Dodatek -wektory, układy współrzędnych

Powierzchnia jako wielkość wektor (pseudowektor)

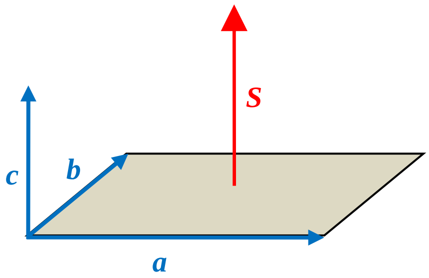
Jednym ze sposobów mnożenia dwóch wektorów przez siebie jest tzw. iloczyn wektorowy, który dla wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ można zapisać w następujący sposób:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

W wyniku mnożenia wektorowego wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dostajemy wektor $\vec{c}$, którego

- kierunek jest prostopadły do płaszczyzny, w której leżą wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$,
- zwrot jest określony za pomocą reguły śruby prawoskrętnej,
- długość wynosi:

$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\phi)$, gdzie ϕ - kąt pomiędzy wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$



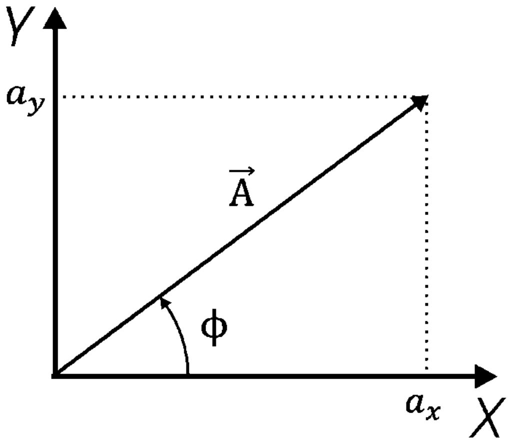
Wyrażenie $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\phi)$, to nic innego jak pole równoległoboku rozpiętego na wektorach na wektorach $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Rozumując w drugą stronę, pewnej powierzchni można przypisać wektor, o kierunku prostopadłym do płaszczyzny powierzchni i długości równej polu tej powierzchni.

Układy współrzędnych – infinitezymalne elementy przesunięcia, powierzchni i objętości.

Krótkie przypomnienie o wektorach.

Wektory najczęściej wiążemy z pewnymi układami współrzędnych. Na rysunku poniżej zaprezentowano wektor $\vec{A}$ w kartezjańskim układzie współrzędnych, utworzonym przez dwie prostopadłe do siebie osie.



W kartezjańskim układzie współrzędnych, współrzędne wektora są równe:

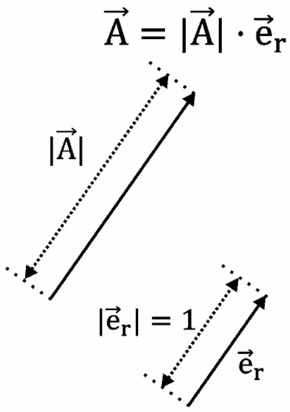
$$a_x = |\vec{A}| \cdot \cos(\phi)$$
$$a_y = |\vec{A}| \cdot sin(\phi)$$

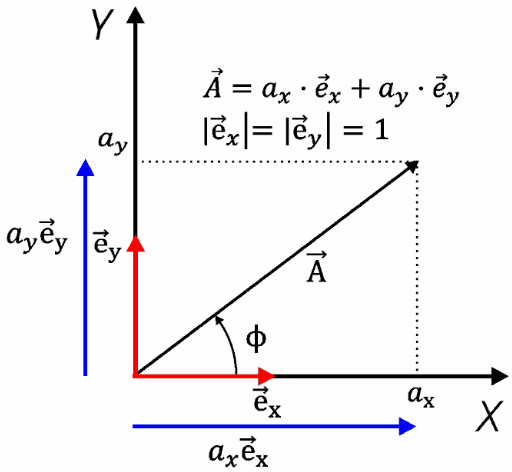
Z kolei mając współrzędne wektora, można określić jego kierunek i długość:

$$|\vec{A}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$
$$\phi = \text{atan}\left(\frac{a_y}{a_x}\right)$$

Przy opisie wektora wygodnie jest wprowadzić pojęcie wektora jednostkowego, to jest wektora o określonym kierunku i długości równej 1. Na powyższym rysunku po lewej stronie wprowadzono wektor $\vec{e}_r$ o długości równej 1 i kierunku równoległym do wektora $\vec{A}$.

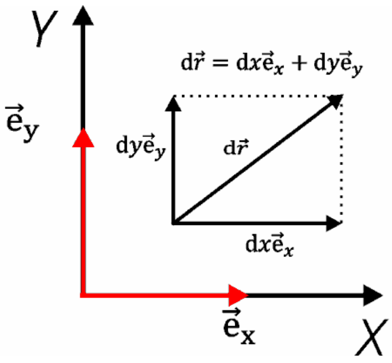
Po prawej stronie rysunku, wektory jednostkowe (wersory) $\vec{e}_x$ i $\vec{e}_y$ są równoległe do osi układu kartezjańskiego. Wielkości $a_x\vec{e}_x$ oraz $a_x\vec{e}_y$ to wektory składowe wektora $\vec{A}$.





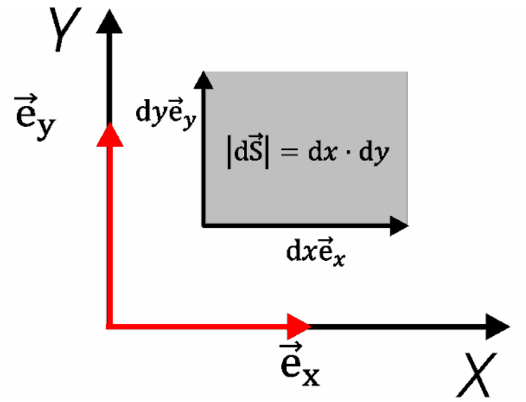
Płaski układ kartezjański.

Infinitezymalny element przesunięcia w płaskim układzie kartezjańskim zaprezentowano na poniższym rysunku:

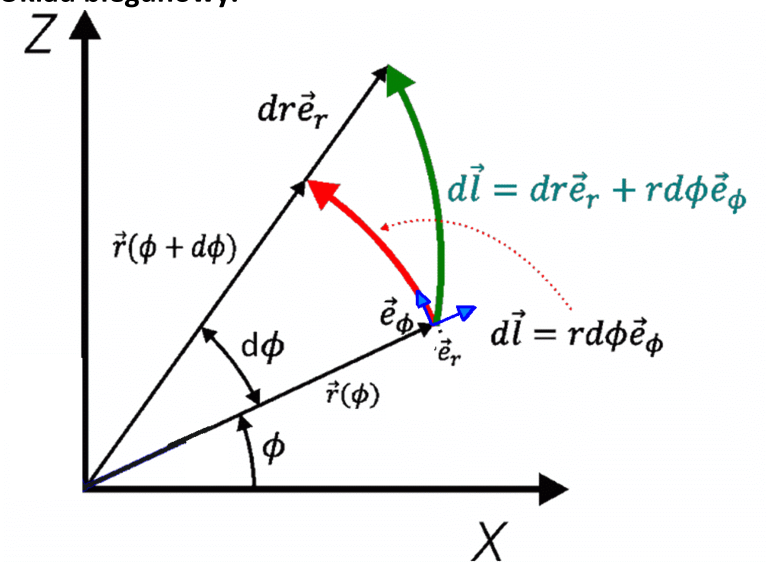


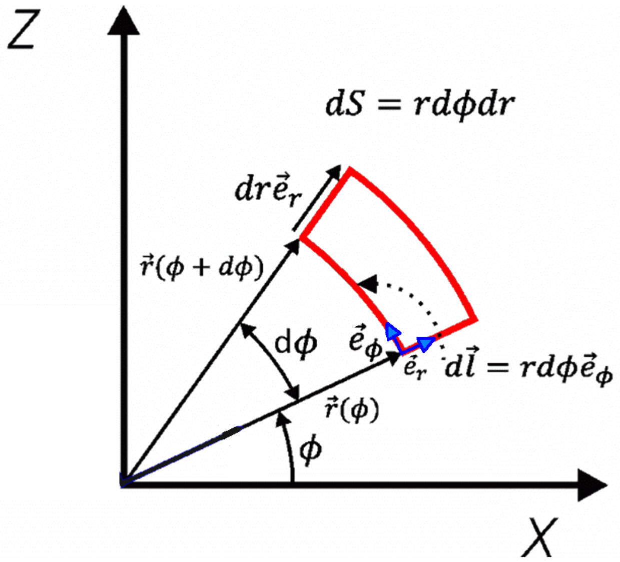
Z kolei element Infinitezymalny powierzchni wynosi:

Uwaga – na powyższy rysunku podano tylko wielkość elementu powierzchni. Przypominamy, że z powierzchnią można wiązać wektor. W tym przypadku wektor ten będzie skierowany od kartki w kierunku patrzącego.



Układ biegunowy.





Element długości: $d\vec{l} = \vec{r}(\phi + d\phi) - \vec{r}(\phi) + dr\vec{e}_r = rd\phi d\vec{e}_\phi + dr\vec{e}_r$, $\quad |d\vec{l}| = \sqrt{(rd\phi)^2 + (dr)^2}$

Element powierzchni: $|d\vec{S}| = rd\phi \cdot dr = rdrd\phi$, wektor powierzchni ma kierunek od kartki w kierunku patrzącego.

Uwaga:

Kierunek wektorów jednostkowych zależy od punktu obserwacji.

W początku układu współrzędnych nie zdefiniowane są zarówno φ, jak i $\vec{e}_\varphi$ oraz $\vec{e}_r$,

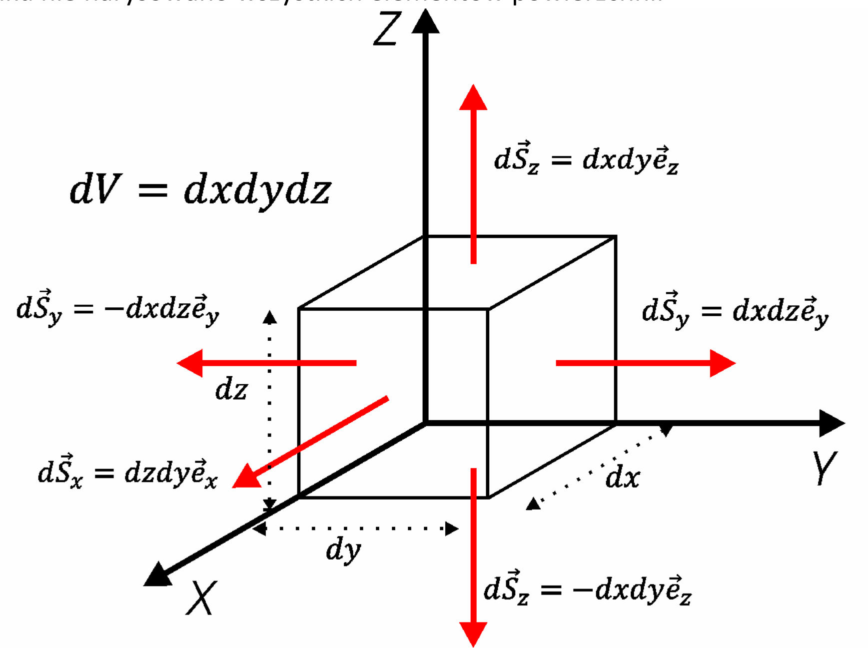
Transformacje:

$$x = r\cos\varphi \quad \vec{r} = r(\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y) \quad \vec{e}_r = \cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y$$
$$y = r\sin\varphi \qquad \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y$$

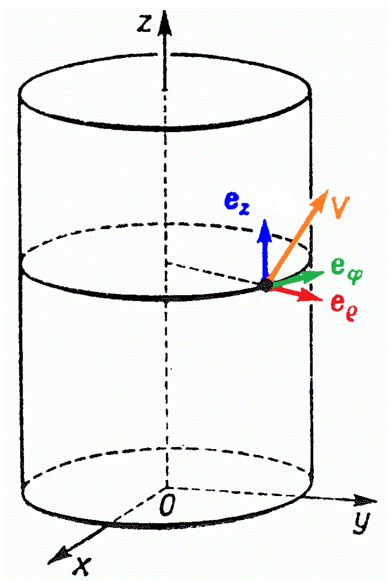
Układy 3D

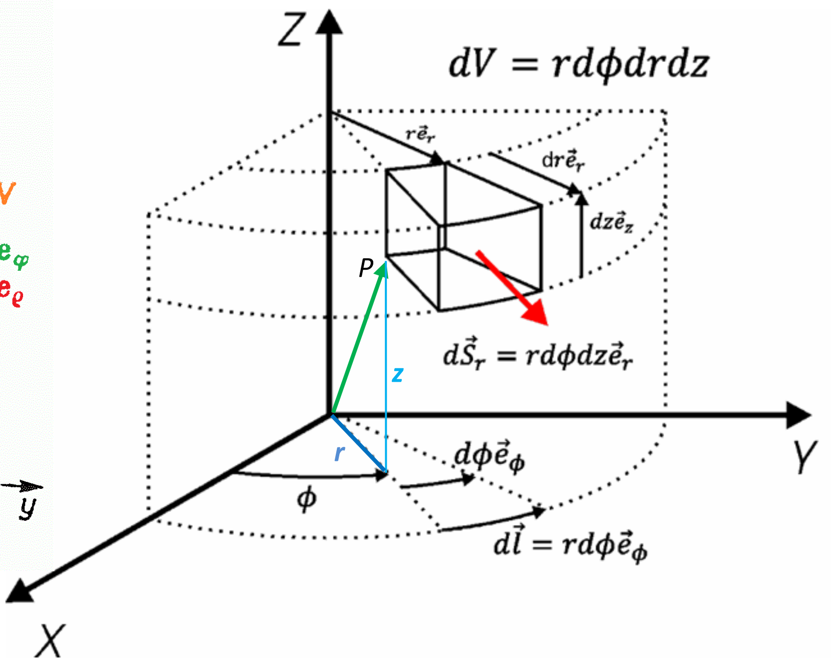
Układ kartezjański.

Aby nie zamazać rysunku nie narysowano wszystkich elementów powierzchni.



Układ cylindryczny.





Wektor $\vec{V}$ zapisujemy jako

$$\vec{V} = V_r\vec{e}_r + V_\varphi\vec{e}_\varphi + V_z\vec{e}_z$$

W szczególności wektor przesunięcia:

$$d\vec{l} = dr\vec{e}_r + rd\varphi\vec{e}_\varphi + dz\vec{e}_z$$

Transformacje:

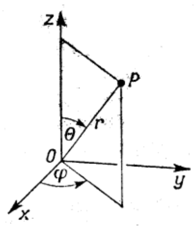
$$x = r\cos\varphi \qquad\qquad \vec{e}_r = \cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y$$

$$y = r\sin\varphi \qquad \vec{r} = r(\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y) + z\vec{e}_z \qquad \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y$$

$$z = z \qquad\qquad \vec{e}_z = \vec{e}_z$$

Układ sferyczny.

W układzie sferycznym położenie punktu ***P*** w przestrzeni, opisujemy za pomocą trzech liczb:



- r - odległość punktu ***P*** od początku układu współrzędnych.
- ϕ i θ - kąty jakie tworzy rzut promienia wodzącego na płaszczyznę *XY* z osią *X* i rzut na płaszczyznę *ZY* z osią *Z*.

Wektor $\vec{V}$ zapisujemy jako

$$\vec{V} = V_r\vec{e}_r + V_\theta\vec{e}_\theta + V_\varphi\vec{e}_\varphi$$

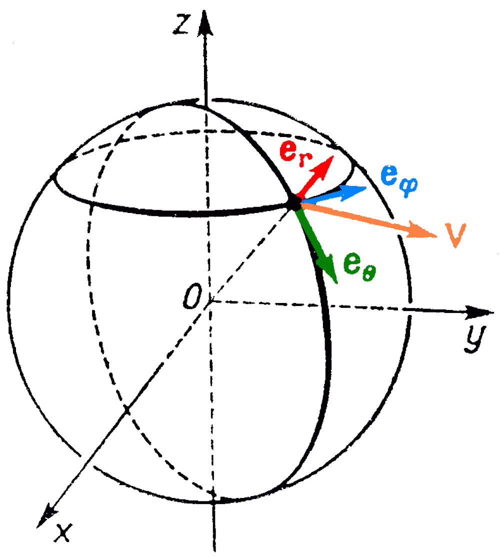
W szczególności wektor przesunięcia:

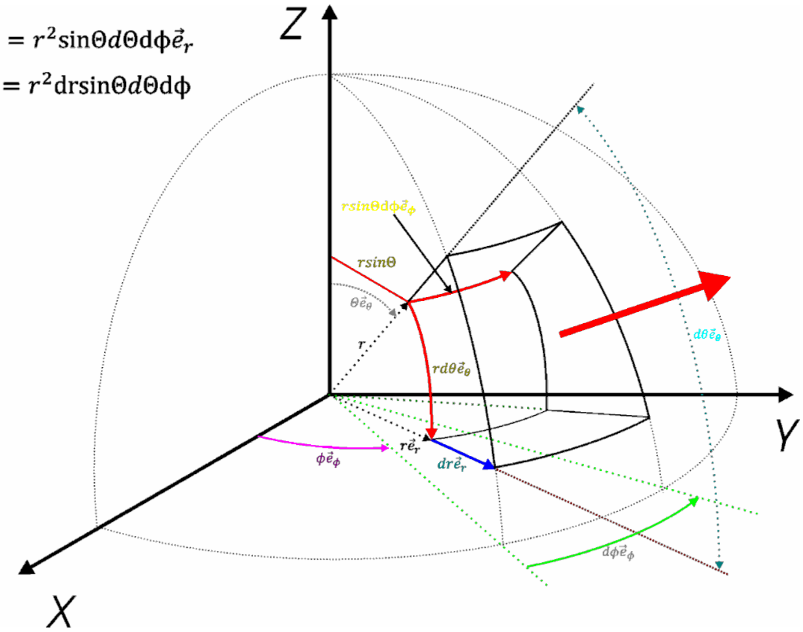
$$d\vec{l} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + r\sin\theta\, d\varphi\vec{e}_\varphi$$

Uwaga – w układzie kartezjańskim wersory zawsze są na stałe związane z osiami układu, w układzie sferycznym i cylindrycznym wersory zmieniają się z położeniem.

$$d\vec{S}_r = r^2\mathrm{sin}\Theta d\Theta\mathrm{d}\phi\vec{e}_r$$

$$dV = r^2\mathrm{drsin}\Theta d\Theta\mathrm{d}\phi$$





Transformacje:

$x = r\sin\theta\cos\varphi$ $\qquad$ $\vec{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{e}_y + \cos\theta\,\vec{e}_z$

$y = r\sin\theta\sin\varphi$ $\qquad$ $\vec{r} = r\left(\sin\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{e}_y + \cos\theta\,\vec{e}_z\right)$ $\qquad$ $\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y$

$z = r\cos\theta$ $\qquad$ $\vec{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{e}_y - \sin\theta\,\vec{e}_z$

Obliczenie elementu powierzchni w układzie sferycznym.

Np. powyższym rysunku zaprezentowano wycinek kuli, który potraktujemy, jako „zniekształcony" prostopadłościan. Tylną ściankę tego prostopadłościanu tworzą bok, będące łukami o długości:

- $rd\Theta$,
- $rsin\theta d\phi$.-

Długość łuku, dla ustalonego promienia r, który zakreśla te łuk wynosi:

$$dl = rd\phi$$

W przypadku omawianego boku prostopadłościanu, długość łuku jest równa:

$$dl = r'd\phi$$

gdzie:

$$\frac{r'}{r} = sin\theta \rightarrow r' = r \cdot sin\Theta$$

Ostatecznie, więc:

$$dl = rsin\theta d\phi$$

W związku z powyższym, element powierzchni zaznaczonej na rysunku będzie miał wielkość:

$$dS = rsin\theta d\phi \cdot rd\Theta = r^2 sin\theta d\Theta d\phi$$

Wektor powierzchni ma oczywiście taką długość i jest równoległy do promienia wodzącego.

Element objętości liczymy jak objętość prostopadłościanu – mamy już pole powierzchni podstawy, więc mnożymy przez wysokość dr:

$$dV = dS \cdot dr = r^2 drsin\theta d\Theta d\phi$$