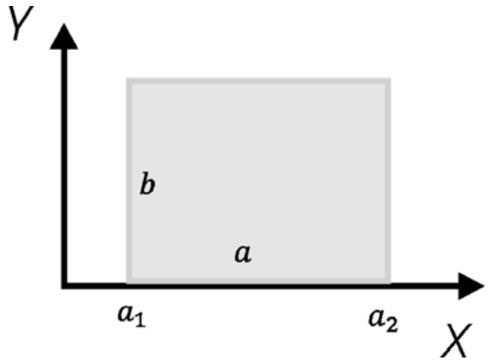
Ćwiczenia z Fizyki II
Elektryczność i Magnetyzm
Seria 1, 2014

Zadanie 1. (kierunek Fizyka)
Podaj infinitezymalny element przesunięcia w płaskim układzie kartezjańskim oraz układzie biegunowym. Oblicz masę łuku spirali, zawartego pomiędzy kątami $\phi_1 = 0$ oraz $\phi_2 = 4\pi$. Spirala wykonana jest z nieskończenie cienkiego drutu. Równanie opisujące spiralę w współrzędnych biegunowych ma postać $r(\phi) = a \cdot \phi$, zaś rozkład jej masy przypadającej na jednostkę długości opisuje zależność: $\lambda(\phi) = \lambda_0\phi$, gdzie λ – gęstość liniowa masy .

Zadanie 1. (kierunek Zastosowanie Fizyki w Biologii i Medycynie)
Podaj infinitezymalny element przesunięcia w płaskim układzie kartezjańskim oraz układzie biegunowym. Oblicz masę okręgu o promieniu *R*, który wykonano z nieskończenie cienkiego drutu. Rozkład masy przypadającej na jednostkę długości okręgu opisuje wzór: $\lambda(\phi) = \lambda_0\phi$, gdzie λ - gęstość liniowa masy, ϕ – kąt liczony od osi poziomej układu kartezjańskiego.

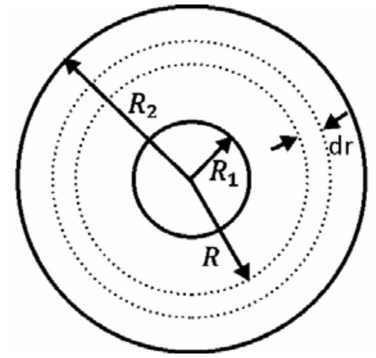
Zadanie 2. (kierunek Fizyka i Zastosowanie Fizyki w Biologii i Medycynie)
Podaj infinitezymalny element powierzchni w płaskim układzie kartezjańskim, układzie biegunowym, trójwymiarowym układzie kartezjańskim, układzie cylindrycznym oraz układzie sferycznym. Oblicz masę nieskończenie cienkiego krążka o promieniu *R*. Rozkład masy przypadającej na jednostkę powierzchni krążka opisuje wzór $\sigma(\mathrm{r}) = \sigma_0 \frac{r}{R}$, gdzie $\sigma -$ gęstość powierzchniowa masy, $r -$ odległość od środka krążka.

Zadanie 3. (kierunek Fizyka)
Nieskończenie cienki prostokąt o bokach o długości *a* i *b*, został umieszczony się w płaskim układzie kartezjańskim, tak jak na załączonym rysunku. Rozkład masy przypadającej na jednostkę powierzchni prostokąta dany jest równaniem $\sigma = \sigma_0 \frac{a}{x}$, gdzie σ - gęstość powierzchniowa masy. Oblicz masę prostokąta.

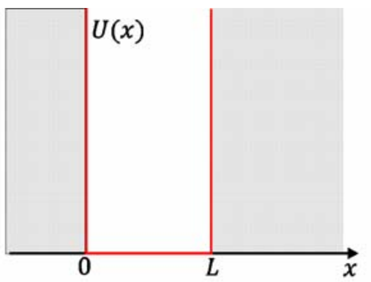


Zadanie 4. (kierunek Fizyka)
Oblicza masę walca o promieniu *R* i długości *L*, w którym rozkład gęstości masy opisuje zależność $\rho(r) = \rho_0 \frac{R}{r}$, gdzie ρ - masa przypadająca na jednostkę objętości, *r* – odległość od osi walca.

Zadanie 5. (kierunek Fizyka).
Rozkład gęstości objętościowej ładunku, znajdującego się pomiędzy dwiema współśrodkowymi sferami o promieniach R_1 i $R_2 > R_1$ dany jest wzorem: $\rho = \frac{Q_0}{\pi a^3} e^{-\frac{2r}{a}}$, gdzie *r* – odległość od środka sfer. Oblicz:



A. Ładunek znajdujący się w nieskończenie cienkiej sferze o grubości d*r* i promieniu R, gdzie $R_1 < R < R_2$ (patrz rysunek obok).
B. Całkowity ładunek znajdujący się pomiędzy sferami.
C. Granicę gdy $R_2 \to \infty$, a $R_2 \to \infty$,



$$U(x) = \begin{cases} 0, \text{dla } 0 < x < L \\ \infty, \text{dla } x < 0 \text{ i } x > L \end{cases}$$

Zadanie 6. (kierunek Fizyka).
Gęstość ładunku w nieskończonej, jednowymiarowej studni potencjału o szerokości *L* (patrz rysunek obok) wynosi $\rho(x) = \rho_0 \sin^2\left(\frac{\pi}{L}x\right)$, czyli nie zależy od y i z. Znajdź powierzchniową gęstość ładunku $\sigma_{1/3}$ zgromadzoną w warstwie $x \in \left(0, \frac{L}{3}\right)$.

Zadanie 7. (kierunek Fizyka i Zastosowanie Fizyki w Biologii i Medycynie)
Oblicz gradient następującego pola skalarnego:

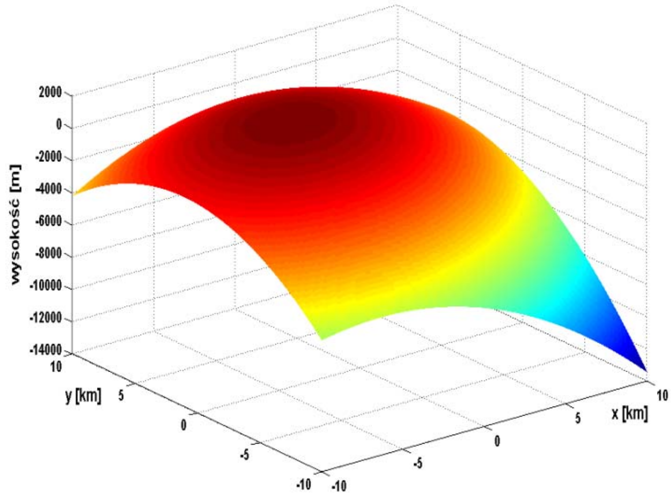
$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Zadanie 8. (kierunek Fizyka i ZFBiM)

Wysokość pewnego wzgórza (patrz rysunek poniżej) wyraża się następującym wzorem: $h(x,y) = 10(2xy - 3x^2 - 4y^2 - 18x + 28y + 12)$

Oblicz:

1. Gdzie znajduje się szczyt wzniesienia?
2. Jaka jest wysokość szczytu?
3. Jaka jest szybkość zmian wysokości wzniesienia (wyrażona w metrach na kilometr) w punkcie o współrzędnych x = 1 km, y = 1km? W którym kierunku, liczonym od tego punktu, wysokość rośnie najszybciej?



Zadanie 9. (punkt C tylko Fizyka)

Oblicz dywergencję następujących pól wektorowych:

A. $\vec{A}(x,y,z) = (x^3, y, 2z)$.
B. $\vec{A}(x,y,z) = (\sin(x), \sin(z), \sin(y))$).
C. $\vec{A}(x,y,z) = \frac{\vec{r}}{r^3}$, gdzie $\vec{r} = (x,y,z)$.

Zadanie 10. (kierunek Fizyka i Zastosowanie Fizyki w Biologii i Medycynie).

Oblicz rotację pola wektorowego o postaci: $\vec{A} = [x, 2z + y^2, y^2 z - x^2]$.

Zadanie 11. (zadanie dodatkowe).

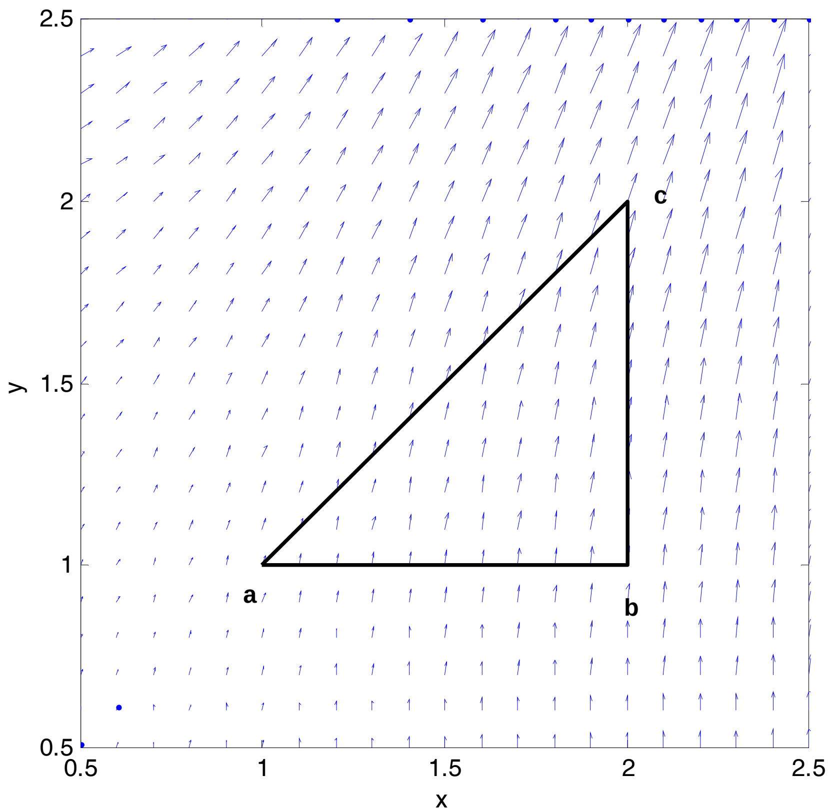
Wykaż, że:

A. $\mathrm{rot}(\nabla\phi) = 0$, wskazówka: $\frac{\delta\phi}{\delta y}\left(\frac{\delta\phi}{\delta x}\right) = \frac{\delta\phi^2}{\delta x\delta y} = \frac{\delta\phi^2}{\delta y\delta x}$

B. $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{A}) = 0$, gdzie $\vec{A} = [A_x, A_y, A_z]$.

Zadanie 12. (zadanie dodatkowe)

Oblicz całkę krzywoliniową pola wektorowego $\vec{A} = y^2\vec{e}_x + 2x(y+1)\vec{e}_y$ wzdłuż krzywych biegnących od punktu $\mathbf{a} = (1,1)$, do punktu $\mathbf{b} = (2,1)$; od punktu $\mathbf{b}$ do punktu $\mathbf{c} = (2,2)$ i od punktu $\mathbf{c}$ do punktu $\mathbf{a}$ (krzywa *y* = *x*, patrz rysunek poniżej).



Zadanie 13. (kierunek Fizyka, zadanie dodatkowe)

Cienki krążek wiruje ze stałą prędkością kątową $\vec{\omega}$, wokół osi przechodzącej przez jego środek i prostopadłej do jego powierzchni.

A. Narysuj pole prędkości liniowej $\vec{V}$ punktów tego krążka.
B. Oblicz, ile wynosi dywergencja pola $\vec{V}$.
C. Oblicz rotację pola $\vec{V}$.
D. Policz krążenie $\vec{V}$ po okręgu.