Fizyka I (mechanika) 1100-1AF14

Wykład 10

December 11, 2023

Plan wykładu

Ruch w polu sił centralnych

Siły centralne

Siłą centralną nazywamy siłę postaci

$$\vec{F} = F(r)\vec{e}_r,$$

gdzie $\vec{e}_r$ jest wersorem w kierunku wektora wychodzącego z centrum siły znajdującego się w $\vec{r} = 0$. Naturalnym układem odniesienia jest w tym przypadku układ o początku w centrum siły.
Przykłady:

- siła grawitacyjna: $F(r) = -\frac{GMm}{r^2}$
- siła elektrostatyczna $F(r) = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2}$
- siła sprężysta: $F(r) = -kr$

Gdy $F(r)$ jest ujemne, siła jest przyciągająca, gdy dodatnie - odpychająca. .

Moment pędu w ruchu w polu siły centralnej

Moment siły wywierany przez siłę centralną jest równy

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times F(r)\vec{e}_r = 0,$$

co oznacza, że w ruchu w polu siły centralnej:

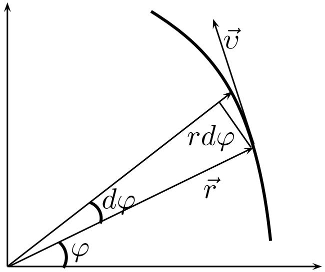
- zachowany jest moment pędu
- z czego wynika, że ruch jest płaski (bo kierunek momentu pędu się nie zmienia)

Wielkość, która jest stała podczas ruchu nazywamy *całką ruchu*.

Opis ruchu płaskiego

W przypadku ruchu płaskiego w polu siły centralnej wygodnie jest opisywać położenie ciała w układzie biegunowym o początku w centrum siły, gdyż posługiwanie się zmiennymi r, φ, z, a nie x, y i z upraszcza rachunki i pozwala na łatwiejszą interpretację końcowych wyników.

Prędkość polowa



$$\vec{L} = \vec{r}\times m\vec{v} = \vec{r}\times m\vec{v}_\varphi = mr^2\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_z =$$

Pole trójkąta dS zakreślonego przez wektor $\vec{r}$ w czasie dt jest równe $dS = r^2 d\varphi/2$, zatem

$$\frac{dS}{dt} = \frac{r^2}{2}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{2m} = const.$$

W ruchu pod wpływem siły centralnej prędkość polowa jest stała.

Siła centralna jest zachowawcza

Siła centralna jest postaci

$$\vec{F} = F\vec{e}_r = F\frac{\vec{r}}{r},$$

zatem

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F}\frac{\vec{r}}{r}d\vec{r} = Fdr$$

bo $\vec{r}d\vec{r} = rdr$. Jeśli funkcja $F(r)$ jest całkowalna (oczywiste w przypadku fizycznych sił), to możemy napisać, że

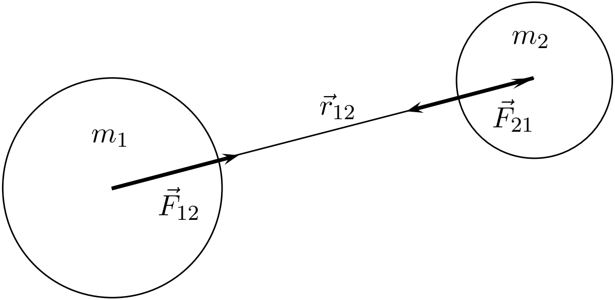
$$F(r) = -\frac{dE_p}{dr}$$

skąd wynika, że

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -(E_p(B) - E_p(A)).$$

Grawitacja

Oddziaływanie grawitacyjne



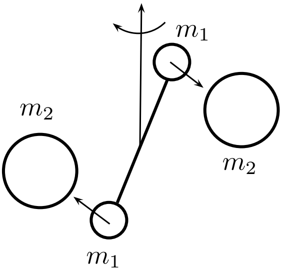
$$\vec{F}_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}; \qquad G = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm}^2/\mathrm{kg}^2$$

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

$\vec{F}_{12}$ - siła, z jaką na ciało o masie m_1 działa ciało o masie m_2.
$\vec{r}_{12}$ - wektor o początku w centrum masy m_1 i końcu w centrum masy m_2.
$G = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm}^2/\mathrm{kg}^2$.

Waga skręceń

Wagę skręceń wynaleźli niezależnie Mitchell (badania oddziaływań grawitacyjnych) i Coulomb (badania oddziaływań elektrostatycznych).
John Mitchell (1724 - 1793) - angielski fizyk, astronom i geolog, członek Royal Society od 1760 r.



Do kwarcowego pręta można przyczepić lusterko i obserwować odbicie promienia lasera.

Doświadczenie Cavendisha (1797 - 1798)

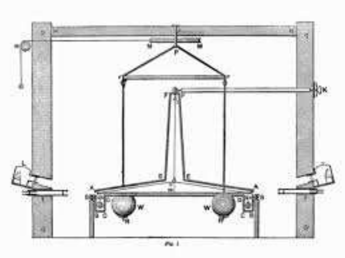
Henry Cavendish (1731 - 1810) - brytyjski chemik i fizyk, członek Royal Society od 1760 r.
Do jego osiągnięć należy:

- wydzielenie wodoru
- wydzielenie dwutlenku węgla
- określenie składu powietrza
- oznaczenie składu wody
- oznacznie składu kwasu azotowego
- odkrcie - przed Coulombem i Ohmem - prawa Coulomba i prawa Ohma (nie opublikował tych prac)
- pierwsze dość dokładne oszacowanie masy Ziemi

Po śmierci Cavendisha, z jego pieniędzy ufundowano The Cavendish Laboratory w Cambridge University. Budowę nadzorował osobiście James Clerk Maxwell (został pierwszym jego profesorem).

Doświadczenie Cavendisha (1797 - 1798)

Michell zmarł w 1793 r. i nie dokończył realizowanego projektu. Jego aparaturę przejął Wollaston, a potem - Cavendish. Parametry doświadczenia Cavendisha były następujące.
Dwie kule ołowiane o średnicy 2 cali i masie 1.61 funta każda umieszczone na końcach drewnianej beleczki o długości 6 stóp. Beleczka zawieszona w środku ciężkości na drucie. Na niezależnej podstawie, dwie ołowiane kule o śrdenicy 12 cali i masie 348 funtów, umieszczone w odległości około 9 cali od małych kul. Całość zamknięta w drewnianej obudowie o grubości ścianek 2 stopy i wysokosci 10 stóp. Teleskopowa (przez dziurę w ścianie) obserwacja oscylacji beleczki wagi (amplituda 0.16 cala; dokładność: 0.01 cala; okres drgań: ok. 20



Siła oddziaływania kul: 1.74×10^{-7} N (ciężar ziarnka piasku).

Co wyznaczył Cavendish?

Cavendish chciał wyznaczyć gęstość materii tworzącej Ziemię. Posługiwał się, oczywiście, prawem grawitacji Newtona, ale w jego czasach nie było ono wyrażane za pomocą stałej grawitacji G - to nastąpiło dopiero kilkadziesiąt lat później. Jedno z pierwszych odniesień do stałej grawitacji pochodzi z 1873 r., 75 lat po doświadczeniu Cavendisha.

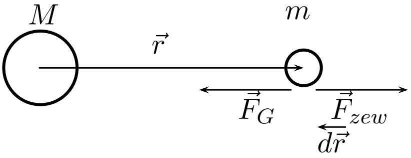
$$G = g\frac{R_Z^2}{M_Z} = \frac{3g}{4\pi R_Z \varrho_Z}.$$

Cavendish wyznaczył wartość $\varrho_Z = 5.448$ g/cm^3, co po przeliczeniu na jednostki SI daje $G = 6.74 \times 10^{-11}$ m^{3}kg^{-1}s^{-2}, co różni się o 1% od współcześnie przyjmowanej wartości
$G = 6.7384 \times 10^{-11}$ m^{3}kg^{-1}s^{-2}

Grawitacyjna energia potencjalna

Jak pamiętamy, zmiana energii potencjalnej ciała o masie m w polu grawitacyjnym wytworzonym przez masę M jest równa pracy, jaką musi wykonać siła zewnętrzna, by przesunąć ciało z punktu A do punktu B. W przypadku oddziaływania grawitacyjnego wygodnym punktem odniesienia jest "nieskończoność": $E_p(r \to \infty) \to 0$.

Grawitacyjna energia potencjalna



$$E_p(R) = \int_\infty^R \vec{F}_{zew} \cdot d\vec{r} = \int_\infty^R G\frac{Mm}{r^2}\vec{e}_r \cdot d\vec{r}$$

UWAGA: $d\vec{r} = dr\vec{e}_r$ BEZ WZGLĘDU NA KIERUNEK RUCHU.

$$E_p(R) - E_p(r \to \infty) = \int_\infty^R G\frac{Mm}{r^2}dr = -G\frac{Mm}{R}$$

Praca ta jest niezależna od drogi - to samo otrzymamy dla drogi o dowolnym kształcie.

Energia potencjalna układu mas

1. Dana jest masa m_1.
2. Sprowadzamy w jej pobliże masę m_2. $E_p = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}}$.
3. Sprowadzamy kolejną masę m_3

$$E_p = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}} - G\frac{m_1 m_3}{r_{13}} - G\frac{m_2 m_3}{r_{23}}.$$

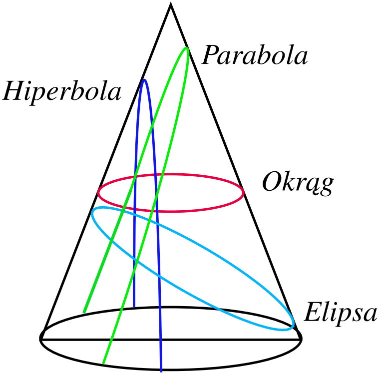
r_{ij} - końcowe odległości między środkami mas m_i i m_j.

Energia potencjalna układu mas jest równa sumie energii potencjalnych oddziaływania każdej pary.

Zagadnienie Keplera

Problem nazywany "Zagadnieniem Keplera" polega na znalezieniu ruchu planety w polu grawitacyjnym słońca, a w nieco ogólniejszym sformułowaniu - na znalezieniu ruchu dwóch mas oddziałujących siłą odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości.
W obu przypadkach układ jako całość porusza się ze stałą prędkością środka masy w wybranym układzie inercjalnym, a słońce i planeta poruszają się wokół środka masy. W pierwszym przypadku (planeta i słońce) można z dobrym przybliżeniem założyć, że ruch planety odbywa się wokół nieruchomego słońca, gdyż środek masy układu pokrywa się z bardzo dobrą dokładnością ze środkiem słońca, co ułatwia wyobrażenie sobie ruchu układu.

Krzywe stożkowe



Krzywa stożkowa: zbiór punktów płaszczyzny, dla których stosunek odległości od wybranego punktu (zwanego ogniskiem) i wybranej prostej (zwanej kierownicą) jest stały. Stosunek ten nazywamy *mimośrodem*, ϵ.

Krzywe stożkowe

W zależności od wartości ϵ krzywa stożkowa jest:

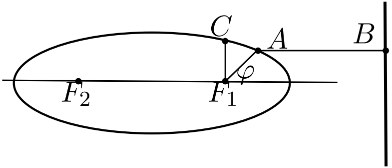
- okręgiem dla $\epsilon = 0$;
- elipsą dla $0 < \epsilon < 1$;
- parabolą dla $\epsilon = 1$;
- hiperbolą dla $\epsilon > 1$.

Elipsa

Elipsa - miejsce geometryczne punktów, których suma odległości od ognisk F_1 i F_2 jest stała. Suma ta jest równa $2a$, gdzie a jest dużą półosią elipsy.
Odległość ogniska od środka elipsy wynosi $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, gdzie b jest małą półosią.
Mimośród definiujemy jako

$$\epsilon = \frac{c}{a}.$$

Widać, że dla okręgu, $\epsilon = 0$.
Stosunek odległości dowolnego punktu elipsy od ogniska do odległości tego punktu do sprzężonej z tym ogniskiem kierownicy jest równy mimośrodowi elipsy.



Prawa Keplera

Prawa Keplera są wnioskami wynikającymi z rozwiązania Zagadnienia Keplera w przypadku orbit zamkniętych (elipsa i okrąg). Rozwiązanie Zagadnienia Keplera pozwala także na analizę orbit otwartych (parabola, hiperbola).

1. Wszystkie planety poruszają się po elipsach, w których ognisku znajduje się Słońce.

2. Linia łącząca planetę ze Słońcem zakreśla w jednakowych odstępach czasu jednakowe pola powierzchni w płaszczyźnie orbity, czyli prędkość polowa jest stała.

3. Kwadrat okresu ruchu planety na orbicie jest proporcjonalny do sześcianu wielkiej półosi orbity.

Rozwiązanie zagadnienia Keplera - schemat

1. Wypisujemy równania ruchu w układzie inercjalnym dla mas m_1 i m_2. Zmienne niezależne: $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$. Dokonujemy zamiennych zmiennych $(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \to (\vec{R}_{SM}, \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1)$.
2. Znajdujemy ruch środka masy: $\vec{R}_{SM} = \vec{R}_0 + \vec{V}_{SM} t$.
3. Równanie do rozwiązania ma postać: $\mu \ddot{\vec{r}} = -\frac{\alpha}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$.
   a) mnożąc wektorowo przez $\vec{r}$ znajdujemy, że w układzie środka masy ruch jest płaski, a moment pędu - stały: całka momentu pędu.
   b) mnożąc skalarnie przez $\dot{\vec{r}}$ znajdujemy, że w układzie środka masy stała jest energia: całka energii.
   c) wyrażamy v^2 przez r, φ, L_{SM} i wstawiamy do całki energii, która ma postać równania różniczkowego na $r(\phi)$.
   d) całkując to równanie otrzymujemy $r(\phi) = \frac{p}{1+\epsilon\cos(\varphi-\gamma)}$.
   e) znajdujemy związki między p, ϵ, γ a parameterami orbity, energią i momentem pędu.
4. Analiza otrzymanego rozwiązania pozwala na sformułowanie praw Keplera..

Równania ruchu dla mas m_1 i m_2; zamiana zmiennych

$$\left\{ \begin{array}{rcl} m_1\ddot{\vec{r}}_1 & = & G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \\ m_2\ddot{\vec{r}}_2 & = & -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \end{array} \right. \tag{1}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \vec{r} & = & \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \\ \vec{R}_{SM} & = & \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2} \end{array} \right.$$

Dodając stronami otrzymujemy: $m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2 = 0 \Rightarrow \vec{R}_{SM} = \vec{R}_0 + \vec{V}_0 t$.
Wyrażamy $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$ przez $\vec{R}_{SM}$ i $\vec{r}$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \vec{r}_1 & = & \vec{R}_{SM} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r} \\ \vec{r}_2 & = & \vec{R}_{SM} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r} \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \ddot{\vec{r}}_1 & = & -\frac{m_2}{m_1+m_2}\ddot{\vec{r}} \\ \ddot{\vec{r}}_2 & = & \frac{m_1}{m_1+m_2}\ddot{\vec{r}} \end{array} \right. \tag{2}$$

W układzie środka masy (tzn. względem punktu określonego przez wektor $\vec{R}_{SM}$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \vec{r}_{1,SM} & = & -\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r} \\ \vec{r}_{2,SM} & = & \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r} \end{array} \right. \tag{3}$$

Równania ruchu dla mas m_1 i m_2; zamiana zmiennych

Z postaci (3) widać, że środek masy leży na odcinku łączącym m_1 i m_2 i dzieli go w stosunku $\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}$. Jeśli zatem $m_1 \gg m_2$, to $r_1 \ll r_2$, czyli środek masy pokrywa się (prawie) z położeniem masy m_1. To jest przypadek Słońce + planeta. Możemy z bardzo dobrym przybliżeniem uznać, że układ środka masy, w którym jest rozwiązywany problem ruchu względnego jest układem o środku położonym w środku Słońca.

Podstawiając (2) do (1) otrzymujemy dwa identyczne równania:

$$\ddot{\vec{r}} = -G\frac{m_1 + m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}.$$

Chcielibyśmy po prawej stronie mieć siłę oddziaływania mas $G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$. Mnożymy zatem prawą stronę przez $m_1 m_2 / m_1 m_2$ i dostajemy:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}.$$

Równania ruchu dla mas m_1 i m_2; zamiana zmiennych

Wprowadzamy masę zredukowaną μ:

$$\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{1}{\mu}$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Równanie, które należy rozwiązać, żeby znaleźć ruch względny:

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -\frac{\alpha}{r^2} \frac{\vec{r}}{r},$$

gdzie $\alpha = G m_1 m_2$.

Uwaga: ruch środka masy dotyczy CAŁKOWITEJ masy $m_1 + m_2$, zaś ruch względny - masy ZREDUKOWANEJ. Tylko w przypadku $m_1 \gg m_2$ (czyli Słońce + planeta) możemy masę zredukowaną utożsamić z masą planety.

Ruch środka masy

Ruch środka masy $\vec{R}_{SM} = \vec{R}_0 + \vec{V}_0 t$ oznacza, że w układzie inercjalnym, w którym cały problem rozpatrujemy, środek masy przemieszcza się ruchem jednostajnym prostoliniowym. Należało tego oczekiwać, ponieważ w rozpatrywanym problemie na układ nie działają siły zewnętrzne (a tylko siły wewnętrzne - oddziaływania grawitacyjnego). Ruch ten moglibyśmy utożsamić (w przybliżeniu) z ruchem układu planetarnego wokół centrum Galaktyki. Ale uwaga: taki ruch nie jest prostoliniowy!

Całka momentu pędu

$$\mu\ddot{\vec{r}} = -\frac{\alpha}{r^2}\frac{\vec{r}}{r},$$

$$\vec{r} \times \mu\ddot{\vec{r}} = -\vec{r} \times \frac{\alpha}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \mu\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \vec{r} \times \mu\ddot{\vec{r}},$$

czyli

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \mu\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = 0,$$

czyli

$$\vec{r} \times \mu\frac{d\vec{r}}{dt} = \overrightarrow{const}.$$

Wynika stąd, że $\vec{r}$ i $\frac{d\vec{r}}{dt}$ leżą w jednej płaszczyźnie, bo gdyby tak nie było, to ich iloczyn wektorowy nie mógłby być stałym wektorem - ruch WZGLĘDNY jest płaski.

Całka momentu pędu

Wykażemy, że $\vec{L}_{MS} = \vec{r} \times \mu \frac{d\vec{r}}{dt}$ jest momentem pędu dwóch mas względem środka masy.

$$\vec{L}_{1,SM} = \vec{r}_{1,SM} \times m_1 \dot{\vec{r}}_{1,SM} = -\frac{\mu}{m_1} \vec{r} \times m_1 (-\frac{\mu}{m_1} \dot{\vec{r}}) = \frac{\mu^2}{m_1} \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$$

$$\vec{L}_{2,SM} = \vec{r}_{2,SM} \times m_2 \dot{\vec{r}}_{2,SM} = \frac{\mu}{m_2} \vec{r} \times m_2 (\frac{\mu}{m_2} \dot{\vec{r}}) = \frac{\mu^2}{m_2} \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$$

$$\vec{L}_{SM} = \vec{L}_{1,SM} + \vec{L}_{2,SM} = \mu^2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{r} \times \mu \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Wprowadzamy układ biegunowy w płaszczyźnie ruchu względnego, o środku $\mathcal{O}$ w punkcie m_1. Czyli, położenie punktu m_2 będzie określone przez r i φ.

Prędkość względna $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi$.

$$\vec{L}_{SM} = \vec{r} \times \mu\dot{\vec{r}} = \mu r^2 \frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_z = \overrightarrow{const}.$$

$$L_{SM} = \mu r^2 \frac{d\varphi}{dt} = const.$$

Całka energii

Wracamy do równania $\mu\ddot{\vec{r}} = -\frac{\alpha}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$ i mnożymy je skalarnie przez v:

$$\mu\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}} = -\frac{\alpha}{r^2}\vec{v}\cdot\frac{\vec{r}}{r}.$$

Lewa strona jest równa

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\mu\vec{v}^2\right)$$

Prawa strona jest równa

$$-\alpha\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{\vec{e}_r}{r^2} = -\alpha\left(\frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi\right)\cdot\frac{\vec{e}_r}{r^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha}{r}\right),$$

czyli

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\mu\vec{v}^2 - \frac{\alpha}{r}\right) = 0.$$

Całka energii

Wykażemy, że $\mu v^2/2$ jest energią kinetyczną w układzie środka masy, a $-\alpha/r$ - energią potencjalną.

$$E_{k,SM} = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}^2_{1,SM} + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}^2_{2,SM} = \frac{m_1}{2} \frac{\mu^2}{m_1^2} v^2 + \frac{m_2}{2} \frac{\mu^2}{m_2^2} v^2 = \frac{1}{2} \mu v^2.$$

$$E_{p,SM} = -\frac{\alpha}{r}.$$

Równanie różniczkowe na $r(\varphi)$

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L_{SM}}{\mu r^2},$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{L_{SM}}{\mu r^2}$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{L_{SM}^2}{\mu^2}\left(\frac{dr}{d\varphi}\frac{1}{r^2}\right)^2 = \frac{L_{SM}^2}{\mu^2}\left(\frac{d}{dt}\frac{1}{r}\right)^2.$$

$$E_{SM} = \frac{1}{2}\frac{L_{SM}^2}{\mu}\left[\left(\frac{d}{d\varphi}\frac{1}{r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right] - \frac{\alpha}{r} = const.$$

Równanie różniczkowe na $r(\varphi)$

Całkując to równanie, dostajemy

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\varphi)}.$$

$$p = \frac{L_{SM}^2}{\alpha\mu}$$

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2E_{SM}L_{SM}^2}{\alpha\mu}}$$

Jest to równanie krzywej stożkowej, zapisane w układzie biegunowym.

Związek ϵ z energią i momentem pędu

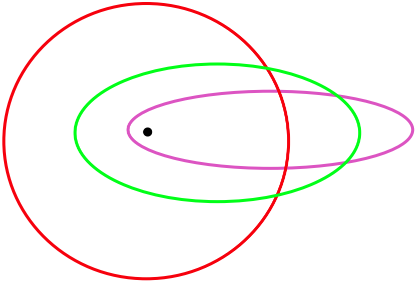
$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2E_{SM}L_{SM}}{\alpha^2\mu}}$$

Ponieważ $E_{SM} = \mu v^2/2 - \alpha/r$, to gdy $\alpha < 0$ (odpychanie) zawsze $E_{SM} > 0$, czyli $\epsilon > 1$ i tor jest hiperbolą.

Gdy $\alpha > 0$, E_{SM} może być dowolnego znaku:

- $E_{SM} > 0 \Rightarrow \epsilon > 1$ - tor jest hiperbolą
- $E_{SM} = 0 \Rightarrow \epsilon = 1$ - tor jest parabolą
- $E_{SM} < 0 \Rightarrow \epsilon < 1$ - tor jest elipsą

Tory eliptyczne



W tych trzech przypadkach energia całkowita jest taka sama - elipsy mają dużą półoś o jednakowej długości. Różnice w kształcie toru wynikają z różnych wartości momentu pędu - dla okręgu jest największa.

$$p = \frac{L_{SM}^2}{\alpha\mu}$$

Prawa Keplera

Dla siły grawitacyjnej $\alpha = Gm_1m_2 > 0$, czyli otrzymujemy I prawo Keplera: ruch ciała m_2 odbywa się po elipsie (w granicznym przypadku - okręgu), w której ognisku znajduje się ciało m_1.
Ponieważ moment pędu jest stały, zatem prędkość polowa jest stała, czyli otrzymujemy II prawo Keplera, które głosi, że prędkość polowa jest stała.

Prawa Keplera

W celu wyprowadzenia III prawa Keplera zauważmy, że dotyczy ono tylko orbit zamkniętych, czyli eliptycznych.
Półosie elipsy są dane przez:

$$a = \frac{p}{1-\epsilon^2}, \qquad b = \frac{p}{\sqrt{1-\epsilon^2}}.$$

Stąd

$$a = \frac{L_{SM}^2}{\alpha\mu} \frac{1}{1 - 1 - \frac{2E_{SM}L_{SM}^2}{\alpha^2\mu}} = -\frac{\alpha}{2E_{SM}}.$$

$$b = L_{SM}\sqrt{\frac{a}{\alpha}}$$

Wynika stąd, że energia zależy tylko od wielkiej półosi elipsy.

Obliczmy okres T.

Ponieważ prędkość polowa jest stała i równa $L_{SM}/(2\mu)$, więc

$$T\frac{L_{SM}}{2\mu} = \pi ab.$$

Stąd

$$T^2 = \frac{4\mu\pi^2 a^3}{\alpha},$$

czyli

$$T^2 \sim a^3.$$

Efektywna energia potencjalna

W przypadku ruchu w polu siły zachowawczej (a taką jest siła centralna, np. siła grawitacji) mamy spełnioną zasadę zachowania energii mechanicznej:

$$E = \frac{mv^2}{2} + E_p = const$$

oraz zasadę zachowania momentu pędu:

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = const.$$

We współrzędnych biegunowych:

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi$$

oraz

$$L = mr^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right),$$

co daje

$$E = \frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + E_p = \frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + E_p^{eff}(r).$$

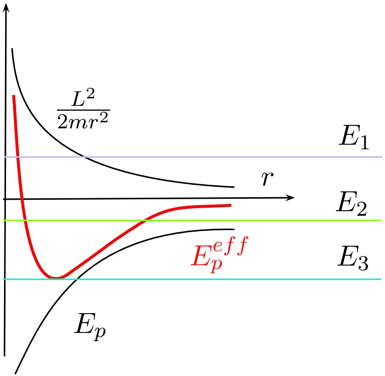
Efektywna energia potencjalna

Ponieważ energia kinetyczna nie może być ujemna, to musi być spełniona zależność:

$$E_k = E - E_p^{eff} > 0,$$

co oznacza, że moment pędu wpływa na zakres przestrzenny ruchu.

Efektywna energia potencjalna



E_1 - ciało zbliża się z nieskończoności do centrum siły na pewną odległość, a następnie oddala się do nieskończoności - orbita otwarta
E_2 - ciało porusza się w ogranicznym obszarze przestrzeni, między minimalną a maksymalną odległością od centrum siły - orbita jest zamknięta o ile $E_p(r) \sim r^{-1}$ albo $E_p(r) \sim r^2$.
E_3 - ciało porusza się po orbicie kołowej.
Dla energii mniejszych niż E_3 ruch jest niemożliwy.

Prędkości kosmiczne

I prędkość kosmiczna - prędkość satelity na orbicie kołowej o promieniu R_z:

$$v_I = \sqrt{\frac{GM}{R_Z}} \approx 7.91 \text{ km/s}$$

II prędkość kosmiczna - prędkość umożliwiająca ucieczkę z pola grawitacyjnego Ziemi:

$$V_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{R_Z}} \approx 11.19 \text{ km/s}$$

Wzór Bineta

Wzór Bineta jest wyrażeniem, za pomocą którego możemy wyznaczyć postać siły centralnej, gdy znamy równanie toru. Najwygodniej rozpatrywać zagadnienie we współrzędnych biegunowych. Oznacza to, że znamy zależność $r(\varphi)$.
Siła centralna ma tylko składową radialną:

$$F_r = ma_r = m\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right).$$

W celu obliczenia d^2r/dt^2 wyrazimy najpierw $v_r = dr/dt$ przez $dr/d\varphi$.

Wzór Bineta

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt},$$

natomiast $d\varphi/dt$ wyznaczamy na podstawie wartości mometu pędu, który jest stały dla ruchu w polu siły centralnej:

$$L = mr^2\frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{mr^2}.$$

Zatem,

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{L}{mr^2} = -\frac{L}{m}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Wzór Bineta

Druga pochodna:

$$\frac{dv_r}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{dr}{dt}\right)\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{-L}{m}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right)\frac{L}{mr^2} =$$

$$= -\frac{L^2}{m^2r^2}\frac{d^2}{d^2\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right).$$

A drugi wyraz w wyrażeniu na F_r wynosi:

$$r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\frac{L^2}{m^2r^3}.$$

Otrzymujemy zatem:

$$F = F_r = -\frac{L^2}{mr^2}\left(\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right).$$

Wzór Bineta - przykład

Punkt o masie m porusza się pod wpływem siły centralnej po okręgu o promieniu R, który przechodzi przez centrum siły. Jak zależy wartość siły od odległości od centrum, jeśli wartość momentu pędu wynosi L?
W tym przypadku $r = 2R\cos\varphi$. Podstawienie do wzoru Bineta daje:

$$F = -\frac{8L^2R^2}{mr^5}.$$

Energia potencjalna dla takiej siły (centralnej, więc wiemy, że potencjalnej) wynosi:

$$E_p(r) = -\int_\infty^r \vec{F}(s)\cdot\vec{ds} = -\frac{2L^2R^2}{mr^4},$$

przy założeniu, że energia potencjalna “w nieskończoności” jest równa zero.

Wzór Bineta - przykład

Eenrgia całkowita jest równa:

$$E = \frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{2L^2R^2}{mr^4},$$

zaś efektywna energia potencjalna

$$E_{p,eff}(r) = \frac{L^2}{2m}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{4R^2}{r^4}\right)$$

ma maksimum dla $r = 2\sqrt{2}R$, co leży poza orbitą. Maksymalna wartość $E_{p,eff}$ na orbicie jest osiągana dla $r = 2R$ i wynosi zero. Ponieważ dla $r = 2R$ prędkość radialna $dr/dt = 0$, to wnioskujemy, że całkowita energia ruchu jest równa 0.

Wzór Bineta - przykład

Warto zauważyć, że w przypadku tego potencjału cząstka spada na centrum. Pytanie, czy wykonuje ruch cykliczny?
Ponieważ moment pędu jest stały, więc możemy obliczyć okres tego ruchu, podobnie jak w przypadku trzeciego prawa Keplera: pole powierzchni zakreślone w ciągu okresu jest równe πR^2 z jednej strony, a $TL/2m$ - z drugiej:

$$\pi R^2 = T\frac{L}{2m},$$

co daje $T = 2\pi m R^2/L$.
Wynik ten można otrzymać nie odwołując się do stałości prędkości kątowej, całkując równanie $L = mr^2 d\varphi/dt$:

$$LT = 2mR^2 \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi = 2mR^2\left[\frac{1}{4}\sin 2\varphi + \frac{1}{2}\varphi\right]_0^{2\pi} = 2mR^2\pi.$$