

# Funkcjonowanie wybranych metod ryzyka inwestycyjnego dla wybranych empirycznych szeregów czasowych.

## Wprowadzenie do miary ryzyka.

---

AGNIESZKA TOFIL

WYDZIAŁ FIZYKI

UNIwersytet Warszawski

12 MAJA 2015

# Plan prezentacji

---

1. Definicja ryzyka inwestycyjnego
2. Wykładnik Hursta jako miara ryzyka inwestycyjnego
3. Metoda wyznaczania wykładnika Hursta
4. Wyniki empiryczne
5. Multifraktalna analiza fluktuacji
6. Podsumowanie

# Ryzyko Inwestycyjne

---

Jest to ryzyko, że zrealizowana stopa zwrotu z inwestycji może różnić się od stopy zwrotu oczekiwanej przez inwestora z uwagi na czynniki losowe. Ryzyko można podzielić na wiele składników, na które wpływ ma szereg różnych czynników nie tylko natury ekonomicznej. Z ryzykiem mamy do czynienia wtedy i tylko wtedy, gdy ceny papierów wartościowych zależą bezpośrednio od sytuacji na rynku. Oczywiście, zależność ta jest w większym lub mniejszym stopniu stale obecna. Zatem, ryzyko rynkowe jest nieusuwalnym elementem aktywności rynkowej. Sam fakt zrozumienia tego co to jest ryzyko jest niewystarczający - aby móc racjonalnie podejmować decyzje i działać musimy umieć mierzyć ryzyko. [1] [2]

# Pierwsze podejście do miary ryzyka

---

Zależności wariancji procesu stochastycznego  $X(t)$ , czyli tradycyjnej miary ryzyka, od czasu  $t$  dla asymptotycznie długich czasów:

$$\langle X(t)^2 \rangle \sim \begin{cases} |t| & \text{proces Winera} \\ |t|^{2H} & \text{dyfuzja anomalna} \\ \infty & \text{proces Levy'ego} \end{cases} \quad (1)$$

Funkcja autokorelacji szumu dla dyfuzji anomalnej:

$$\langle \Delta X(t_1) \Delta X(t_1 + t) \rangle \sim |t + \Delta t|^{2H} + |t - \Delta t|^{2H} - 2|t|^{2H} \quad (2)$$

Zauważmy, że tylko dla  $H < 1$  funkcja autokorelacji szumu maleje w czasie. To jest właśnie powód, dla którego (w naszych rozważaniach)  $H$ , wykładnik Hursta, nie przyjmuje wartości równych albo większych od jedności. [3] [4]

Traktujemy wykładnik Hursta jako prawdopodobieństwo warunkowe tego, że kolejna zmiana procesu  $X(t)$  jest zorientowana zgodnie z poprzednią. Dlatego  $1 - H$  oznacza prawdopodobieństwo warunkowe tego, że dwie kolejne zmiany będą przeciwnie zorientowane. Zatem przyjmuje się, że właśnie prawdopodobieństwo  $1 - H$  jest dobrą miarą globalnego ryzyka związanego z procesami fraktalnymi, gdyż zdaje sprawę ze zmienności procesu - im większa zmienność tym większe ryzyko. [4]

Komplementarną, względną miarą ryzyka, uwzględniającą pośrednio stopę zwrotu (wzrostu) a więc biorącą częściowo pod uwagę lokalny w czasie charakter ryzyka, może być stosunek fluktuacji szumu do fluktuacji sygnału:

$$\sqrt{\frac{\langle \Delta X(t)^2 \rangle}{\langle X(t)^2 \rangle}} \sim \left( \frac{\Delta t}{t} \right)^H \quad (3)$$

$$\sqrt{\frac{\langle \Delta X(t)^2 \rangle}{\langle X(t)^2 \rangle}} \sim \left( \frac{\Delta t}{t} \right)^H \quad (3)$$

Miara ta wskazuje, że im mniejszy jest wykładnik Hursta tym większe jest ryzyko, gdyż ułamek  $\Delta t/t$  jest zawsze mniejszy od 1. Miara ta, zachowując się podobnie jak prawdopodobieństwo  $1 - H$ , tzn. rosnąc gdy  $H$  maleje, jednocześnie relaksuje potęgowo z czasem. Zatem, miara ta zawiera w sobie zarówno aspekt lokalny jak i globalny. [4]

# Wykładnik Hursta

---

Wykładnik Hursta rządzi błędzeniem przypadkowym, jego zmiennością stanowi tym samym narzędzie klasyfikacji szeregów. W takim wypadku wielkość sterująca zmiennością może być traktowana jako miara ryzyka.

Wykładnik Hursta występuje w takich obszarach matematyki stosowanej jak: fraktale, teoria chaosu, procesy długopamięciowe oraz analiza spektralna. Współczesne techniki wyznaczające wykładnik Hursta najczęściej wykorzystuje się w matematyce fraktali. [5] [6]

Wykładnik Hursta można klasyfikować ze względu na jego wartość:

- $H < \frac{1}{2}$  - antypersystentny szereg czasowy czyli występują ujemne korelację pomiędzy kolejnymi wyrazami szeregu. Tego typu szeregi niosą ze sobą największe prawdopodobieństwo zmian, a ryzyko jakie niesie ze sobą taki szereg jest największe.
- $H = \frac{1}{2}$  - brak jest jakichkolwiek autokorelacji, proces jest całkowicie nieprzewidywalny, jest w pełni losowy, gdyż występujące kolejno po sobie zmiany są ze sobą całkowicie nieskorelowane.
- $H > \frac{1}{2}$  - szereg persystentny, czyli występowanie pozytywnej korelacji pomiędzy kolejnymi zmianami szeregu, wskazującymi na istnienie trendu pozwalającego na krótkoterminowe prognozowanie.



# Metoda przeskalowanego zasięgu R/S

---

Istota Metody Przeskalowanego Zasięgu R/S oparta jest na fakcie, że rozpiętość błędzenia przypadkowego skaluje się tak jak dyspersja sumarycznego przemieszczenia. Metoda R/S jest najprostszą metodą wyznaczenia wykładnika Hursta,  $H$ , sterującego zmiennością szeregu czasowego. Tym samym, wykładnik ten można powiązać z ryzykiem inwestycyjnym - im większa zmienność tym większe ryzyko. [3] [5] [7]

Stosowalność metody R/S jest ograniczona ze względu na:

- długość szeregów, tak aby możliwy był ich podział na wystarczająco dużą liczbę długich podciągów,
- do szeregów zdetrendowanych i pozbawionych sezonowości.

Szereg o długości  $L$  należy podzielić na  $J$  równolicznych, rozłącznych podciągów wyjściowego szeregu czasowego tak, że:

$$L = Jn \quad (1)$$

Następnie należy wyznaczyć średnią:

$$\bar{y}^j = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n y_l^j \quad (2)$$

Oraz odchylenie standardowe dla każdego  $J$ :

$$s^j = \left[ \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n (y_l^j - \bar{y}^j)^2 \right]^{1/2} \quad (3)$$

Dla każdego z podciągów został zbudowany profil:

$$Y_k^j \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^k (y_i^j - \bar{y}^j) \quad (4)$$

W następnym kroku zostały wyznaczone rozpiętości, zakresy  $R^j$  podciągów  $J$ :

$$R^j = \max_{1 \leq k \leq n} \{Y_k^j\} - \min_{1 \leq k \leq n} \{Y_k^j\} \quad (5)$$

Została wyznaczona wartość przeskalowanego zakresu, estymata wartości oczekiwanej  $E(R/S)(n)$ :

$$\overline{(R/S)}(n) = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J R^j / S^j \quad (6)$$

Następnie, została obliczona średnia wartość przeskalowanego zakresu dla kolejnych, dyskretnych chwil  $n$ :

$$E(R/S)(n) = \text{const} n^{E(H)} \quad (7)$$

Przy pomocy regresji liniowej został wyznaczony wykładnik Hursta:

$$\log \overline{(R/S)}(n) = H \log(n) + \log(\text{const}) \quad (8)$$

# Analiza

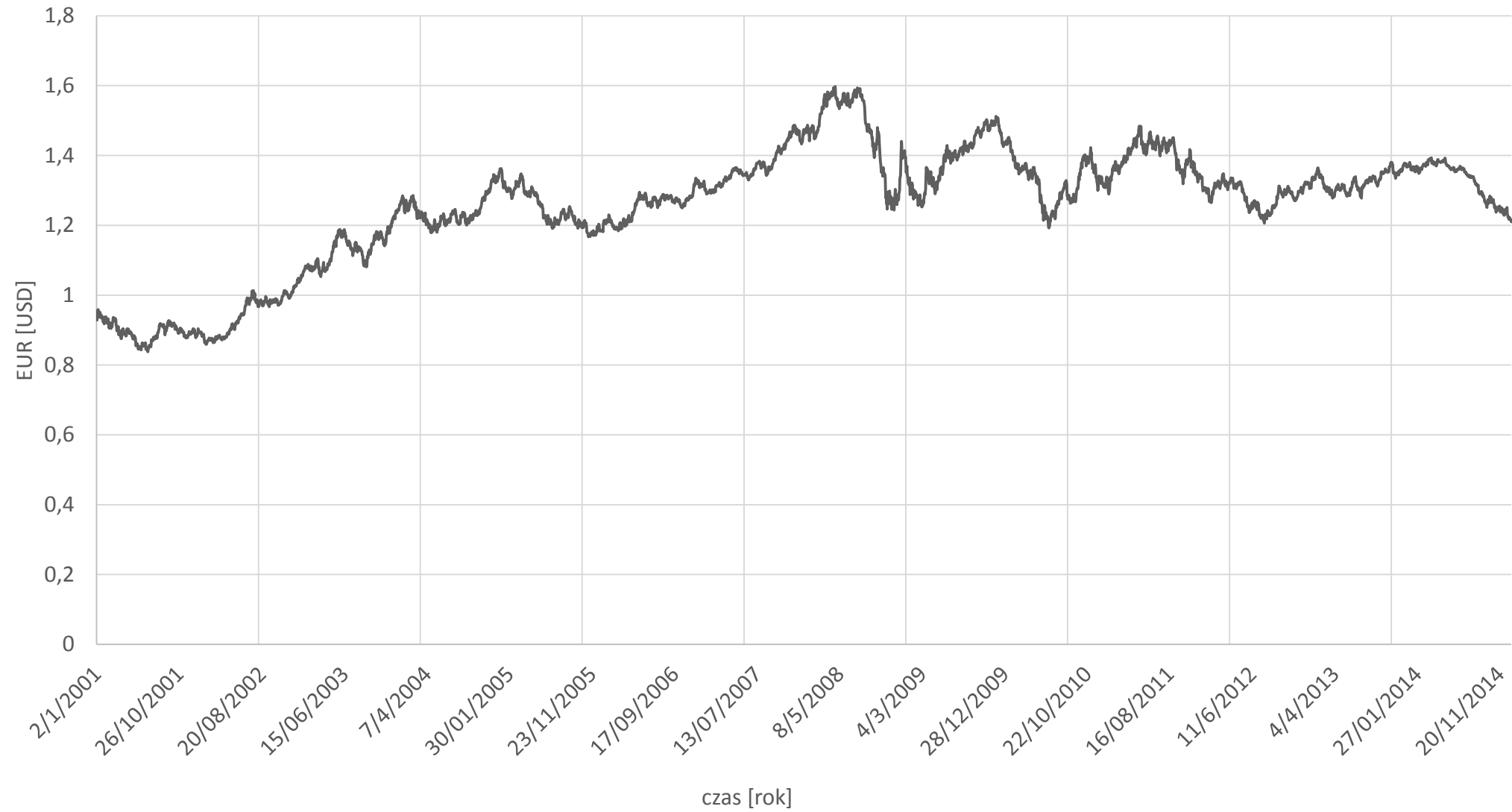
---

Analizie zostały poddane szeregi czasowe charakteryzujące kursy walutowe EUR/USD oraz RUB/USD. Szeregi zostały analizowane pod względem okresu inwestycyjnego w celu zbadania jak kryzys finansowy wpływa na rynek walutowy. W tym celu zostały podzielone na 3 okresy ekonomiczne. Pierwszym okresem był dzienny kurs w latach 2001 – 2005 i ten zaklasyfikowano jako okres przed kryzysem inwestycyjnym. Następny, w latach 2006 – 2009 jako okres kryzysu inwestycyjnego, oraz w latach 2010 – 2014 jako okres po kryzysie finansowym. Doświadczenie przeprowadzono w oparciu o dane historyczne zaczerpnięte z portalu [www.stooq.pl](http://www.stooq.pl)

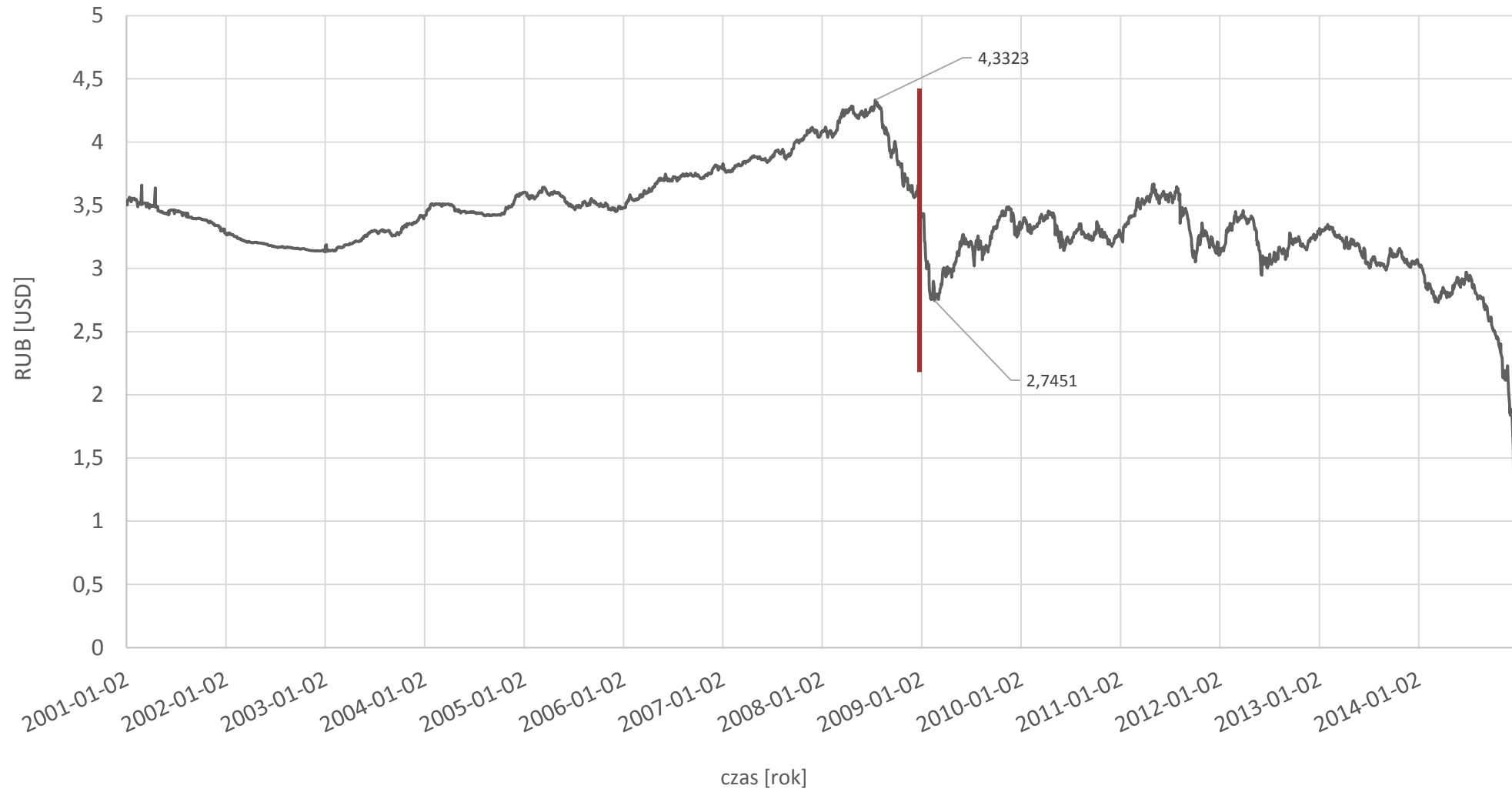
W celu wyeliminowania sezonowości w szeregach czasowych zastosowano logarytmiczne stopy zwrotu, które zostały obliczone według wzoru:

$$r_t = \ln P_t - \ln P_{t-1} \quad (9)$$

## Kurs kupna EUR



# Kurs kupna RUB





# Wyniki

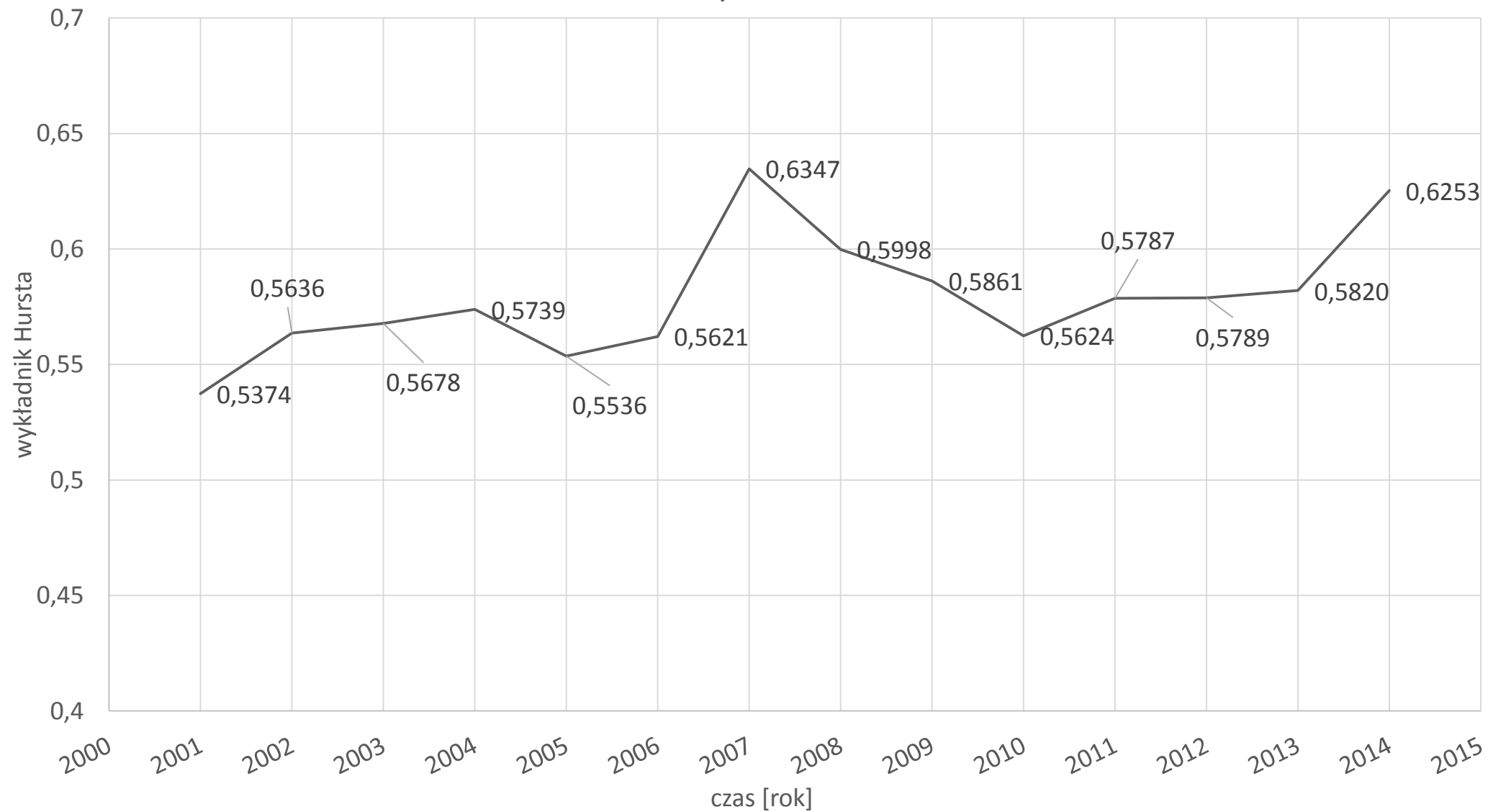
---

Wartość wykładnika Hursta w zależności od badanego okresu

	2001 - 2005	2006 - 2009	2010 - 2014	2001 - 2014
EUR/USD	0.5918	0.5720	0.6048	0.5929
RUB/USD	0.6458	0.6163	0.5575	0.5973

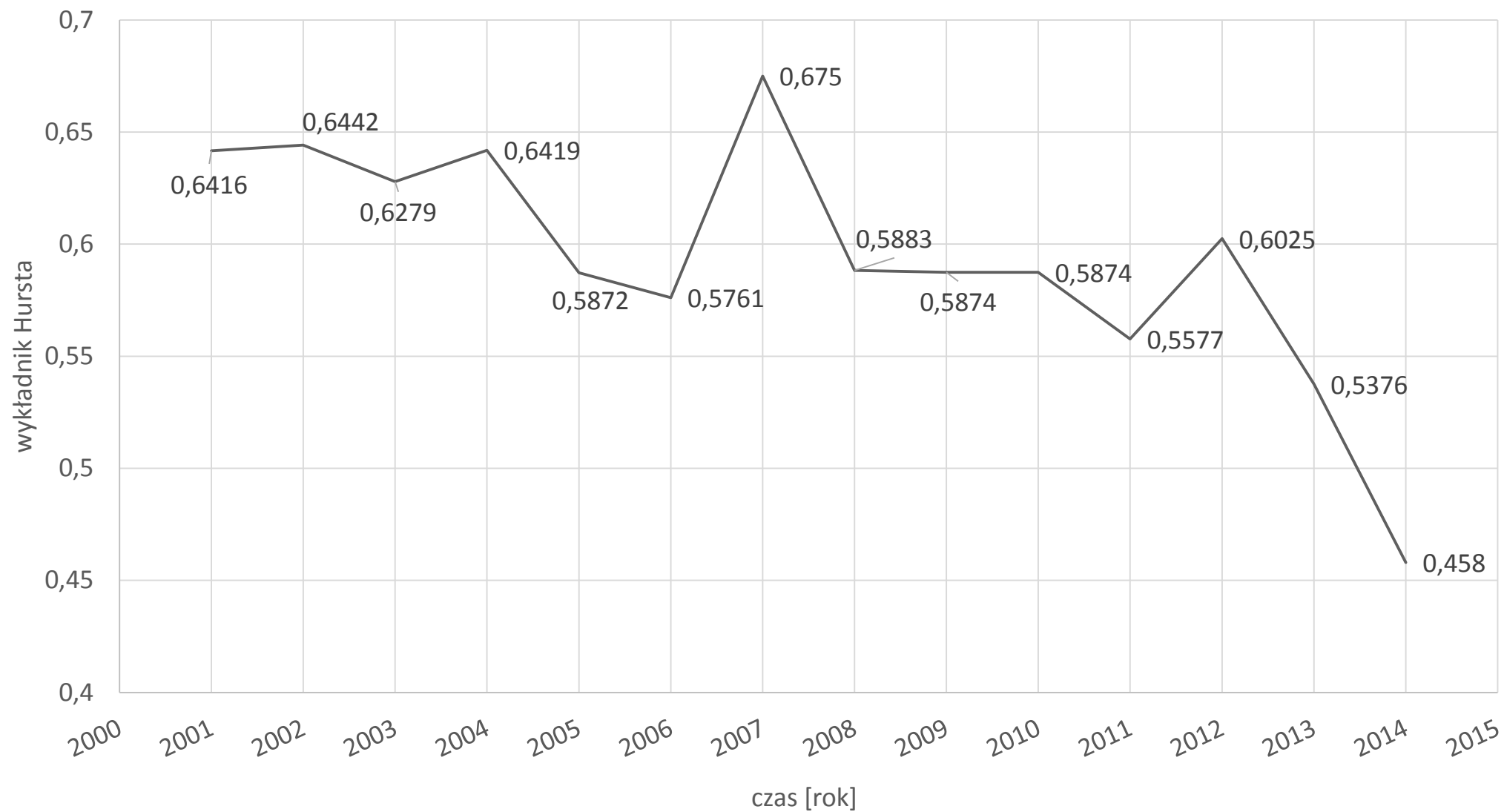


## Zmiana wykładnika Hursta



- Wykładnik Hursta nie zmienia się drastycznie na przestrzeni lat dla tej waluty, szczególnie w latach 2001 – 2006 oraz w latach 2008 - 20013, co sugeruje dużą stabilność na rynku w tamtym okresie czasu.
- Spodziewano się, że największe ryzyko inwestycyjne będzie można zaobserwować w latach 2008 – 2009, kiedy miał miejsce kryzys finansowy. Jednak z wykresu wynika, że największe ryzyko inwestycyjne miało miejsce w roku 2001.
- Natomiast, najmniejsze w roku 2007 tuż przed wielkim kryzysem finansowym w 2008 roku oraz 2014 roku.

## Zmiana wykładnika Hursta



- Największe ryzyko inwestycyjne miało miejsce w 2006, 2011 oraz 2014 roku. Widać jednak, że w porównaniu do roku 2007 kiedy wykładnik Hursta był na poziomie 0.6750, na przestrzeni lat 2008 i 2009 spadał do poziomu 0.5874. Mogłoby to wskazywać na obecność kryzysu na giełdzie rosyjskiej w tamtym okresie czasu.
- W roku 2014 ryzyko inwestycyjne było największe, a wykładnik Hursta dla tego okresu wyniósł 0.4580. Perspektywa na rynku rosyjskim jest negatywna. W aktualnym środowisku kondycja Rosji jest bardzo trudna. Z jednej strony mamy spadki cen ropy naftowej, a z drugiej strony mamy nałożone na Rosję sankcje.

- Spodziewano się, że ryzyko inwestycyjne na giełdzie rosyjskiej będzie większe niż na rynku europejskim. Ze względu na ostatnią niepewną sytuację na rynku rosyjskim można było się spodziewać, że wykładnik Hursta dla tego rynku będzie stosunkowo mały. Należy również pamiętać, że kurs rosyjskiego rubla był ustalany odgórnie przez Centralny Bank Rosji do 29 czerwca 2006 r., kiedy podjęto decyzję o jego uwolnieniu i od lipca 2006 r. kurs rubla rosyjskiego jest kursem płynnym, ustalany przed popyt i podaż tej waluty na rynku aż do listopada ubiegłego roku, kiedy Centralny Bank Rosji ponownie stara się utrzymać kurs waluty rosyjskiej.

# Multifraktalna analiza fluktuacji

---

## 0. Definicja szeregu czasowego

Szereg czasowy  $\{x_k\}_{k=1}^N$  składający się z  $1 \leq N \leq \infty$  elementów indeksowanych dyskretnym wskaźnikiem  $k$ , przy czym dopuszcza się zanikanie elementów szeregu wewnątrz przedziału czasowego  $2 \leq k \leq N - 1$

## 1. Konstrukcja profilu szeregu

Profil szeregu to skumulowana, centrowana zmienna losowa postaci:

$$Y(i) = \sum_{k=1}^i (x_k - \langle x \rangle) \quad (10)$$

gdzie  $i = 1, 2, \dots, N$ , a  $\langle x \rangle$  stanowi estymatę wartości oczekiwanej szeregu czasowego.

## 2. Konstrukcja substratu

Przedział czasowy  $[1, N]$  został podzielony na  $N_s = \text{int}(N/s)$  nieprzerywających się segmentów o jednakowej liczbie elementów  $s$ . Rozmiar  $s$  może być nieproporcjonalny z  $N$  więc część segmentów może zostać pominięta. W tym celu zostało zbudowane kolejnych  $N_s$  segmentów o rozmiarze  $s$  ale numerowane od końca, dzięki czemu został otrzymany substrat o dwukrotnie większej liczbie segmentów  $2N_s$ .

## 3. Eliminacja lokalnych trendów

W każdym spośród  $2N_s$  segmentów trend przybliżony został za pomocą wielomianu  $w_v^m$  o stopniu  $m = 1, 2, \dots$  jednakowego dla wszystkich segmentów  $v$  i takiego, że  $m \leq s - 2$ . Współczynnik wielomianu został wyznaczony przez:

$$F^2(v, s) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \{Y[(v-1)s + i] - w_v^m(i)\}^2 \quad (11)$$

Dla każdego  $v = 1, 2, \dots, N_s$  z osobna.

#### 4. Funkcja fluktuacyjna

$$F_q(s) = \langle [F^2(s)]^{q/2} \rangle^{1/q} \quad (12)$$

$$\langle [F^2(s)]^{q/2} \rangle = \frac{1}{2N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} [F^2(v, s)]^{q/2} \quad (13)$$

gdzie,  $q$  jest liczbą rzeczywistą różną od zera. Celem jest wyznaczenie zależności funkcji  $q$ -fluktuacyjnej od wielkości przedziału  $s$  dla różnych wielkości  $q$ .

#### 5. Skalowanie funkcji $q$ -fluktuacyjnej

Szukana jest zależność:

$$F_q(s) \sim s^{h(q)} \quad (14)$$

gdzie,  $h(q)$  jest uogólnionym wykładnikiem Hursta, stanowiącym miarę ryzyka.



# Podsumowanie

---

- Przydatność metody przeskalowanego zasięgu R/S do analizy finansowych szeregów czasowych.
- Rynki walutowe nie są rynkami efektywnymi.
- Obecność kryzysu finansowego rzeczywiście wpływa na rynek walutowy i ryzyko inwestycyjne.
- Na podstawie przeprowadzonych badań stwierdzono, że badane rynki charakteryzują się ryzykiem inwestycyjnym wskazującym na istnienie trendu pozwalającego na krótkoterminowe prognozowanie.

# Literatura

---

- [1] – Orzeszko, W. (2010). Wymiar fraktalny szeregów czasowych a ryzyko inwestowania.
- [2] – Buła, R. (2013). Ryzyko inwestycji a wymiar fraktalny.
- [3] – Kutner, R. (2014). Elementy teorii ryzyka rynkowego wraz z elementami teorii zdarzeń ekstremalnych
- [4] – Kutner, R. (2009). Symulacje komputerowe procesów singularnych i osobliwych w finansach – wybrane algorytmy.
- [5] – Duczmal, R. (2013). Analiza i wyznaczanie wykładników Hursta metodą przeskalowanego zasięgu dla wybranych indeksów i spółek giełdowych.
- [6] – Qian, B.; Rasheed, K. (2003). Hurst exponent and financial market predictability.
- [7] – [http://mer.chemia.polsl.pl/Dydaktyka/doc/2008\\_2009/Statystyka/Hurst.pdf](http://mer.chemia.polsl.pl/Dydaktyka/doc/2008_2009/Statystyka/Hurst.pdf)
- [8] – Buła, R. (2012). Influence of financial crisis on Hurst exponent estimates - fractal analysis of selected metals prices.
- [9] – Marcinkiewicz, E. (2006). Badanie zależności pomiędzy wartością wykładnika Hursta a skutecznością strategii inwestycyjnych opartych na analizie technicznej.
- [10] – Rea, W. (2009). Estimators for Long Range Dependence: An Empirical Study.