Fizyka I (mechanika) 1100-1AF14

Wykład 11

January 8, 2024

Plan wykładu

1. Obserwator, czyli sieć zsynchronizowanych zegarów
2. Transformacja Lorentza
3. Interwał
4. Wnioski z transformacji Lorentza

Obserwator w szczególnej teorii względności

Jednym z podstawowych założeń prowadzących do sformułowania szczególnej teorii względności jest uznanie, że czas, w którym następuje zdarzenie jest wynikiem pomiaru dokonywanego przez obserwatora.

Przyjęcie tego założenia prowadzi do konieczności określenia, w jaki sposób mierzone są współrzędne czasowoprzestrzenne zdarzeń.

W ten sposób dochodzimy do konstrukcji sieci zsynchronizowanych zegarów, nieruchomej względem obserwatora, dzięki ktorej może on przypisywać zdarzeniom współrzędne czasoprzestrzenne.

Dwóch poruszających się względem siebie obserwatorów należy wyobrażać sobie jako dwie poruszające się względem siebie sieci zegarów, które zostały zsynchronizowane nei zależnie od siebie przez związanynych z nimi obserwatorów.

Określenie współrzędnych czasoprzestrzennych zdarzenia

Obserwator $\mathcal{O}$ znajdujący się w początku układu współrzędnych $\mathcal{U}$ bada ruch punktu P poruszającego się wzdłuż osi x. Zdarzeniem jest w tym przypadku znalezienie się punktu P w miejscu o współrzędnych (ct, x).

W chwili t_1 wysyła sygnał świetlny, który odbija się (bez opóźnienia) od P i powraca do $\mathcal{O}$ w chwili t_2. Na tej podstawie $\mathcal{O}$ stwierdza, że w chwili $t = (t_2 + t_1)/2$ punkt P znajdował się w odległości $c(t_2 - t_1)/2$, zatem jego współrzędne są równe:

$$(ct, x) = \left(\frac{c(t_2 + t_1)}{2}, \frac{c(t_2 - t_1)}{2} \right).$$

Zakładamy tu, że prędkość światła względem obserwatora $\mathcal{O}$ nie zależy od kierunku rozchodzenia się światła - jest to jeden z postulatów szczególnej teorii względności.

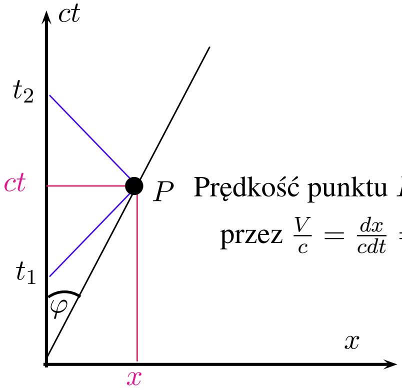
Określenie współrzędnych czasoprzestrzennych zdarzenia

Powtarzając tę procedurę, $\mathcal{O}$ tworzy *linię świata* punktu P. Zauważmy, że linia świata sygnału świetlnego jest przekątną układu współrzędnych (x, ct). Linia świata sygnału świetlnego nosi nazwę *stożka świetlnego*.

Można sobie wyobrazić przeprowadzenie tekiej procedury za pomocą np. sygnałów akustycznych. Ale prędkość światła jest prędkością szczególną: jest taka sama dla wszystkich obserwatorów. Jest to kolejny postulat szczególnej teorii względności.

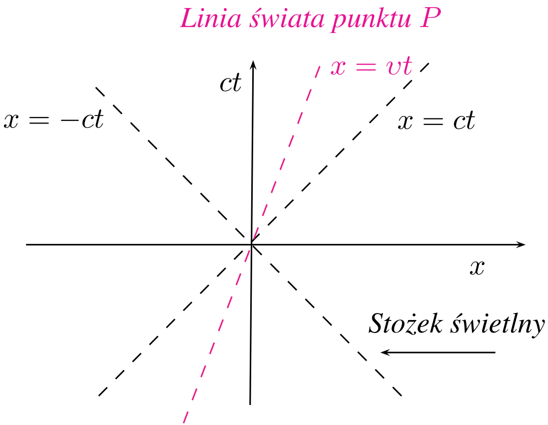
Linia świata puntku P

Procedurę określenia położenia punktu P możemy zatem zobrazować tak:



Prędkość punktu P dana jest przez $\frac{V}{c} = \frac{dx}{cdt} = \tan\varphi$.

Stożek świetlny - linia świata promienia światła



Sieć zsynchronizowanych zegarów

- Obserwator $\mathcal{O}$ ustawia zegary w miejscach, które uważa za stosowne. Może np. utworzyć przestrzenną sześcienną sieć zegarów, w której każdym węźle znajduje się zegar.
- Obserwator $\mathcal{O}$ mierzy odległość do zegara znajdującego się w punkcie P: $R = c(t_2 - t_1)/2$, a następnie przekazuje do P polecenie ustawienia zegara na chwilę $t + R/c$. W chwili t, wskazywanej przez zegar, przy którym się znajduje, wysyła do P sygnał świetlny, który dociera do P w chwili $t + R/c$ i uruchamia zegar wskazujący tę właśnie godzinę.
- W ten sposób tworzona jest sieć zsynchronizowanych zegarów.
- Dwa poruszające się względem siebie układy odniesienia należy rozumieć jak poruszające się względem siebie sieci zegarów, z których każda jest zsynchronizowana przez "swojego" obserwatora.
- Mówiąc, że zdarzenie zaszło w chwili t mamy na myśli, że zaszło w bezpośredniej bliskości zegara, który był zsynchronizowany z siecią zegarów obserwatora $\mathcal{O}$ i wskazywał czas t.

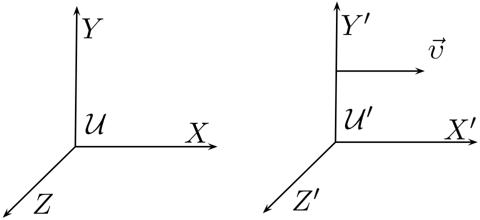
Postulaty szczególnej teorii względności

Formułując szczególną teorię względności, Einstein przyjął dwa postulaty:

1. Prędkość światła w próżni jest jednakowa w każdym kierunku we wszystkich inercjalnych układach odniesienia niezależnie od wzajemnego ruchu źródła i obserwatora. Jest to zarazem maksymalna prędkość rozchodzenia się oddziaływań w przyrodzie.
2. Prawa przyrody mają jednakową postać we wszystkich inercjalnych układach odniesienia - jest to *zasada względności Einsteina.* (zasada względności Galileusza: zjawiska mechaniczne zachodzą identycznie we wszystkich układach intercjalnych).

Stałość prędkości światła - wyprowadzenie transformacji Lorentza

Rozpatrujemy dwa układy współrzędnych: $\mathcal{U}$ i $\mathcal{U}'$ o wzajemnie równoległych osiach.



Stałość prędkości światła - wyprowadzenie transformacji Lorentza

Zakładamy, że:

- w obu układach stosowane są te same jednostki czasu i przestrzeni;
- układ $\mathcal{U}'$ porusza się względem układu $\mathcal{U}$ z prędkością V w kierunku $+x$. Tzn., $V = dx/dt$, gdzie x oznacza położenie $\mathcal{O}'$ (początek układu $\mathcal{U}'$) w układzie $\mathcal{U}$, a t - czas mierzony w układzie $\mathcal{U}$. Oznacza to, że układ $\mathcal{U}$ porusza się względem układu $\mathcal{U}'$ z prędkością $-V$, tzn., $-V = dx'/dt'$, gdzie x' - położenie $\mathcal{O}$ w układzie $\mathcal{U}'$, a t' - czas mierzony w układzie $\mathcal{U}'$;
- zakładamy, że w chwili, gdy $\mathcal{O}$ pokrywa się z $\mathcal{O}'$, zegary w obu układach wskazują $t = t' = 0$;

Stałość prędkości światła - wyprowadzenie transformacji Lorentza

Załóżmy teraz, że w punkcie $\mathcal{O}$ znajduje się źródło światła. Obserwator $\mathcal{O}$ rejestruje rozchodzącą się powierzchnię falową, która w chwili t określona jest wzorem:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2.$$

Chcemy, żeby obserwator $\mathcal{O}'$ stwierdził, że w jego układzie

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2.$$

Idea: wychodzimy od transformacji Galileusza i tak ją poprawiamy, żeby otrzymać pożądany wynik. Szukamy transformacji liniowej (wtedy kształt powierzchni fazowej nie będzie zdeformowany).

Stałość prędkości światła - wyprowadzenie transformacji Lorentza

Przypuśćmy, że słuszna jest transformacja Galileusza, czyli:

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t.$$

Wtedy $x^2 - 2xVt + V^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$.
Chcemy, żeby zniknęły wyrazy $-2xVt + V^2t^2$. Widać, że musimy skomplikować zależność między t a t'. Spróbujmy tak:

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t + ax,$$

gdzie a jest stałą. Wtedy

$$x^2 - 2xVt + V^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 + 2c^2atx + c^2a^2x^2.$$

Stałość prędkości światła - wyprowadzenie transformacji Lorentza

Wyrazy z xt znikną, jeśli $-2xVt = 2c^2atx$, czyli $a = -V/c^2$, czyli $t' = t - Vx/c^2$.

Wtedy dostaniemy

$$x^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)+y^2+z^2=c^2t^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right).$$

Stałość prędkości światła - wyprowadzenie transformacji Lorentza

Kolejna poprawka pozwoli nam na usunięcie czynnika

$$1 - \frac{V^2}{c^2} \equiv \frac{1}{\gamma^2}$$

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \gamma(x - Vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} t = \gamma(t - Vx/$$

$$\frac{x^2 - 2Vxt + V^2t^2}{1 - \frac{V^2}{c^2}} + y^2 + z^2 =$$

Stałość prędkości światła - wyprowadzenie transformacji Lorentza

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$$

Podstawiamy:

$$\gamma^2 (x - Vt)^2 + y^2 + z^2 = c^2 \gamma^2 (t - Vx/c^2)^2$$

Otrzymujemy:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$$

Znaleźliśmy zatem transformację, dla której prędkość światła jest taka sama dla dwóch poruszających się względem siebie obserwatorów.

Transformacja Lorentza

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & \gamma(x - \beta ct) \\ y' & = & y \\ z' & = & z \\ ct' & = & \gamma(ct - \beta x) \end{array} \right.$$

$$\beta = V/c, \quad \gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$$

Dla $\beta \to 0$, $\gamma \to 1$ i otrzymujemy transformację Galileusza:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & x - Vt \\ y' & = & y \\ z' & = & z \\ t' & = & t \end{array} \right.$$

Co transformuje transformacja Lorentza?

Transformacji podlegają *współrzędne zdarzenia* obserwowanego przez poruszających się względem siebie obserwatorów.

Praktyczny wniosek ułatwiający rozwiązywanie zadań:
zadanie należy sformułować poprzez wskazanie ciągu zdarzeń, którym obserwatorzy przypisują współrzędne.

Interwał: niezmiennik transformacji Lorentza

Rozpatrzmy dwa zdarzenia, którym dwaj obserwatorzy przypisują współrzędne

$$(ct_1, x_1, y_1, z_1) \quad \text{i} \quad (ct_2, x_2, y_2, z_2)$$

oraz

$$(ct_1', x_1', y_1', z_1') \quad \text{i} \quad (ct_2', x_2', y_2', z_2').$$

Korzystając z transformacji Lorentza łatwo wykazać, że:

$$c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 = c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2,$$

czyli jest to *niezmiennik transformacji Lorentza*.

Wielkość $s_{12} = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$ nazywamy interwałem między zdarzeniami 1 i 2.

Interwał jest odległością w czterowymiarowej pseudoeuklidesowej czasoprzestrzeni.

Klasyfikacja interwałów

- Interwał czasopodobny: $s_{12} > 0$
- Interwał zerowy: $s_{12} = 0$
- Interwał przestrzeniopodobny: $s_{12} < 0$

Załóżmy dalej dla uproszczenia, że $\Delta x = \Delta y = 0$.

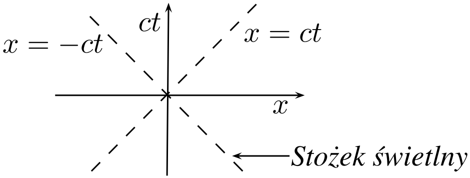
Interwał zerowy

Jeśli $s_{12} = 0$,

to te dwa zdarzenia można połączyć sygnałem świetlnym: $\Delta x = \pm c\Delta t$.

Mówimy, że zdarzenie 2 leży na stożku świetlnym zdarzenia 1.

Zdarzenie 1 może wpływać na zdarzenie 2.

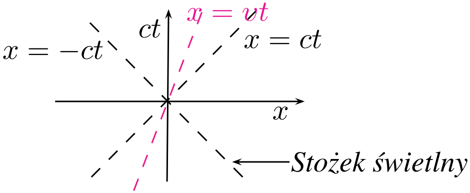


Interwał czasopodobny

Interwał czasopodobny:

$$s_{12} = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 > 0, \text{ czyli } (\Delta x/\Delta t)^2 = v^2 < c^2.$$

Np., zdarzeniami może być określenie położenia cząstki materialnej w dwóch punktach czasoprzestrzeni.



Interwał czasopochodny

- Te zdarzenia można połączyć sygnałem rozchodzącym się z prędkością mniejszą niż c. Zdarzenie 1 może wpływać na zdarzenie 2.
- Nie istnieje układ, w którym zdarzenia te są równoczesne: gdyby w jakimś układzie $\Delta t' = 0$, to s_{12} nie mogłoby być dodatnie, co jest sprzeczne z założeniem. Istnieje jednak taki układ, w którym te zdarzenia zachodzą w tym samym punkcie: jest to układ poruszający się wraz z cząstką.

Interwał czasopodobny

- W takim przypadku:

$$s_{12} = s'_{12} = c^2 \Delta t'^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2,$$

$$\Delta t'^2 = \Delta t^2 \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right)^2 \right] = \Delta t^2 (1 - \beta^2),$$

$$\Delta t = \gamma \Delta t'.$$

  $\Delta t'$ jest odległością w czasie mierzoną czasem własnym cząstki.

- Zdarzenie 2 leży wewnątrz stożka świetlnego zdarzenia 1 - w obszarze *bezwzględnej przyszłości* zdarzenia 1.

- Zdarzenia 1 i 2 są powiązane czasowo w sposób *absolutny*.

Interwał przestrzeniopodobny

Interwał przestrzeniopodobny:

$$s_{12} = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 < 0,$$

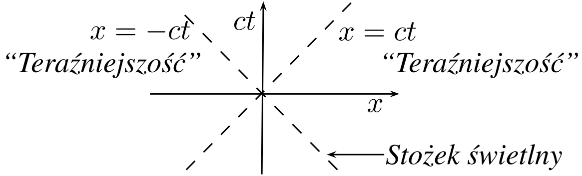
czyli

$$(\Delta x/\Delta t)^2 = v^2 > c^2.$$

- Te zdarzenia nie mogą być połączone żadnym sygnałem - nie ma między nimi zależności przyczynowo - skutkowej.
- Istnieje układ, w którym zdarzenia te są równoczesne, ale nie istnieje taki, w którym zachodzą one w tym samym punkcie.
- Zdarzenia są rozdzielone przestrzennie w sposób absolutny.

Interwał przestrzeniopodobny

- Zdarzenie 2 leży na zewnątrz stożka świetlnego zdarzenia 1 - w obszarze “teraźniejszości”.
- Zauważmy, że dobierając odpowiednio układ odniesienia możemy odwrócić kolejność zdarzeń!



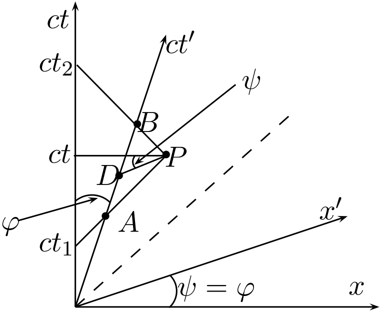
Układy $\mathcal{U}$ i $\mathcal{U}'$

Celem jest narysowanie na płaszczyźnie obu układów współrzędnych $\mathcal{U}$ i $\mathcal{U}'$.

- linia ct' jest linią świata początku układu $\mathcal{O}'$ w układzie $\mathcal{U}'$, $\tan\varphi = \beta$;
-$\mathcal{O}$ wysyła w chwili t_1 sygnał odbijający sie od P i odbiera sygnał odbity w chwili t_2. Współrzędne punktu P: $(ct, x) = c(t_1 + t_2)/2, c(t_2 - t_1)/2$.
-sygnały te mijają $\mathcal{O}'$ w chwilach t'_A i t'_B. $\mathcal{O}'$ przypisuje zdarzeniu P czas $t'_D = (t'_A + t'_D)/2$.
- linia DP jest linią zdarzeń równoczesnych ze zdarzeniem P, czyli jest równoległa do osi x'. Niech kąt między DP a osią x wynosi ψ.

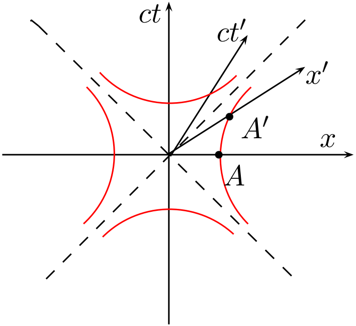
- analiza geometryczna pokazuje, że

$\psi = \varphi$.



Hiperbole kalibracyjne

Musimy jeszcze określić jednostki na osiach obu układów. Korzystamy tu z niezmiennika: $c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2 = \pm 1$ przedstawionego w postaci czerwonych krzywych. Odcinki OA i OA' wyznaczają jednostki na osiach x i x'.



Dylatacja czasu

Problem: w punkcie $\mathcal{O}$ zaszły dwa zdarzenia odległe o czas τ mierzony w układzie $\mathcal{U}$. Jaki odstęp czasu przypisze tym zdarzeniom obserwator $\mathcal{O}'$?

Zdarzenie 1: $x_1 = 0, t_1 = 0$; Zdarzenie 2: $x_2 = 0, t_2 = \tau$.

Transformacja Lorentza:

$$\begin{cases} x'_1 &= \gamma(0 - \beta c 0) \Rightarrow x'_1 = 0 \\ ct'_1 &= \gamma(c0 - \beta 0) \Rightarrow t'_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x'_2 &= \gamma(0 - \beta c\tau) \Rightarrow x'_2 = -\gamma\beta c\tau \\ ct'_2 &= \gamma(c\tau - \beta 0) \Rightarrow t'_2 = \gamma\tau \end{cases}$$

$$\tau' = \gamma\tau$$

Wniosek: dla obserwatora $\mathcal{O}$ *nieruchomego* względem zachodzących kolejno zdarzeń upływ czasu jest *krótszy* niż dla poruszającego się obserwatora $\mathcal{O}'$.

Dylatacja czasu

Zróbmy teraz to samo, ale niech tym razem zdarzenia zachodzą w punkcie $\mathcal{O}'$ w odstępie τ'. Mamy zatem:

$$\begin{cases} 0 &= \gamma(x_1 - \beta c t_1) \\ c t_1' &= \gamma(c t_1 - \beta x_1) \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 &= \gamma(x_2 - \beta c t_2) \\ c t_2' &= \gamma(c t_2 - \beta x_2) \end{cases}$$

Z dwóch górnych równań dostajemy $x_2 - x_1 = \beta c \tau$. Różnica dwóch dolnych równań daje $c\tau' = \gamma[c\tau - \beta(x_2 - x_1)]$. Łącząc, dostajemy

$$\tau = \gamma \tau'.$$

Wniosek jest identyczny: dla obserwatora $\mathcal{O}'$ *nieruchomego* względem zachodzących kolejno zdarzeń upływ czasu jest *krótszy* niż dla poruszającego się obserwatora $\mathcal{O}$.

Kontrakcja długości

Ważna uwaga: pomiar *długości* pręta polega określeniu współrzędnych jego obu końców w *tej samej chwili*!

Przypuśćmy, że pręt spoczywa w układzie $\mathcal{U}'$ między punktami $x_1' = 0$ i $x_2' = L'$. Jeśli obserwator $\mathcal{O}$ chce zmierzyć jego długość, to musi określić współrzędne końców pręta w swoim układzie (x_1 i x_2) w tej samej chwili czasu t. Czyli:

$$\begin{cases} x_1' = \gamma(x_1 - \beta ct) \\ x_2' = \gamma(x_2 - \beta ct) \end{cases} \qquad L' = x_2' - x_1' = \gamma L; \qquad L = \frac{1}{\gamma} L'.$$

Wniosek: długość obiektu względem ruchomego obserwatora jest mniejsza niż względem nieruchomego.

Kontrakcja długości

A teraz pręt spoczywa w $\mathcal{U}$: $x_2 - x_1 = L$.

$$\begin{cases} x_1' &= \gamma(x_1 - \beta c t_1) \\ ct' &= \gamma(ct_1 - \beta x_1) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2' &= \gamma(x_2 - \beta c t_2) \\ ct' &= \gamma(ct_2 - \beta x_2) \end{cases}$$

$$L' = x_2' - x_1' = \gamma(x_2 - x_1) - \gamma\beta(ct_2 - ct_1) = \gamma L - \gamma\beta^2 L = \frac{1}{\gamma} L.$$

Wniosek ten sam : długość obiektu względem ruchomego obserwatora jest mniejsza niż względem nieruchomego.