Fizyka I (Mechanika)
Zadania na ćwiczenia - seria 14
Tydzień 22-26.01.24

POWTÓRZYĆ:

- czterowektor pędu i energii: (E, cp_x, cp_y, cp_z); transformacja Lorentza dla pędu i energii,

$$\begin{aligned} cp_x &= \gamma(cp'_x + \beta E') \\ cp_y &= cp'_y \\ cp_z &= cp'_z \\ E &= \gamma(E' + \beta cp'_x) \end{aligned}$$

(tu trzeba też pokazać, że całkowita energia może być wyrażona przez $E = \gamma mc^2$ a pęd: $p = \gamma m\beta c$),

- definicja i sens niezmiennika $(M_{\mathrm{inv}}c^2)^2 = \left(\sum_i E_i\right)^2 - \left(\sum_i \vec{p}_i c\right)^2$ dla układu wielu cząstek,
- <u>całkowita</u> energia obiektu o masie spoczynkowej m i pędzie p: $E = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}$,
- definicja środka masy jako układu gdzie suma pędów równa jest zero, czynniki β i γ dla niego,
- dualizm korpuskularno-falowy obiektów atomowych; foton jako cząstka,
- wartość i sens stałej Plancka (wartość tablicowa: $6,626\,068\,96(\pm 33) \cdot 10^{-34}$ J $\cdot$ s),
- definicja eV; definicja jednostki pędu (eV/c) i masy (eV/c^2); jednostki pochodne: MeV, GeV, TeV,
- zamiana J $\leftrightarrow$ eV (1 eV = 1,602 176 565($\pm$35) $\cdot 10^{-19}$ J; 1 J = 6,241 509 47($\pm$53)$\cdot 10^{18}$ eV),

Zadanie 1 – masa w jednostkach energii

Masa m_p protonu wynosi (około) $1,67 \cdot 10^{-27}$ kg, zaś masa m_e elektronu to $9,11 \cdot 10^{-31}$ kg. Wyraź obie wielkości w jednostkach MeV/c^2.

Odpowiedź: masa protonu: około 940 MeV/c^2; masa elektronu: około 0,5 MeV/c^2.

Zadanie 2 – foton jako cząstka

Światło czerwone ma długość fali około 700 nm. Jaka jest energia takich fotonów? Jaki jest ich pęd? Jaka jest ich masa spoczynkowa? Czy można związać układ odniesienia z jednym z takich fotonów?

Rozwiązanie
Energia fotonów jest:

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \approx \frac{4 \cdot 10^{-15}\text{eV} \cdot \text{s} \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{7 \cdot 10^{-7}\text{m}} \approx 1,7\text{eV} \approx 2,8 \cdot 10^{-19}\text{J}$$

a pęd i masa spoczynkowa:

$$p = \frac{E}{c} \approx 1,7\frac{\text{eV}}{c}; \qquad Mc^2 = \sqrt{E^2 - (pc)^2} = 0.$$

Masa spoczynkowa jest więc równa zeru. Nie można związać żadnego układu odniesienia z fotonem bowiem w takim układzie foton by spoczywał.

Zadanie 3 – identyfikacja cząstki

Detektory w laboratorium zarejestrowały cząstkę o energii 1,25 GeV i pędzie 0,75 GeV/c. Jaka to cząstka (tzn. jaką ma ona masę spoczynkową)? Z jaką prędkością porusza się ona w LAB?

Rozwiązanie

$$\beta = \frac{pc}{E} = \frac{0,75\ \frac{\text{GeV}}{c} \cdot c}{1,25\ \text{GeV}} = \frac{3}{5}, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1,25$$

Ale

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{p^2c^2}{E^2}}} = \frac{E}{Mc^2}$$

więc

$$Mc^2 = \frac{E}{\gamma} = \frac{1,25\ \text{GeV}}{1,25} = 1\ \text{GeV}$$

czyli cząstka to nukleon o masie ok. 0,940 GeV/c^2. Jego prędkość w układzie LAB to β. W tym rozwiązaniu E to całkowita energia cząstki.

Zadanie 4 – oddziaływanie elektronów z fotonami

Czy, bez obecności ciał trzecich:

a) Swobodny elektron może pochłonąć foton (albo: czy zjawisko fotoelektryczne może zajść na swobodnym elektronie)?

b) Swobodny elektron może wyemitować foton?

c) Możliwy jest proces: $\gamma \;\rightarrow\; e^+e^-$?

d) Możliwy jest proces: $e^+e^- \;\rightarrow\; \gamma$?

Rozwiązanie

Komentarz ogólny: Rozwiązanie tego zadania opiera się o przemyślny wybór układu odniesienia. Trzeba tutaj przywołać Einsteina zasadę względności mówiącą, że prawa fizyki są te same we wszystkich inercjalnych układach odniesienia („inercjalnych” czyli powiązanych ze sobą transformacją Lorentza). A więc wystarczy znaleźć jeden układ, w którym jakiś proces jest niemożliwy aby był on niemożliwy w ogóle.

Punkt a) Pytamy o to, czy możliwa jest reakcja $e+\gamma \to e$. Załóżmy, że początkowy elektron spoczywa i napiszmy równania zachowania energii i pędu:

$$mc^2 + h\nu = mc^2\gamma$$

$$0 + \frac{h\nu}{c} = m\beta c\gamma$$

Niewiadomymi są tu ν oraz β co już jest dziwne, bo zakłada wybór specjalnej kinematyki (ν to częstość fotonu padającego na elektron, β to prędkość elektronu końcowego a m to masa spoczynkowa elektronu). Z równań tych, po wyznaczeniu ν otrzymuje się następujące równanie na β:

$$2\beta\,(1-\beta) = 0$$

co oznacza, że albo $\beta = 0$ (niemożliwe bo wtedy z zachowania pędu wynikałoby, że foton ma zerowe ν) albo że $\beta = 1$, co też jest niemożliwe bo elektron ma masę. A więc założona reakcja nie może mieć miejsca.

Punkt b) Teraz pytamy o możliwość zajścia reakcji $e \to e+\gamma$. Załóżmy znowu, że początkowy elektron spoczywa, co oznacza, że w stanie końcowym elekron i foton rozbiegają sie w przeciwnych kierunkach. Równanie zachowania energii jest:

$$mc^2 = E_\gamma + \sqrt{(p_e^{\text{konc.}})^2\, c^2 + m^2c^4}$$

i jak widać nie jest ono spełnione (energia końcowa jest większa niż początkowa).

Punkt c) Pytamy wreszcie czy możliwy jest proces $\gamma \to e^+e^-$. Wybierzmy taki układ współrzędnych, w którym dwa końcowe elektrony lecą naprzeciwko siebie tak, że ich pęd całkowity równy jest zeru. To oznaczałoby jednak, ze foton początkowy stoi, co jest niemożliwe. Tu trzeba dodać komentarz o tym, że konwersja fotonu na parę cząstka–antycząstka nie jest więc możliwa w próżni.

Zadanie 5 – produkcja wysokoenergetycznych fotonów

W celu uzyskania wysokoenergetycznych fotonÛw, wiązkę światła np. z lasera kieruje się przeciwbieżnie do wiązki wysokoenergetycznych elektronów i wybiera fotony rozproszone „do tyłu” w stosunku do ich początkowego kierunku lotu. Zakładając, że kąt między wiązkami początkowych elektronów i fotonów wynosi $180°$, oblicz jaką energię mogą uzyskać fotony rozproszone do tyłu, jeżeli źródłem fotonów jest laser rubinowy dający fotony o energii $E = 1,78$ eV ($\lambda = 0,6943\ \mu$m), elektrony zaś mają energię $E_e = 16$ GeV.

Rozwiązanie

Piszemy równania zachowania energii i pędu:

$$p_e - \frac{E}{c} = p'_e + \frac{E'}{c}$$
$$E + E_e = E' + \sqrt{m^2c^4 + {p'_e}^2 c^2}$$

(wielkości primowane oznaczają stan końcowy). Są tu dwie niewiadome: E', p'_e. Wyznaczam p'_e z pierwszego równania, podstawiam do drugiego i dostaję:

$$E' = \frac{E(p_e c + E_e)}{E_e - p_e c + 2E)}.$$

Tutaj: $p_e c = \sqrt{E_e^2 - m^2c^4}$. Zauważmy, że $E \ll E_e$, można więc podstawić: $p_e c \approx E_e$ w liczniku (ale NIE w mianowniku, bo tam mamy dwie potencjalnie małe wielkości: $E_e - p_e c$ oraz $2E$!!), skąd:

$$E' \approx \frac{2EE_e}{E_e + 2E - cp_e}$$

Rozwijam część mianownika w/w pamiętając, że $\sqrt{1-x} \approx 1 - x/2$ jeśli tylko $|x|$ jest małe:

$$E_e - cp_e = E_e - \sqrt{E_e^2 - m^2c^4} = E_e - E_e\sqrt{1 - m^2c^4/E_e^2} \approx E_e - E_e\left(1 - \frac{m^2c^4}{2E_e^2}\right) = \frac{m^2c^4}{2E_e}$$

Ostatecznie:

$$E' \approx \frac{2EE_e}{2E + \frac{m^2c^4}{2E_e}} = \frac{4EE_e^2}{4EE_e + m^2c^4} \approx 5 \text{ GeV !!!!}$$

Energia rozproszonych do tyłu fotonów z lasera jest więc istotnie bardzo wysoka. Na tej zasadzie ma działać zderzacz fotonów, planowany w połączeniu z (także planowanym) wielkim zderzaczem liniowym ILC (International Linear Collider), w którym czołowo zderzać się będą elektrony i pozytony.

Rozwiązanie bez użycia praw zachowania lecz za pomocą dwóch transformacji Lorentza i wzoru Comptona, patrz zadanie 11.

Zadanie 6 – produkcja antyprotonów

Antyprotony nie istnieją w stanie naturalnym na Ziemi; mogą jednak być wytwarzane sztucznie w laboratoriach fizyki wysokich energii, takich jak np. CERN. Antyproton różni się od protonu m.in. znakiem ładunku elektrycznego. Masa antyprotonu jest identyczna z masą protonu. Oblicz jaką najmniejszą energię kinetyczną musi mieć proton padający na inny, nieruchomy, proton aby w takim zderzeniu powstał antyproton, wg schematu: $\mathrm{p} + \mathrm{p} \to \overline{\mathrm{p}} + \mathrm{p} + \mathrm{p} + \mathrm{p}$.

Rozwiązanie

Wykorzystamy pojęcie masy niezmienniczej (inwariantnej) układu cząstek i, zdefiniowanej związkiem:

$$M_{\text{inv}}^2 c^4 = \left(\sum_i E_i\right)^2 - c^2\left(\sum_i \vec{p}_i\right)^4.$$

Kwadrat masy niezmienniczej jest wielkością niezmienniczą nie tylko dlatego, że nie zależy od układu odniesienia, w którym wielkość ta jest obliczana, ale również dlatego, że na mocy zasad zachowania pędu i energii ma tę samą wartość po reakcji jak i przed reakcją. Zauważmy, że w układzie środka masy, gdzie z definicji $\sum_i \vec{p}_i = 0$, niezmiennik $M_{\rm inv}c^2$ ma sens całkowitej energii w tym układzie.

Warunek **najmniejszej** energii kinetycznej będzie spełniony wtedy, kiedy w układzie środka masy wszystkie cztery cząstki w stanie końcowym będą się znajdowały w stanie spoczynku, tzn, że $M_{\rm inv}^2 c^4 = 16\,m^2c^4$ (m jest masą spoczynkową protonu). Ta wartość $M_{\rm inv}^2 c^4$ jest oczywiście równa kwadratowi masy inwariantnej w stanie poczatkowym w układzie środka masy a ponieważ jest to niezmiennik to równa się ona także kwadratowi masy inwariantnej w stanie końcowym reakcji:

$$M_{\rm inv}^2 c^4 = (E + mc^2)^2 - p^2c^2 = 16\,m^2\,c^4$$

(E jest energią laboratoryjną padającego protonu). Z w/w równania: $E = 7\,mc^2$. Jest to energia całkowita protonu; jego energia kinetyczna jest więc: $T = E - mc^2 = 6mc^2 \approx 5,64$ GeV. Akcelerator protonów „Bevatron" w Narodowym Laboratorium L. Berkeley'a (LBNL) w Kalifornii, o takiej właśnie energii wiązki, został w 1954 roku zbudowany w celu wyprodukowania antyprotonu. Zabieg się udał i antyprotony o dokładnie przewidzianych własnościach zostały pierwszy raz wytworzone.

Zadanie 7 – cząstki krótkożyjące

Ciężkie elektrony, tzw. miony μ, żyją średnio $\tau = 1\,\mu$s od momentu powstania w reakcji jądrowej do momentu rozpadu na inne cząstki. Ich masa spoczynkowa to $m_\mu \approx 0{,}106$ GeV/c^2. W CERN, w doświadczeniu COMPASS, w którym uczestniczy grupa warszawska, do badań używane są miony o energii $E = 200$ GeV. Czy rzeczywiście można używać mionów w doświadczeniach z wielkimi detektorami, takimi jak detektor COMPASS-a, który ma długość około 100 metrów?

Rozwiązanie

Czas życia każdego obiektu rozpadającego się spontanicznie (jądra atomowego, cząstki mikroświata,...) definiowany jest zawsze w jego układzie spoczynkowym. To samo dotyczy rozważanego mionu. Droga jaką on przeleci w układzie LAB i jego czas życia tamże, wynika z transformacji Lorentza (wielkości primowane dotyczą układu własnego, nieprimowane – układu LAB):

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) = 0, \qquad\qquad \Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}) = \tau$$

Z pierwszego równania wynika:

$$\Delta x = v\Delta t \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{\Delta x}{v}$$

co po podstawieniu do drugiego, przyjęciu $\gamma = E/mc^2 \approx 2000$, $\quad \beta \approx 1$ i po przekształceniach daje:

$$\Delta x = \beta c \gamma \tau = 6 \cdot 10^5\,\text{m}.$$

A więc mion o powyższej energii w ciągu swego **średniego** (podkreślone !) czasu życia przeleci odległość odpowiadającą wielokrotnej długości detektora (nawet bez efektu Lorentza wystarczy mu czasu życia na przebiegnięcie długości detektora ale tu trzeba pamiętać, że wtedy znaczna część mionów w wiązce jednak się rozpadnie zanim zrobimy z nich użytek). Jego skończony czas życia zupełnie więc nie przeszkadza w używaniu go do skomplikowanych badanianń naukowych; z punktu widzenia eksperymentatorów wysokich energii, mion jest cząstką trwałą.

Zadanie 8 – zderzenie czołowe dwóch cząstek

Dwie cząstki o masach m_1 i m_2 i całkowitych energiach odpowiednio E_1 i E_2 zderzają się czołowo.

a) Oblicz maksymalną energię jaka może być przeznaczona na produkcję nowych cząstek w tym zderzeniu (jest to tzw. energia użyteczna).

b) Jak duża będzie ta energia jeśli cząstka numer 2 jest w spoczynku, tzn. $E_2 = m_2c^2$?

Rozwiązanie

Punkt a) Energia użyteczna to po prostu masa niezmiennicza, która jest równa całkowitej energii w układzie środka masy zderzających sie obiektów. W LAB jej kwadrat z definicji jest:

$$(M_{\rm inv}c^2)^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1\, c + \vec{p}_2\, c)^2.$$

czyli:

$$(M_{\rm inv}c^2)^2 = (E_1 + E_2)^2 - \left(\sqrt{E_1^2 - m_1^2c^4} - \sqrt{E_2^2 - m_2^2c^4}\right)^2$$

Punkt b) Teraz $E_2 = m_2c^2$ czyli z w/w równania:

$$(M_{\rm inv}c^2)^2 = (E_1 + m_2c^2)^2 - E_1^2 + m_1^2c^4 = 2E_1m_2c^2 + m_2^2c^4 + m_1^2c^4$$

Zadanie 9 – kinematyka relatywistyczna

Pokaż, że w zjawisku rozpraszaniu Comptona energia fotonu przed rozproszeniem mierzona w układzie, w którym pierwotny elektron spoczywał, jest równa energii rozproszonego fotonu, jeśli energię tę mierzymy w układzie związanym z elektronem po rozproszeniu.
Wskazówka Skorzystaj z tzw. masy niezmienniczej $M_{\rm inv}$, zdefiniowanej związkiem:

$$M_{\rm inv}^2c^4 = \left(\sum_i E_i\right)^2 - c^2\left(\sum_i \vec{p}_i\right)^2.$$

Rozwiązanie

Jeśli przez $(E_f, c\vec{p}_f)$ oznaczymy czterowektor energii i pędu fotonu przed rozproszeniem, jak również przyjmiemy, że przed rozproszeniem elektron spoczywał, to kwadrat masy niezmienniczej wynosi

$$M_{\rm inv}^2c^4 = (E_f + m_ec^2) - c^2p_f^2 = (E_f + m_ec^2) - E_f^2 = 2E_fm_ec^2 + m_e^2c^4.$$

Ta sama masa niezmiennicza po rozproszeniu wynosi

$$M_{\rm inv}^2c^4 = (E_f'' + E_e'')^2 - c^2(\vec{p}_f\,'' + \vec{p}_e\,'')^2,$$

gdzie $(E_f'', c\vec{p}_f\,'')$ to czteropęd fotonu po rozproszeniu, oraz $(E_e'', c\vec{p}_e\,'')$ czteropęd elektronu po rozproszeniu mierzony w dowolnym układzie odniesienia. Skorzystamy teraz z jej niezmienniczego charakteru i wyznaczymy ją w układzie odniesienia, w którym elektron po rozproszeniu spoczywa:

$$M_{\rm inv}^2c^4 = (E_f' + m_ec^2)^2 - c^2(p_f')^2 = (E_f' + m_ec^2)^2 - (E_f')^2 = 2E_f'm_ec^2 + m_e^2c^4$$

gdzie $(E_f', c\vec{p}_f\,')$ to czteropęd fotonu po rozproszeniu w układzie odniesienia spoczywającego elektronu po rozproszeniu. Porównując obie wartości otrzymujemy wynik $E_f' = E_f$.