gdzie funkcja l i stałe ζ oraz β pełnią rolę stałych cechowania. W danym punkcie (R, U) konkretny wybór tych stałych pozwala nam na zrekonstruowanie wszystkich danych Cauchy'ego, przy wartościach A_{\pm} i H zadanych jednoznacznie równaniami (7.31) oraz (7.40). Stałe cechowania nie są jednak zupełnie dowolne. Jeden warunek jest oczywisty: $l(\zeta) = R^2$. Oprócz tego l musi rosnać monotonicznie od 0 do R^2 wewnątrz powłoki, tzn. dla $r < \zeta$. Ponieważ znak „ ϵ ” dany równaniem (7.41) jest dodatni, na zewnątrz powłoki l musi być rosnąca (a z powodu asymptotycznej płaskości zachowywać się jak r^2 w nieskończoności). Wybrana może być dowolna funkcja l spełniająca te warunki. Zatem równania (7.36), (7.31) oraz (7.26) umożliwiają nam kompletną rekonstrukcję danych (n, l, f, u) . Wewnątrz naszej podprzestrzeni cechowania określonej warunkiem (7.26), wszystkie stany mogą być otrzymane w ten sposób. Pokażemy, że stany układu trzymane dla wyboru innych wartości ζ i l , są im równoważne z dokładnością do cechowania.

Dla ujemnych wartości β z równania (7.31) dostajemy, że całkowita zewnętrzna krzywizna naszej powierzchni znika na zewnątrz powłoki: $P^{kl} = 0$. Ponieważ czasoprzestrzeń na zewnątrz powłoki musi być czasoprzestrzenią Schwarzschilda z masą H , jedynymi powierzchniami spełniającymi ten warunek są standardowe powierzchnie $\{t = \text{const}\}$. Powierzchnie Cauchy'ego odpowiadające różnym ujemnym wartościom β pokrywają się zatem na zewnątrz powłoki i różnią między sobą tylko wewnątrz powłoki.

7.3 Struktura kanoniczna zredukowanej przestrzeni fazowej

Dynamika naszego układu będzie zadana jednoznacznie przez hamiltonian (7.40), gdy tylko będziemy znali zredukowaną strukturę symplektyczną wyrażoną za pomocą zmiennych grawitacyjnych (R, U) i dodatkowej zmiennej wynikającej z obecności materii.

Możliwa jest sytuacja, gdy nie ma materii w ogóle, lagranżjan materii jest równy zero. A jednak czasoprzestrzeń ma osobliwość, nasza „powłoka zerowa” jest wtedy po prostu falą uderzeniową (*shock wave*) czystej grawitacji. Przestrzeń fazowa jest wtedy dwuwymiarowa, forma symplektyczna składa się tylko z części grawitacyjnej, której redukcja jest opisana poniżej.

7.3.1 Redukcja grawitacyjnej części formy symplektycznej

Obetnijmy grawitacyjną część formy kanonicznej Ω do przestrzeni cechowania (7.26) i wyrażmy ją za pomocą parametrów (R, U, l, ζ) . Okazuje się, że forma ta nie zależy od l i ζ co pokazuje, że są one tylko zmiennymi cechowania. Z powodów technicznych łatwiej jest pracować z jednoformą Θ daną wzorem (7.25), ponieważ redukcja (sferyczna w naszym przypadku) komutuje z różniczką zewnętrzną.

Korzystając z (7.26) możemy przepisać (7.25) następująco:

$$\begin{aligned} \Theta &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{4} u \delta l - \frac{1}{2} n \delta \left(l^{-\frac{\beta}{2}} f l^{\frac{\beta}{2}} \right) \right) + 4\pi R^2 \sum_{K=1}^2 P_K \delta z^K \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{4} n \left(\frac{u}{n} + \beta \frac{f}{l} \right) \delta l - \frac{1}{2} n l^{-\frac{\beta}{2}} \delta \left(f l^{\frac{\beta}{2}} \right) \right) + 4\pi R^2 \sum_{K=1}^2 P_K \delta z^K . \end{aligned} \quad (7.42)$$

Redukcja powyższej formy do podprzestrzeni danych początkowych spełniających warunków cechowania (7.26) oznacza znikanie całki z pierwszego wyrażenia w powyższym wzorze.

Z równania (7.31) otrzymujemy:

$$f l^{\frac{\beta}{2}} = 2UR^{1+\beta} B(\zeta - r) , \quad (7.43)$$

gdzie przez B oznaczyliśmy funkcję Heaviside'a. Zatem:

$$\left\{ \delta \left(f l^{\frac{\beta}{2}} \right) \right\} (r) = 2B(\zeta - r) \delta(UR^{1+\beta}) . \quad (7.44)$$

Stąd mamy:

$$-\frac{1}{2} \int_0^\infty n l^{-\frac{\beta}{2}} \left\{ \delta \left(f l^{\frac{\beta}{2}} \right) \right\} (r) dr = - \left\{ \int_0^\zeta \left(n l^{-\frac{\beta}{2}} \right) (r) dr \right\} \delta(UR^{1+\beta}) , \quad (7.45)$$

ponieważ $l(\zeta) = R^2$. Ostatecznie otrzymujemy

$$\Theta = -w_- \delta(UR^{1+\beta}) + 4\pi R^2 \sum_{K=1}^2 P_K \delta z^K , \quad (7.46)$$

gdzie przez w_- oznaczyliśmy

$$w_- := \int_0^\zeta \left(n l^{-\frac{\beta}{2}} \right) (r) dr . \quad (7.47)$$

Korzystając z równania (7.36) otrzymujemy:

$$w_- := \int_0^\zeta \frac{n}{l'} l^{-\frac{\beta}{2}} l' dr = \int_0^\zeta \frac{l^{-\frac{1+\beta}{2}}}{2\sqrt{1 + \left\{ U \left(\frac{\sqrt{l}}{R} \right)^{-(1+\beta)} \right\}^2}} l' dr . \quad (7.48)$$

Ponieważ l jest funkcją monotoniczną w przedziale $[0, \zeta]$ oraz $-(1 + \beta) > 0$, możemy dokonać zamiany zmiennych w powyższej całce. Będziemy całkować po

$$\xi := U \left(\frac{\sqrt{l}}{R} \right)^{-(1+\beta)} , \quad (7.49)$$

w przedziale $[0, U]$. Stąd

$$w_- = -\frac{1}{1+\beta} (UR^{1+\beta})^{\frac{2}{1+\beta}-1} \int_0^U \frac{\xi^{-\frac{2}{1+\beta}}}{\sqrt{1+\xi^2}} d\xi . \quad (7.50)$$

Ta ostatnia całka może być oznaczona jako $F(U)$, gdzie F jest całką nieoznaczoną. Okazuje się, że konkretna postać funkcji F nie będzie nam potrzebna. Mamy bowiem:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\beta} F(U) (UR^{1+\beta})^{\frac{2}{1+\beta}-1} \delta(UR^{1+\beta}) &= \frac{1}{2} F(U) \delta \left(U^{\frac{2}{1+\beta}} R^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \delta \left(F(U) U^{\frac{2}{1+\beta}} R^2 \right) - \frac{1}{2} R^2 U^{\frac{2}{1+\beta}} F'(U) \delta(U) \\ &= \frac{1}{2} \delta \left(F(U) U^{\frac{2}{1+\beta}} R^2 \right) - \frac{1}{2} R^2 \frac{1}{\sqrt{1+U^2}} \delta(U) \end{aligned} \quad (7.51)$$

Pierwszy człon jest całkowitą różniczką (wariacyjną). A więc może być pominięty przy liczeniu różniczki zewnętrznej $\Omega = \delta\Theta$. Biorąc pod uwagę, że

$$\frac{1}{\sqrt{1+U^2}} \delta(U) = \delta \operatorname{arsinh} U ,$$

możemy przepisać drugi człon następująco:

$$\tilde{\Theta} = -\frac{1}{2} R^2 \delta\mu + 4\pi R^2 \sum_{K=1}^2 P_K \delta z^K , \quad (7.52)$$

gdzie wielkość μ została zdefiniowana jako $\mu := \operatorname{arsinh} U$ albo inaczej $U = \sinh \mu$. Warto również wprowadzić oznaczenie $\rho := R^2$. Wtedy

$$\tilde{\Theta} = -\frac{1}{2} \rho \delta\mu + 4\pi \rho \sum_{K=1}^2 P_K \delta z^K , \quad (7.53)$$

i, konsekwentnie,

$$\Omega = \delta\tilde{\Theta} = -\frac{1}{2}\delta\rho \wedge \delta\mu + 4\pi \sum_{K=1}^2 \delta(\rho P_K) \wedge \delta z^K \quad (7.54)$$

$$= \frac{1}{2}\delta\mu \wedge \delta\rho + 4\pi \sum_{K=1}^2 \delta(\rho P_K) \wedge \delta z^K . \quad (7.55)$$

Natomiast hamiltonian (7.40) można wyrazić za pomocą zmiennych (μ, ρ) w następujący sposób:

$$H(\mu, \rho) = \frac{1}{2}\sqrt{\rho} \{1 - (\cosh \mu - \sinh \mu)^2\} = \frac{1}{2}\sqrt{\rho} (1 - e^{-2\mu}) . \quad (7.56)$$

Dla fali uderzeniowej, gdy stopnie swobody materii od początku znikają, forma symplektyczna (7.55) jest postaci

$$\Omega = \frac{1}{2}\delta\mu \wedge \delta\rho, \quad (7.57)$$

a hamiltonian ma postać (7.56), przy czym teraz μ i ρ są zmiennymi kanonicznymi.

7.3.2 Redukcja materiałowej części formy symplektycznej

Zanim opiszemy sytuację ogólną, rozpatrzmy najpierw szczególny przypadek lagranżjanu, którego struktura przypomina lagranżjan Diraca w teorii pola spinorowego:

$$L = \lambda(z^2 \dot{z}^1 - z^1 \dot{z}^2) ,$$

lub, inaczej, $f = z^2 \dot{z}^1 - z^1 \dot{z}^2$. Daje on nam następujące więzy:

$$P_1 = z^2 , \quad P_2 = -z^1 .$$

Widzimy, że są to więzy drugiego rodzaju. Wstawiając je do formy symplektycznej (7.55) łatwo obliczyć, że redukuje się ona do następującej postaci:

$$\Omega = \frac{1}{2}\delta\mu \wedge \delta\rho + 8\pi\delta(\sqrt{\rho}z^2) \wedge \delta(\sqrt{\rho}z^1) . \quad (7.58)$$

Podobnie jak w teorii spinorowej, jedna część konfiguracji (w elektrodynamice jest to część urojona spinora w reprezentacji Majorany) staje się pędem kanonicznie sprzężonym do drugiej części (do części rzeczywistej w reprezentacji Majorany). Jeśli więc wprowadzić oznaczenia:

$$p := \sqrt{8\pi\rho} z^2 , \quad (7.59)$$

$$q := \sqrt{8\pi\rho} z^1 , \quad (7.60)$$

to otrzymujemy w końcu następującą strukturę symplektyczną

$$\Omega = \delta p \wedge \delta q + \frac{1}{2} \delta \mu \wedge \delta \rho , \quad (7.61)$$

na czterowymiarowej przestrzeni fazowej, parametryzowanej zmiennymi (p, q, μ, ρ) . Ponieważ hamiltonian (7.56) nie zależy od pierwszej pary zmiennych, zatem ewolucja tych zmiennych jest trywialna: pozostają one stałe w czasie. Natomiast równania ewolucji zmiennych „geometrycznych” (μ, ρ) generowane przez hamiltonian (7.56) są następujące:

$$\dot{\rho} = 2\sqrt{\rho}e^{-2\mu} , \quad (7.62)$$

$$\dot{\mu} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \{1 - e^{-2\mu}\} , \quad (7.63)$$

a więc takie same jak w przypadku fali uderzeniowej grawitacji, bez materii, opisanej w poprzednim rozdziale.

Okazuje się, że w ogólnym przypadku lagranżjanu (7.7) zależnego od dwóch stopni swobody daje się przeprowadzić podobną redukcję. Na ogół jednak zmienna μ musi zostać zmodyfikowana o pewną funkcję α od zmiennych (p, q) . W rezultacie pędem kanonicznie sprzężonym do ρ zostanie kombinacja $\nu := \mu - \alpha(p, q)$. W ten sposób hamiltonian (7.56) będzie już zależny od p i q poprzez funkcję $\mu = \nu + \alpha(p, q)$ i dynamika tych zmiennych przestanie być trywialna. Aby się o tym przekonać dokonajmy redukcji materialnej części formy symplektycznej (7.55):

$$\Omega = \frac{1}{2} \delta \mu \wedge \delta \rho + 4\pi \sum_{K=1}^2 \delta(\rho P_K) \wedge \delta z^K , \quad (7.64)$$

w przypadku ogólnym, ale ciągle dla dwóch stopni swobody $K = 1, 2$. Z postaci lagranżjanu materii (7.7) mamy

$$P_K = F_K(z^1, z^2) , \quad (7.65)$$

a więc:

$$\Omega = 4\pi \delta \rho \wedge F_K \delta z^K + 4\pi \rho F_{K,L} \delta z^L \wedge \delta z^K + \frac{1}{2} \delta \mu \wedge \delta \rho . \quad (7.66)$$

Założenie $dF \neq 0$ implikuje, że $F_{2,1} - F_{1,2} \neq 0$. Wyrażenie to jest więc albo dodatnie albo ujemne. Zatem forma $F_{K,L} \delta z^L \wedge \delta z^K$ w dwóch wymiarach jest formą symplektyczną. Z twierdzenia Darboux wynika, że istnieje taki układ współrzędnych $\xi = \xi(z^1, z^2)$ i $\eta = \eta(z^1, z^2)$, w którym

$$F_{K,L} \delta z^L \wedge \delta z^K = \delta(F_K \delta z^K) = \frac{1}{8\pi} \delta(\xi \delta \eta - \eta \delta \xi) . \quad (7.67)$$

Oznacza to, że odpowiednie jednoformy pierwotne różnią się o pełną pochodną:

$$F_K \delta z^K = \frac{1}{8\pi} (\xi \delta \eta - \eta \delta \xi) + \frac{1}{8\pi} \delta \alpha , \quad (7.68)$$

gdzie $\alpha = \alpha(\xi, \eta)$ jest jakąś funkcją zmiennych (ξ, η) . Wstawiając powyższe dwie równości do wzoru (7.66) otrzymujemy zatem Ω w następującej postaci:

$$\Omega = \delta(\sqrt{\rho}\xi) \wedge \delta(\sqrt{\rho}\eta) + \frac{1}{2}\delta(\mu - \alpha) \wedge \delta\rho . \quad (7.69)$$

Możemy więc wprowadzić nowe zmienne kanoniczne

$$p := \sqrt{\rho} \xi , \quad (7.70)$$

$$q := \sqrt{\rho} \eta , \quad (7.71)$$

$$\nu := \mu - \alpha \quad (7.72)$$

i Ω jest wtedy następującej postaci:

$$\Omega = \delta p \wedge \delta q + \frac{1}{2}\delta\nu \wedge \delta\rho . \quad (7.73)$$

Hamiltonian układu, równy ciągle temu samemu wyrażeniu (7.56), wyraża się teraz następująco w języku nowych zmiennych kanonicznych:

$$H(\nu, \rho, p, q) = \frac{1}{2}\sqrt{\rho} \left(1 - e^{-2(\nu + \alpha(\frac{p}{\sqrt{\rho}}, \frac{q}{\sqrt{\rho}}))} \right) . \quad (7.74)$$

Jest to uniwersalna postać hamiltonianu dla sferycznie symetrycznej, samograwitującej powłoki materii świetlnej oddziałującej z dwoma polami materii. Własności konkretnego modelu takiej materii są kodowane w konkretnej postaci funkcji α , zależnej od dwóch zmiennych materialnych $(\frac{p}{\sqrt{\rho}}, \frac{q}{\sqrt{\rho}})$. Funkcję tę wyliczamy jednoznacznie znając konkretną postać funkcji F_K występujących w lagranżjanie.

Przykład : Rozpatrzmy następujący lagranżjan

$$L = \lambda \left((z^2 + 2z^1 z^2) z^1 + ((z^1)^2 - z^1) z^2 \right) .$$

Przepisując go w nowych zmiennych ξ i η takich, że $z^1 = \frac{1}{2}(\xi + \eta)$ oraz $z^2 = \frac{1}{2}(\xi - \eta)$ otrzymujemy

$$\frac{1}{2}\alpha = (z^1)^2 z^2 = \frac{1}{8}(\xi + \eta)(\xi^2 - \eta^2) ,$$

co wyrażone w zmiennych kanonicznych $p = \sqrt{\rho}\xi = \sqrt{\rho}(z^1 + z^2)$, $q = \sqrt{\rho}\eta = \sqrt{\rho}(z^1 - z^2)$ oraz ρ daje:

$$\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{8}\rho^{-3/2}(p+q)(p^2 - q^2) .$$

Hamiltonian całego układu jest wtedy postaci

$$H(\nu, \rho, p, q) = \frac{1}{2}\sqrt{\rho} \left(1 - e^{-2\nu - \frac{1}{2\rho^{3/2}}(p+q)(p^2 - q^2)} \right) .$$

7.3.3 Geometryczna interpretacja μ

Zamierzamy pokazać, że wielkość μ może być interpretowana geometrycznie jako kąt hiperboliczny między wektorem prostopadłym do powierzchni Schwarzschilda $\{t = \text{const.}\}$ (wziętym na zewnętrznej stronie powłoki) i wektorem normalnym do powierzchni Minkowskiego $\{t = \text{const.}\}$ (wziętej po wewnętrznej stronie powłoki). Kąt $\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ między dwoma unormowanymi wektorami \mathbf{u}, \mathbf{v} jest zdefiniowany jako ich iloczyn skalarny:

$$\cosh \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := (\mathbf{u}|\mathbf{v}) . \quad (7.75)$$

Podobnie jak w przypadku geometrii euklidesowej, możemy nazwać tę wielkość kątem między dwiema powierzchniami: Schwarzschilda i Minkowskiego. Aby udowodnić tę interpretację μ wystarczy skorzystać ze wzoru (7.36). Po wewnętrznej stronie powłoki korzystamy z drugiej części wzoru i kładziemy $l = R^2$. Dostajemy wtedy

$$\frac{l'}{2\sqrt{l}n} = \sqrt{1 + U^2} . \quad (7.76)$$

Ale wewnątrz powłoki geometria \mathcal{C} jest dana trójwymiarową sferyczną powierzchnią w przestrzeni Minkowskiego. Widać, że w przestrzeni Minkowskiego wielkość po lewej stronie jest równa $\cosh \alpha$, gdzie α jest dokładnie kątem między taką podprzestrzenią i płaską powierzchnią Minkowskiego $\{t = \text{const.}\}$. Stąd wynika, że $U = \sinh \alpha$. Ale nasza powierzchnia jest gładkim przedłużeniem zewnętrznej powierzchni Schwarzschilda $\{t = \text{const.}\}$. To ostatecznie pokazuje, że $\mu = \alpha$ jest kątem między liśćmi trójwymiarowych foliacji Schwarzschilda i Minkowskiego.

7.4 Dynamika. Rekonstrukcja geometrii czasoprzestrzennej

Hamiltonian (7.74) jednoznacznie generuje dynamikę naszego układu w postaci następujących równań Hamiltona na zmienne kanoniczne (ρ, ν) i (p, q) :

$$\frac{1}{2}\dot{\rho} = \frac{\partial H}{\partial \nu} = \sqrt{\rho}e^{-2(\nu+\alpha)} , \quad (7.77)$$

$$\frac{1}{2}\dot{\nu} = -\frac{\partial H}{\partial \rho} = -\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{\rho}}(1 - e^{-2(\nu+\alpha)}) - \sqrt{\rho}e^{-2(\nu+\alpha)}\frac{\partial \alpha(\rho, p, q)}{\partial \rho} , \quad (7.78)$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \sqrt{\rho}e^{-2(\nu+\alpha)}\frac{\partial \alpha(\rho, p, q)}{\partial p} , \quad (7.79)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\sqrt{\rho}e^{-2(\nu+\alpha)}\frac{\partial \alpha(\rho, p, q)}{\partial q} . \quad (7.80)$$

Pierwsze dwa równania możemy zapisać tylko w zmiennych $\mu = \nu + \alpha$ oraz ρ . Równanie (7.77) przyjmuje więc uniwersalną postać, identyczną jak w formule (7.62):

$$\dot{\rho} = 2\sqrt{\rho}e^{-2\mu} . \quad (7.81)$$

Lewa strona równania (7.78) jest postaci $\frac{1}{2}(\dot{\mu} - \dot{\alpha})$. Wyrażenie $\dot{\alpha}$ można wyznaczyć korzystając z równań (7.79) i (7.80):

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}\left(\frac{p}{\sqrt{\rho}}, \frac{q}{\sqrt{\rho}}\right) &= \frac{\partial\alpha}{\partial\left(\frac{p}{\sqrt{\rho}}\right)} \left(\frac{p}{\sqrt{\rho}}\right)' + \frac{\partial\alpha}{\partial\left(\frac{q}{\sqrt{\rho}}\right)} \left(\frac{q}{\sqrt{\rho}}\right)' \\ &= \frac{\partial\alpha}{\partial\left(\frac{p}{\sqrt{\rho}}\right)} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\dot{p} - \frac{p}{2\rho^{3/2}}\dot{\rho}\right) + \frac{\partial\alpha}{\partial\left(\frac{q}{\sqrt{\rho}}\right)} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\dot{q} - \frac{q}{2\rho^{3/2}}\dot{\rho}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\rho}}e^{-2(\nu+\alpha)} \left(-\frac{\partial\alpha}{\partial\left(\frac{p}{\sqrt{\rho}}\right)}\frac{\partial\alpha}{\partial\left(\frac{q}{\sqrt{\rho}}\right)} + \frac{\partial\alpha}{\partial\left(\frac{q}{\sqrt{\rho}}\right)}\frac{\partial\alpha}{\partial\left(\frac{p}{\sqrt{\rho}}\right)}\right) - \frac{1}{2\rho^{3/2}}\dot{\rho} \left(p\frac{\partial\alpha}{\partial\left(\frac{p}{\sqrt{\rho}}\right)} + q\frac{\partial\alpha}{\partial\left(\frac{q}{\sqrt{\rho}}\right)}\right) \\ &= -\frac{\dot{\rho}}{\rho^{3/2}} \left(p\frac{\partial\alpha}{\partial\left(\frac{p}{\sqrt{\rho}}\right)} + q\frac{\partial\alpha}{\partial\left(\frac{q}{\sqrt{\rho}}\right)}\right). \end{aligned}$$

Ale

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\rho} = -\frac{1}{2}\frac{\partial\alpha}{\partial\left(\frac{p}{\sqrt{\rho}}\right)}\frac{p}{\rho^{3/2}} - \frac{1}{2}\frac{\partial\alpha}{\partial\left(\frac{q}{\sqrt{\rho}}\right)}\frac{q}{\rho^{3/2}}. \quad (7.82)$$

Wobec tego z równania (7.77) na $\dot{\rho}$ otrzymujemy:

$$\dot{\alpha} = -\frac{1}{\rho}e^{-2(\nu+\alpha)} \left(p\frac{\partial\alpha}{\partial\left(\frac{p}{\sqrt{\rho}}\right)} + q\frac{\partial\alpha}{\partial\left(\frac{q}{\sqrt{\rho}}\right)}\right) = 2\sqrt{\rho}e^{-2(\nu+\alpha)}\frac{\partial\alpha}{\partial\rho}. \quad (7.83)$$

Z równań (7.78) i (7.83) otrzymujemy więc znów uniwersalne równanie, identyczne z równaniem (7.63):

$$\dot{\mu} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\rho}}(1 - e^{-2\mu}). \quad (7.84)$$

Widzimy zatem, że dynamika zmiennych „geometrycznych” (ρ, μ) nie zależy od wyboru modelu materii i jest identyczna z tą z przykładu 1, gdy zachodzi $\mu = \nu$ i gdy dynamika materialnych stopni swobody jest trywialna, a także identyczna z przypadkiem grawitacyjnej fali uderzeniowej w pustej przestrzeni, bez materii.

Znając dynamikę zmiennych (ρ, μ) możemy jednoznacznie (z dokładnością do cechowania) odtworzyć czasoprzestrzeń, w której ta dynamika się realizuje. Przypuśćmy bowiem, że mamy jakieś konkretne rozwiązanie równań (7.81) i (7.84). Wybierzemy jakieś cechowanie $\beta < -1$, oraz osobno dla każdego momentu czasu zmienne cechowania ζ i l . To nam pozwala zrekonstruować całkowicie zbiór danych Cauchy’ego w każdym momencie czasu osobno. Aby zrekonstruować całą geometrię czasoprzestrzeni musimy jeszcze mieć funkcje lapsu i shiftu. W tym celu zapiszemy równania Einsteina za pomocą zmiennych kanonicznych g_{kl} oraz P^{kl} . Ponieważ już znamy te obiekty, a także ich pochodne, w każdym momencie czasu, otrzymujemy w rezultacie równania eliptyczne na laps i shift właśnie. Dla lapsu dostajemy w ten sposób równania drugiego rzędu w zmiennej r jako warunek zachowania cechowania β w czasie. To równanie powinno być rozwiązane z następującymi warunkami brzegowymi: $N = 1$ w nieskończoności i $\frac{dN}{dr} = 0$ w $r = 0$. Aby obliczyć shift

powinniśmy skorzystać równania na pochodną czasową trójwymiarowej metryki. Jest to równanie pierwszego stopnia względem funkcji shiftu i pozwala zrekonstruować ją jednoznacznie.

7.4.1 Rozwiązanie równań Hamiltona dla zmiennych geometrycznych

Z równań (7.81) i (7.84):

$$\dot{\rho} = 2\sqrt{\rho}e^{-2\mu} , \quad (7.85)$$

$$\dot{\mu} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\rho}} \{1 - e^{-2\mu}\} , \quad (7.86)$$

mamy, że

$$\frac{d\rho}{d\mu} = -4\rho\frac{e^{-2\mu}}{1 - e^{-2\mu}} . \quad (7.87)$$

Rozwiązaniem powyższego równania jest

$$\sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} = \frac{1}{1 - e^{-2\mu}} . \quad (7.88)$$

Mamy więc następujące równanie na ewolucję czasową μ :

$$\dot{\mu} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\rho_0}} (1 - e^{-2\mu})^2 , \quad (7.89)$$

którego rozwiązanie jest następująco:

$$\log(e^{2\mu} - 1) - \frac{1}{e^{2\mu} - 1} = -\frac{1}{\sqrt{\rho_0}}(t - t_0) . \quad (7.90)$$

Stała ρ_0 wyraża się przez całkowitą energię: $\sqrt{\rho_0} = 2E$. Rozwiązanie równania (7.85) na ewolucję czasową ρ jest następująco:

$$\sqrt{\rho} - E \log \rho = t - t_0 . \quad (7.91)$$

7.5 Zamiana czasu Schwarzschilda na czas Minkowskiego

Równania (7.81) i (7.84) są takie same jak równania Hamiltona na zmienne (μ, ρ) w przypadku, gdy funkcja $\alpha = 0$. Wtedy $\nu = \mu$ i (μ, ρ) są zmiennymi kanonicznymi. Ze względu na taką samą postać równań dynamicznych w dalszych rozważaniach ograniczymy się do przypadku $\alpha = 0$.

Dotychczas ewolucję naszego układu opisywaliśmy w tzw. czasie Schwarzschilda, który w asymptotycznie płaskiej nieskończoności przechodzi w czas Minkowskiego. Możemy jednak opisywać też naszą ewolucję w jakimś innym czasie – to znaczy możemy dokonać innej (3+1)-dekompozycji czasoprzestrzeni. Liście nowej foliacji nie muszą koniecznie pokrywać się z poprzednimi hiperpowierzchniami $\{t = \text{const.}\}$, wymagamy jedynie aby w nieskończoności przestrzennej czas parametryzujący tę foliację pokrywał się z czasem opisującym poprzednią (3+1)-dekompozycję. Liście nowej foliacji „wchodziłyby do nieskończoności” pod innymi kątami, ale przecinałyby ją w tych samych miejscach, co liście parametryzowane czasem Schwarzschilda.

Zamiana zmiennej czasowej nie jest standardową transformacją w mechanice klasycznej. W naszych rozważaniach skorzystamy więc z formalizmu wprowadzonego przez J. Kijowskiego w pracy [9] i opisane tam transformacje zmiennej czasowej z punktu widzenia rozmaitości typu kontaktowego zastosujemy w naszym przypadku zerowym.

Oznaczmy przez v opóźnienie nowej współrzędnej czasowej na powłoce względem starej współrzędnej. To oznacza, że hiperpowierzchnia $S_t^{\mathcal{G}}$ przecina powłokę w momencie czasu Schwarzschilda $t + v(\rho, \mu)$. Zakładamy, że wartość tego opóźnienia zależy od konkretnej sytuacji dynamicznej, tzn. od położenia w przestrzeni fazowej, ale że nie zależy od współrzędnej czasowej, tzn. warunki cechowania są zadane w sposób wewnętrzny, zależą tylko od danych początkowych. Funkcja $v = v(\rho, \mu)$ zawiera całkowitą potrzebną informację o przejściu ze starych współrzędnych $(\rho(t), \mu(t))$ do nowych $(\rho^{\mathcal{G}}(t), \mu^{\mathcal{G}}(t))$, ponieważ jeśli tylko znamy $(\rho(t), \mu(t))$ możemy rozwiązać równania zadające dynamikę układu i położyć:

$$\rho^{\mathcal{G}}(t) := \rho(t + v(\rho(t), \mu(t))) , \quad (7.92)$$

$$\mu^{\mathcal{G}}(t) := \mu(t + v(\rho(t), \mu(t))) . \quad (7.93)$$

Dla dowolnej, różnej od stałej, funkcji v , taka transformacja nie jest zazwyczaj kanoniczna. W dalszej części naszych rozważań pokażemy, jak określić strukturę kanoniczną naszej zredukowanej przestrzeni fazowej za pomocą nowych zmiennych. W tym celu wygodne będzie posługiwanie się językiem rozmaitości typu kontaktowego. Zauważmy, że całkowita informacja o dynamice układu może być uzyskana z trójwymiarowej przestrzeni typu kontaktowego, zdefiniowanej jako powierzchnia $\{E = H(\rho, \mu)\}$ w czterowymiarowej przestrzeni $\{t, E, \rho, \mu\}$ wyposażonej w standardową formę:

$$\Psi := \frac{1}{2} \delta\mu \wedge \delta\rho - \delta E \wedge \delta t . \quad (7.94)$$

Ta forma symplektyczna w czterowymiarowej przestrzeni fazowej degeneruje się przy obcięciu do powierzchni $\{E = H(\rho, \mu)\}$. Trajektorie systemu są jednoznacznie zdefiniowane jako te, do których styczne wektory zawarte są w tej degeneracji. Aby to pokazać wystarczy sparametryzować naszą podprzestrzeń za pomocą trzech zmiennych (t, ρ, μ) , i przepisać formę symplektyczną w następującej postaci:

$$\Psi := \frac{1}{2} \delta\mu \wedge \delta\rho - \left(\frac{\partial H}{\partial \mu} \delta\mu + \frac{\partial H}{\partial \rho} \delta\rho \right) \wedge \delta t . \quad (7.95)$$

Widać, że wektor anihilujący powyższą formę musi być proporcjonalny do wektora

$$Z := \frac{\partial}{\partial t} + \dot{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \dot{\mu} \frac{\partial}{\partial \mu} , \quad (7.96)$$

gdzie $\dot{\rho}$ i $\dot{\mu}$ są dane równaniami Hamiltona (7.81) i (7.84).

W pracy [9] zostało pokazane, że wybór nowego warunku cechowania \mathcal{G} jest równoważny wyborowi zmiennej

$$T := t - v \quad (7.97)$$

jako nowej zmiennej czasowej. Przepiszmy więc naszą formę symplektyczną Ψ przy użyciu nowej współrzędnej T . Wygodniej nam będzie mieć zamiast μ energię E jako niezależny parametr, i traktować μ jako funkcję $\mu = \mu(E, \rho)$ otrzymaną z rozwiązania równania (7.56). Otrzymujemy więc:

$$\Psi = \delta\mu \wedge \delta\rho - \delta E \wedge \delta T + \delta E \wedge \left(\frac{\partial v}{\partial E} \delta E + \frac{\partial v}{\partial \rho} \delta \rho \right) = \frac{1}{2} \left(\delta\mu + 2 \frac{\partial v}{\partial E} \delta E \right) \wedge \delta\rho - \delta E \wedge \delta T . \quad (7.98)$$

Zdefiniujmy teraz funkcję

$$V(E, \rho) := 2 \int \frac{\partial v}{\partial \rho}(E, \rho) dE + a(\rho) = \int \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial R}(E, R) dE + a(\rho) , \quad (7.99)$$

i $a(\rho)$ jest dowolne. Wtedy zmienna $\tilde{\mu}$:

$$\tilde{\mu} := \mu + V(H(\rho, \mu), \rho) \quad (7.100)$$

jest pędem sprzężonym kanonicznie do $\rho^G(t)$, ponieważ:

$$\Psi = \frac{1}{2} \delta \tilde{\mu} \wedge \delta \rho - \delta E \wedge \delta T . \quad (7.101)$$

Różniczkując (7.100) po E otrzymujemy:

$$\frac{\partial}{\partial E}(\tilde{\mu} - \mu) = 2 \frac{\partial v}{\partial \rho}(E, \rho) = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial R}(E, R) . \quad (7.102)$$

Możemy teraz wyznaczyć opóźnienie czasu Minkowskiego T wewnątrz powłoki względem czasu Schwarzschilda t na zewnątrz powłoki. Jako funkcję $\tilde{\mu}$ weźmy $\tilde{\mu} = U = 4\pi p / R n_-(\zeta)$ (p. wzór (7.29)), gdzie funkcja $n_-(\zeta)$ jest liczona po wewnętrznej stronie powłoki. Zatem:

$$\tilde{\mu} = \sinh \mu \sqrt{1 - \frac{2E}{R}} = \sinh \mu e^\mu , \quad (7.103)$$

ponieważ $\sqrt{1 - \frac{2E}{R}} = e^\mu$. Mamy także:

$$\frac{\partial \mu}{\partial E} = \frac{1}{(R - 2E)} . \quad (7.104)$$

Równanie na $\sinh \mu$ pozwala nam wyznaczyć $\tilde{\mu}$ za pomocą E i R :

$$\tilde{\mu} = \sinh \mu \sqrt{1 - \frac{2E}{R}} = \frac{E}{R} \quad (7.105)$$

i stąd:

$$\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial E} = \frac{1}{R} . \quad (7.106)$$

Ze wzoru (7.102) otrzymujemy

$$\frac{\partial v}{\partial R} = \frac{-2E}{R - 2E} . \quad (7.107)$$

Aby pokazać, że powyższa wielkość opisuje opóźnienie czasu Minkowskiego T wewnątrz powłoki względem zewnętrznego czasu Schwarzschilda T , różniczkujemy równanie (7.97) po t :

$$\dot{T} = 1 - \frac{\partial v}{\partial R} \dot{R} , \quad (7.108)$$

przy czym skorzystaliśmy z tego, że $\dot{E} \equiv 0$. Pochodna \dot{R} może być wyznaczona z równania (7.81), przy czym hamiltonian jest dany równaniem (7.56). Stąd otrzymujemy:

$$\frac{\partial v}{\partial R} \dot{R} = -\frac{2E}{R} \quad (7.109)$$

i ostatecznie

$$\dot{T} = 1 - \frac{2E}{R} . \quad (7.110)$$

Wartość opóźnienia między czasem Minkowskiego T a czasem Schwarzschilda t może być otrzymana z wycałkowania prawej strony wzoru (7.107) po zmiennej R , otrzymując

$$v(E, R) = -2E \log |R - 2E| , \quad (7.111)$$

a więc

$$T = t + 2E \log |R - 2E| = t + 2R\tilde{\mu} \log R |1 - 2\tilde{\mu}| . \quad (7.112)$$

Hamiltonian wyrażony za pomocą zmiennych liczonych w czasie Minkowskiego jest następujący:

$$H = \sqrt{\rho} \tilde{\mu} \quad (7.113)$$

a równania Hamiltona przyjmują postać:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dT} \rho = \sqrt{\rho} , \quad (7.114)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dT} \tilde{\mu} = -\frac{1}{2} \frac{\tilde{\mu}}{\sqrt{\rho}} . \quad (7.115)$$

Uwzględniając to, że $\frac{d}{dT} = \frac{dt}{dT} \frac{d}{dt}$ i związek (7.112) między t a T otrzymujemy równania (7.85) i (7.86).

Rozwiązanie układu równań różniczkowych (7.114) i (7.115) jest następujące:

$$\sqrt{\rho} - \sqrt{\rho_0} = (T - T_0) , \quad (7.116)$$

$$\tilde{\mu} = \frac{\tilde{\mu}_0 T_0}{T} . \quad (7.117)$$

Pamiętając o tym, że $\sqrt{\rho} = R$ widzimy, że powyższe rozwiązanie na R odpowiada liniowej propagacji frontu falowego w przestrzeni Minkowskiego z prędkością równą 1. Ewolucja $\tilde{\mu}$ jest dużo mniej banalna. W czasie $T = 0$ następuje skrzyżowanie się frontów falowych, kolaps, którym się tutaj nie zajmujemy.

7.6 Hamiltonian dla dynamiki parametryzowanej czasem Minkowskiego

Przejście ze starych współrzędnych $(\rho(t), \mu(t))$ do nowych $(\rho^{\mathcal{G}}(t), \mu^{\mathcal{G}}(t))$:

$$\rho^{\mathcal{G}}(t) := \rho(t + v(\rho(t), \mu(t))) , \quad (7.118)$$

$$\mu^{\mathcal{G}}(t) := \mu(t + v(\rho(t), \mu(t))) . \quad (7.119)$$

nie jest zazwyczaj transformacją kanoniczną. Jak zostało pokazane w pracy [9], przekształceniem kanonicznym jest transformacja $(\mu, \rho) \mapsto (\tilde{\mu}^{\mathcal{G}}, \rho^{\mathcal{G}})$. W nowych współrzędnych mamy nowy hamiltonian $H^{\mathcal{G}}$ taki, że:

$$\frac{1}{2} \dot{\rho}^{\mathcal{G}} = \frac{\partial H^{\mathcal{G}}}{\partial \tilde{\mu}^{\mathcal{G}}} , \quad (7.120)$$

$$\frac{1}{2} \dot{\tilde{\mu}}^{\mathcal{G}} = - \frac{\partial H^{\mathcal{G}}}{\partial \rho^{\mathcal{G}}} . \quad (7.121)$$

Pochodną po czasie $\dot{\rho}^{\mathcal{G}}$ możemy przekształcić następująco:

$$\frac{d\rho^{\mathcal{G}}(t)}{dt} = \frac{d\rho(t + v(\rho(t), \mu(t)))}{d(t + v(\rho(t), \mu(t)))} \frac{d(t + v(t))}{dt} . \quad (7.122)$$

Wyrażenie $\frac{d\rho(t+v)}{d(t+v)}$ można wyrazić przez równania Hamiltona w starych zmiennych, tzn.

$$\frac{1}{2} \frac{d\rho(t+v)}{d(t+v)} = \frac{\partial H}{\partial \mu}$$

w chwili $t + v$. Mamy więc:

$$\left. \frac{\partial H}{\partial \mu} \right|_{t+v} \left. \frac{d(t+v(t))}{dt} \right|_t = \left. \frac{\partial H^{\mathcal{G}}}{\partial \tilde{\mu}^{\mathcal{G}}} \right|_t , \quad (7.123)$$

$$\left. \frac{\partial H}{\partial \rho} \right|_{t+v} \left. \frac{d(t+v(t))}{dt} \right|_t = \left. \frac{\partial H^{\mathcal{G}}}{\partial \rho^{\mathcal{G}}} \right|_t . \quad (7.124)$$

Korzystając z wyników z poprzedniego rozdziału mamy:

$$\frac{d(t+v(t))}{dt} = -(t-v) - 2 = -\dot{T} - 2 = 1 + \frac{2E}{R} = 1 + 2\tilde{\mu} . \quad (7.125)$$

Hamiltonian w starych zmiennych jest następujący:

$$H(\mu, \rho) = \frac{1}{2}\sqrt{\rho} (1 - e^{-2\mu}) = \tilde{\mu}\sqrt{\rho} . \quad (7.126)$$

Otrzymujemy więc

$$\left. \frac{\partial H}{\partial \rho} \right|_{t+v} = \left. \frac{1}{2} \frac{\tilde{\mu}}{\sqrt{\rho}} \right|_{t+v} = \left. \frac{1}{2} \frac{\tilde{\mu}^{\mathcal{G}}}{\sqrt{\rho^{\mathcal{G}}}} \right|_t \quad (7.127)$$

oraz

$$\frac{\partial H}{\partial \mu} = \sqrt{\rho} (1 - 2\tilde{\mu}) , \quad (7.128)$$

a stąd

$$\left. \frac{\partial H}{\partial \mu} \right|_{t+v} = \sqrt{\rho^{\mathcal{G}}} (1 - 2\tilde{\mu}^{\mathcal{G}}) . \quad (7.129)$$

Ostatecznie otrzymujemy układ dwóch równań:

$$\frac{\partial H^{\mathcal{G}}}{\partial \rho^{\mathcal{G}}(t)} = \frac{1}{2} \frac{\tilde{\mu}^{\mathcal{G}}(t)}{\sqrt{\rho^{\mathcal{G}}(t)}} (1 + 2\tilde{\mu}(t)) , \quad (7.130)$$

$$\frac{\partial H^{\mathcal{G}}}{\partial \tilde{\mu}^{\mathcal{G}}(t)} = \sqrt{\rho^{\mathcal{G}}(t)} (1 - 2\tilde{\mu}^{\mathcal{G}}(t)) (1 + 2\tilde{\mu}(t)) . \quad (7.131)$$

Aby rozwiązać powyższy układ trzeba znać rozwiązanie $\tilde{\mu}(t)$, które jest dane w sposób uwikłany równaniem (7.90):

$$\log \frac{2\tilde{\mu}}{1-2\tilde{\mu}} - \frac{1-2\tilde{\mu}}{2\tilde{\mu}} = -\frac{1}{2E}(t-t_0) . \quad (7.132)$$

Nie potrafimy rozwiązać powyższego równania, ale możemy spróbować przynajmniej wyznaczyć postać $H^{\mathcal{G}}(\rho^{\mathcal{G}}, \tilde{\mu}^{\mathcal{G}}) = F(f(\rho^{\mathcal{G}}, \tilde{\mu}^{\mathcal{G}}))$, gdzie F jest dowolną funkcją jednej zmiennej, a f pewną kombinacją $\rho^{\mathcal{G}}$ i $\tilde{\mu}^{\mathcal{G}}$. Wtedy $H^{\mathcal{G}}$ jest stałe na powierzchniach $f(\rho^{\mathcal{G}}, \tilde{\mu}^{\mathcal{G}}) = \text{const.}$, a więc

$$(H_{\rho^{\mathcal{G}}}^{\mathcal{G}}, H_{\tilde{\mu}^{\mathcal{G}}}^{\mathcal{G}}) \equiv \text{grad } H \parallel \text{grad } f \equiv (f_{\rho^{\mathcal{G}}}, f_{\tilde{\mu}^{\mathcal{G}}}) . \quad (7.133)$$

Ten warunek jest spełniony, jeśli

$$\frac{f_{\rho^{\mathcal{G}}}}{f_{\tilde{\mu}^{\mathcal{G}}}} = \frac{H_{\rho^{\mathcal{G}}}^{\mathcal{G}}}{H_{\tilde{\mu}^{\mathcal{G}}}^{\mathcal{G}}} = \frac{1}{2\rho^{\mathcal{G}}} \frac{\tilde{\mu}^{\mathcal{G}}}{1-2\tilde{\mu}^{\mathcal{G}}} . \quad (7.134)$$

Powyższe równanie jest spełnione przez $f = \sqrt{\rho^{\mathcal{G}}}\tilde{\mu}^{\mathcal{G}}e^{-2\tilde{\mu}^{\mathcal{G}}}$, a więc hamiltonian układu jest pewną funkcją zmiennej $\sqrt{\rho^{\mathcal{G}}}\tilde{\mu}^{\mathcal{G}}e^{-2\tilde{\mu}^{\mathcal{G}}}$:

$$H^{\mathcal{G}} = F\left(\sqrt{\rho^{\mathcal{G}}}\frac{\tilde{\mu}^{\mathcal{G}}}{e^{2\tilde{\mu}^{\mathcal{G}}}}\right) . \quad (7.135)$$

Efektywnie nic więcej nie da się policzyć, ponieważ równania ruchu, tzn zależności $\mu(t)$ i $\rho(t)$, nie wyrażają się przez funkcje elementarne.

Bibliografia

- [1] R. Arnowitt, S. Deser, C. Misner, *The dynamics of general relativity*, in: Gravitation: an introduction to current research, ed. L. Witten, p. 227 (Wiley, New York, 1962).
- [2] A. Ashtekar, C. Beetle, O. Dreyer, S. Fairhurst, B. Krishnan, J. Lewandowski, J. Wiśniewski, *Generic isolated horizons and their applications*, Phys. Rev. Lett. **85** (2000) p. 3564-3567;
A. Ashtekar, S. Fairhurst, B. Krishnan, *Isolated horizons: Hamiltonian evolution and the first Law*, Phys. Rev. D **62** (2000) p. 104025.
- [3] A. Ashtekar, C. Beetle, J. Lewandowski, *Geometry of generic isolated horizons*, Class. Quantum Grav. **19** (2002) pp. 1195–1225.
- [4] C. Barrabés, W. Israel, *Thin shells in general relativity: The lightlike limit*, Phys. Rev. D **43** (1991) p. 1129–1142.
- [5] F. J. Belinfante, *On the spin angular momentum of mesons*, Physica **6** (1939) pp. 887–897 and Physica 7 (1940) p. 449;
L. Rosenfeld, *Sur le tenseur d'impulsion-énergie*, Acad. Roy. Belg. Mem. Class. Sci. **18** (1940) pp. 1–30.
- [6] P. Chruściel, J. Jezierski, J. Kijowski, *Hamiltonian field theory in the radiating regime*, monograph (174 pages), volume **70** of the series: Springer Lecture Notes in Physics, Monographs (2001).
- [7] P. Hájíček, B. S. Kay and K. Kuchař, *Quantum collapse of a self-gravitating shell – equivalence to Coulomb scattering*, Phys. Rev. D **46** (1992) pp. 5439–5448.
- [8] P. Hájíček, J. Kijowski, *Lagrangian and Hamiltonian formalism for discontinuous fluid and gravitational field*, Phys. Rev. D **57** (1998) pp. 914–935.
- [9] P. Hájíček, J. Kijowski, *Spherically symmetric dust shell and the time problem in Canonical Relativity*, Phys. Rev. D **62** (2000) pp. 044025-1–044025-5.
- [10] P. Hájíček and I. Kouletsis, *Pair of null gravitating shells I. space of solutions and symmetry*, Class. Quantum Grav. **19** (2002) pp. 2529–2550;
P. Hájíček and I. Kouletsis, *Pair of null gravitating shells II. Canonical theory and*

- embedding variables*, Class. Quantum Grav. **19** (2002) pp. 2551–2566;
- I. Kouletsis and P. Hájíček, *Pair of null gravitating shells III. Algebra of Dirac observables*, Class. Quantum Grav. **19** (2002) pp. 2567–2586;
- P. Hájíček, *Quantum theory of gravitational collapse (lecture notes on quantum cosmology)*, preprint BUTP-02/4, lecture notes for the talk “Quantum theory of gravitational collapse” given at the 271. WE-Heraeus-Seminar “Aspects of Quantum Gravity” at Bad Honnef, 25 February – 1 March 2002.
- [11] M. Heusler, *Black hole uniqueness theorems*, Cambridge University Press 1966;
M. Heusler, *Stationary black holes: uniqueness and beyond*, Living Rev. Relativity **1** (1998).
- [12] W. Israel, *Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity*, Nuovo Cimento **44B** (1966) pp. 1–14.
- [13] W. Israel, *Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity*, Nuovo Cimento **48B** (1967) pp. 463–463.
- [14] J. Jezierski, J. Kijowski, *Positivity of total energy in general relativity*, Phys. Rev. D **36** (1987) pp. 1041–1044.
- [15] J. Jezierski, J. Kijowski, E. Czuchry, *Geometry of null-like surfaces in general relativity and its application to dynamics of gravitating matter*, Rep. Math. Phys. **46** (2000) pp. 397–418.
- [16] J. Jezierski, J. Kijowski, E. Czuchry, *Dynamics of a self gravitating light-like matter shell: A gauge-invariant Lagrangian and Hamiltonian description*, Phys. Rev. D **65** (2002), p. 064036.
- [17] J. Kijowski, *On a new variational principle in general relativity and the energy of the gravitational field*, Gen. Relat. Grav. **9** (1978), pp. 857–877.
- [18] J. Kijowski, *Asymptotic degrees of freedom and gravitational energy*, in Proceedings of Journées Relativistes 1983, Pitagora Editrice, Bologna 1985, p.205 – 219; *Unconstrained degrees of freedom of gravitational field and the positivity of gravitational energy*, in Gravitation, Geometry and Relativistic Physics, Springer Lecture Notes in Physics, vol. **212** (1984) p. 40–50.
- [19] J. Kijowski, *A simple derivation of canonical structure and quasi-local Hamiltonians in general relativity*, Gen. Relat. Grav. **29** (1997) pp. 307–343.
- [20] J. Kijowski, A. Smólski and A. Górnicka, *Hamiltonian theory of self-gravitating perfect fluid and a method of effective deparametrization of the Einsteinian theory of gravitation*, Phys. Rev. D. **41** (1990) p. 1875–1884;
J. Kijowski and G. Magli, *Relativistic elastomechanics as a Lagrangian field theory*, Journ. Geometry and Phys. **9** (1992) p. 207–223;

- J. Kijowski and G. Magli, *Unconstrained hamiltonian formulation of general relativity with thermo-elastic sources*, *Class. Quantum Grav.* **15** (1998) pp. 3891–3916.
- [21] J. Kijowski, “*True degrees of freedom*” of a spherically symmetric, self-gravitating dust shell, *Acta Phys. Polon.* **B 29** (1998) pp. 1001–1013.
- [22] J. Louko, B.F. Whiting, and J.L. Friedman, *Hamiltonian spacetime dynamics with a spherical null-dust shell*, *Phys. Rev. D* **57** (1998) p. 2279.
- [23] C. Lanczos, *Phys. Zeits.*, **23** (1922) p. 539; *Ann. der Phys.*, **74** (1924) p. 518.
- [24] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, *Gravitation*, N.H. Freeman and Co, San Francisco, Cal. 1973.
- [25] P. Nurowski, D.C. Robinson, *Intrinsic geometry of a null hypersurface*, *Class. Quantum Grav.* **17** (2000) pp. 4065–4084.
- [26] A.H. Taub, *Space-times with distribution valued curvature tensors*, *J. Math. Phys.* **21** (1980) pp. 1423–1431.
- [27] R.M. Wald, *Black hole entropy is the Noether charge*, *Phys. Rev. D* **48** (1993) pp. R3427–R3431;
V. Iyer and R.M. Wald, *Some properties of the Noether charge and a proposal for dynamical black hole entropy*, *Phys. Rev. D* **50** (1994) pp. 846–864;
V. Iyer and R.M. Wald, *Comparison of the Noether charge and Euclidean methods for computing the entropy of stationary black holes*, *Phys. Rev. D* **52** (1995) pp. 4430–4439.