

# Fizyka I (mechanika) 1100-1AF14

## Wykład 12

January 15, 2024

# Plan wykładu

- 1 Zderzenia
- 2 Ruch pod wpływem stałej siły
- 3 Efekt Dopplera
- 4 Prędkość światła
- 5 Doświadczenie Michelsona - Morley'a

## Masa niezmiennicza: LAB vs. SM

Rozpatrzmy układ złożony z dwóch poruszających się cząstek o masach spoczynkowych  $m_{0,1}$  i  $m_{0,2}$ .

Energia i pęd cząstek w LAB jest równa  $E_{LAB,1}, \vec{p}_{LAB,1}$  oraz  $E_{LAB,2}, \vec{p}_{LAB,2}$ .

W układzie SM, mamy, odpowiednio:

$$E_{SM,1} = \gamma(E_{LAB,1} - \beta c p_{LAB,1,x}); \quad c p_{SM,1,x} = \gamma(c p_{LAB,1,x} - \beta E_{LAB,1});$$

$$E_{SM,2} = \gamma(E_{LAB,2} - \beta c p_{LAB,2,x}), \quad c p_{SM,2,x} = \gamma(c p_{LAB,2,x} - \beta E_{LAB,2}).$$

Dodając stronami, otrzymujemy:

$$E_{SM} = \gamma(E_{LAB} - \beta c P_{LAB,x}), \quad c P_{SM,x} = \gamma(c p_{LAB,x} - \beta E_{LAB}),$$

gdzie

$$E_{LAB} = E_{LAB,1} + E_{LAB,2}, \quad \vec{P}_{LAB} = \vec{p}_{LAB,1} + \vec{p}_{LAB,2},$$

$$E_{SM} = E_{SM,1} + E_{SM,2}, \quad \vec{P}_{SM} = \vec{p}_{SM,1} + \vec{p}_{SM,2} = 0,$$

przy czym

$$p_{LAB,i,y} = p_{SM,i,y}, \quad p_{LAB,i,z} = p_{SM,i,z}, \quad i = 1, 2.$$

## Masa niezmiennicza: LAB vs. SM

Niezmiennik transformaty Lorentza dla całkowitej energii i całkowitego pędu:

$$\mathcal{M}^2 c^4 = E_{LAB}^2 - P_{LAB,x}^2 c^2 - P_{LAB,y}^2 c^2 - P_{LAB,z}^2 c^2 = E_{SM}^2 c^2$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^2 c^4 &= \\ &= \left( \sum_{i=1}^2 E_{LAB,i} \right)^2 - \left( \sum_{i=1}^2 p_{LAB,i,x} \right)^2 c^2 - \left( \sum_{i=1}^2 p_{LAB,i,y} \right)^2 c^2 - \left( \sum_{i=1}^2 p_{LAB,i,z} \right)^2 c^2 = \\ &= \left( \sum_{i=1}^2 m(v_{LAB,i}) c^2 \right)^2 - \left( \sum_{i=1}^2 p_{LAB,i,x} \right)^2 c^2 - \left( \sum_{i=1}^2 p_{LAB,i,y} \right)^2 c^2 - \left( \sum_{i=1}^2 p_{LAB,i,z} \right)^2 c^2 \\ &= \left( \sum_{i=1}^2 m(v_{SM,i}) c^2 \right)^2 \end{aligned}$$

## Energia progowa

Rozpatrzmy zderzenie, w którym cząstka o masie spoczynkowej  $m_{0,1}$  ma przed zderzeniem w układzie LAB energię  $E_1$  i pęd  $\vec{p}_1$ , i zderza się z cząstką o masie  $m_{0,2}$  spoczywającą w układzie LAB. Dla uproszczenia:  $\vec{p}_1 = p_1 \vec{e}_x$ .

Ile powinna wynosić minimalna energia  $E_1$ , aby w wyniku zderzenia powstało  $N$  cząstek o łącznej masie spoczynkowej  $M = \sum_{i=1}^N m_{0,i}$ ?

Energia ta nazywana jest *energiją progową*.

Wykorzystamy dwa fakty:

- masa niezmiennicza jest niezmiennikiem transformacji Lorentza, czyli jest taka sama w układzie LAB i SM;
- obowiązuje zasada zachowania energii i pędu.

# Energia progowa

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}^2 c^4 &= (E_{LAB,1}^{przed} + m_{0,2} c^2)^2 - (p_{LAB,1}^{przed})^2 c^2 = \\
 &= (E_{LAB,1}^{przed} + m_{0,2} c^2)^2 - \left( (E_{LAB,1}^{przed})^2 - m_{0,1}^2 c^4 \right) = \\
 &= 2E_{LAB,1}^{przed} m_{0,2} c^2 + (m_{0,1}^2 + m_{0,2}^2) c^4 \\
 \mathcal{M}^2 c^4 &= \left( \sum_{i=1}^N m(v_{SM,i}^{po}) c^2 \right)^2
 \end{aligned}$$

Warunek energii minimalnej będzie spełniony, gdy wytworzone cząstki będą spoczywać w układzie środka masy.

# Energia progowa

$$2E_{LAB,1,MIN}^{przed} m_{0,2} c^2 + (m_{0,1}^2 + m_{0,2}^2) c^4 = \left( \sum_{i=1}^N m_{0,i} c^2 \right)^2$$

$$E_{LAB,1,MIN}^{przed} = \frac{\left( \sum_{i=1}^N m_{0,i} \right)^2 - (m_{0,1}^2 + m_{0,2}^2)}{2m_{0,2}} c^2$$

Zwykle interesuje nas minimalna energia kinetyczna, równa

$$E_{LAB,1,MIN,kin}^{przed} = E_{LAB,1,MIN}^{przed} - m_{0,1} c^2 :$$

$$E_{LAB,1,MIN,kin}^{przed} = \frac{\left( \sum_{i=1}^N m_{0,i} \right)^2 - (m_{0,1} + m_{0,2})^2}{2m_{0,2}} c^2$$

# Relatywistyczny związek siły i przyspieszenia

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad \vec{p} = \gamma m_0 \vec{v}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m_0 \frac{d\gamma}{dt} \vec{v} + m_0 \gamma \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3 \beta \frac{d\beta}{dt}$$

$$\vec{F} = \gamma m_0 \vec{a} + \gamma^3 \beta \frac{d\beta}{dt} m_0 \vec{v}$$



# Relatywistyczny związek siły i przyspieszenia

To wyrażenie możemy zapisać w innej postaci. Ponieważ  $E = \gamma m_0 c^2$ , to

$$\frac{dE}{dt} = m_0 c^2 \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt}(m_0 c^2 + E_k) =$$

$$= \frac{dE_k}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{F} \cdot d\vec{r}) = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

$$m_0 \frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{c^2} \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\vec{F} = \gamma m_0 \vec{a} + \frac{\vec{v}}{c^2} (\vec{F} \cdot \vec{v})$$

## Przyspieszenie - relatywistycznie

$$\vec{a} = \frac{1}{\gamma m_0} \left[ \vec{F} - \frac{\vec{v}}{c^2} (\vec{F} \cdot \vec{v}) \right]$$

W ogólności, przyspieszenie nie jest równoległe do siły!  
 Jest równoległe w dwóch przypadkach:

$$\vec{F} \parallel \vec{v} \Rightarrow \vec{a} = \frac{1}{\gamma^3 m_0} \vec{F}$$

$$\vec{F} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{a} = \frac{1}{\gamma m_0} \vec{F}$$

## Rozpędzanie naładowanej cząstki w polu elektrycznym

Siła działająca na cząstkę jest równa:

$$\vec{F} = q\vec{\mathcal{E}} = q\mathcal{E}\vec{e}_x$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q\mathcal{E}}{\gamma m_0} \left( \vec{e}_x - \frac{v_x \vec{v}}{c^2} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv_x}{dt} = \frac{q\mathcal{E}}{\gamma m_0} \left( 1 - \frac{v_x^2}{c^2} \right) \\ \frac{dv_y}{dt} = \frac{q\mathcal{E}}{\gamma m_0} \left( -\frac{v_x v_y}{c^2} \right) \\ \frac{dv_z}{dt} = \frac{q\mathcal{E}}{\gamma m_0} \left( -\frac{v_x v_z}{c^2} \right) \\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{array} \right.$$

Zakładamy, że w chwili początkowej  $v_y = v_z = 0$ . Wtedy  $v_y = v_z = 0$  dla każdego  $t$ , czyli ruch odbywa się wyłącznie w kierunku  $x$ .

## Rozpędzanie naładowanej cząstki w polu elektrycznym

Ponieważ  $\vec{v} = v_x \vec{e}_x = v \vec{e}_x$ , to mamy równanie:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{q\mathcal{E}}{\gamma^3 m_0} = \frac{q\mathcal{E}}{m_0} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2},$$

czyli

$$\frac{1}{(\sqrt{1 - v^2/c^2})^3} \frac{dv}{dt} = \frac{q\mathcal{E}}{m_0}.$$

Mamy:

$$\frac{d}{dt} \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{(\sqrt{1 - v^2/c^2})^3} \frac{dv}{dt}.$$

## Rozpędzanie naładowanej cząstki w polu elektrycznym

Całkując równanie ruchu po czasie dostajemy:

$$\frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{q\mathcal{E}t}{m_0}.$$

(Stała całkowania jest równa zero, na podstawie warunku początkowego  $v(0) = 0$ .)

Zatem:

$$v(t) = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{cm_0}{q\mathcal{E}t}\right)^2}}$$

oraz

$$x(t) = \frac{m_0c^2}{q\mathcal{E}} \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{q\mathcal{E}t}{cm_0}\right)^2} - 1 \right].$$

## Ruch w polu magnetycznym

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

W tym przypadku  $\vec{F} \cdot \vec{v} = 0$ , czyli energia cząstki jest stała, czyli masa jest też stała:  $m = \gamma m_0 = \text{const}$ . Równanie ruchu:

$$\vec{a} = \frac{1}{\gamma m_0} q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv_x}{dt} = \frac{qB}{\gamma m_0} v_y \\ \frac{dv_y}{dt} = -\frac{qB}{\gamma m_0} v_x \\ \frac{dv_z}{dt} = 0 \\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{array} \right.$$

# Ruch w polu magnetycznym

Ruch relatywistyczny w polu magnetycznym jest taki, jak w przypadku nierelatywistycznym, tylko masa cząstki jest równa  $\gamma m_0$ .

$$m \frac{v^2}{r} = qvB$$

$$mv = p = qrB$$

$$\omega_c^{rel} = \frac{qB}{\gamma m} = \omega_c^{nrel} \sqrt{1 - \beta^2}$$

## Efekt Dopplera w akustyce

Rozpatrzmy nierelatywistyczną sytuację nieruchomego źródła dźwięku o częstotliwości  $f$ , umieszczonego w  $x = 0$ , w układzie  $\mathcal{U}$  i odbiornika umieszczonego w  $x' = 0$ , w układzie  $\mathcal{U}'$  poruszającym się z prędkością  $V$  w kierunku  $+x$  (odbiornika oddala się od źródła). Prędkość dźwięku w ośrodku jest równa  $c$ . Pytanie: jaką częstotliwość dźwięku zarejestruje odbiornik?

Czas (jednakowy w  $\mathcal{U}$  i  $\mathcal{U}'$ ) upływający między emisją kolejnych maksimum fali akustycznej jest równy  $T = 1/f$ . Przypuśćmy, że  $n$ -te maksimum dotarło do odbiornika w chwili  $t_n$ , a kolejne jest w odległości  $\lambda = c/f$  od odbiornika i dogania go z prędkością  $c - V$ . Zatem, kolejne maksimum dotrze do odbiornika w chwili  $t_{n+1} = t_n + \lambda/(c - V) = t_n + c/[f(c - V)]$ . Czyli odbiornik rejestruje kolejne maksima co  $T' = c/[f(c - V)]$ . Częstotliwość odbierana jest równa  $f' = f(1 - V/c)$ .



# Efekt Dopplera w akustyce

Zauważmy, że gdyby detektor był nieruchomy, zaś źródło poruszało się w kierunku  $-x'$ , to z punktu widzenia (raczej - słyszenia...) detektora emitowana długość fali byłaby równa  $(c + V)/f$  i kolejne maksima docierałyby do detektora w odstępach czasu  $T' = (c + V)/(cf)$ , czyli odbiornik rejestrowałby częstość  $f' = f/(1 + V/c)$ .

Ten klasyczny wynik jest niezgodny z zasadą względności Einsteina - obie rozpatrywane sytuacje są identyczne, zmieniliśmy jedynie obserwatora, względem którego rozpatrujemy to doświadczenie.

## Relatywistyczny efekt Dopplera

Rozpatrzmy ciąg impulsów emitowanych przez  $\mathcal{O}$  w chwilach  $nT_0$ . Detektor znajduje się w  $\mathcal{O}'$ . Zdarzenie polegające na emisji  $n$ -tego impulsu ma w układzie  $\mathcal{U}$  współrzędne  $ct = cnT_0, x = 0$ . W układzie  $\mathcal{U}'$  ma zaś współrzędne:

$$x' = \gamma(0 - \beta cnT_0) = -\gamma\beta cnT_0; \quad ct' = \gamma(ct - \beta x) = \gamma cnT_0.$$

Impuls ten zostanie odebrany przez  $\mathcal{O}'$  w chwili  $t' + (0 - x')/c = \gamma(1 + \beta)nT_0$ . Odstęp czasu między odbiorem kolejnych impulsów wynosi więc  $T' = \gamma(1 + \beta)T_0$ , czyli częstotliwość:

$$f' = \frac{f}{\gamma(1 + \beta)}.$$

Dla  $\beta \rightarrow 0$ , mamy  $f' \approx f(1 - \beta)$ , czyli wynik nierelatywistyczny.

## Relatywistyczny efekt Dopplera

Zauważmy, że ten sam wynik  $f' = \frac{f}{\gamma(1+\beta)}$  otrzymamy, gdy przeanalizujemy sytuację z punktu widzenia obserwatora  $\mathcal{O}'$ . Mianowicie, założmy, że  $\mathcal{O}'$  odbiera impulsy w chwilach  $nT'_0$ , czyli rejestruje częstotliwość  $1/T'_0$ . Pytanie, z jaką częstotliwością były wysyłane sygnały przez  $\mathcal{O}$ ?

Zdarzenie: rejestracja  $n$ -tego impulsu przez  $\mathcal{O}'$ . Współrzędne:  $ct' = cnT'_0, x' = 0$  i odpowiadające temu współrzędne w  $\mathcal{U}$ :  $ct = \gamma cnT'_0, x = \gamma\beta cnT'_0$ . Impuls był zatem wyemitowany w  $\mathcal{O}$  w chwili  $t - (x - 0)/c = \gamma nT'_0 - \gamma\beta nT'_0 = \gamma(1 - \beta)nT'_0$ . Zatem, częstotliwość nadawania

$$f = \frac{1}{T_0} = \frac{f'}{\gamma(1 - \beta)}, \quad \text{czyli} \quad f' = \frac{f}{\gamma(1 + \beta)}.$$

# Historia badań prędkości światła

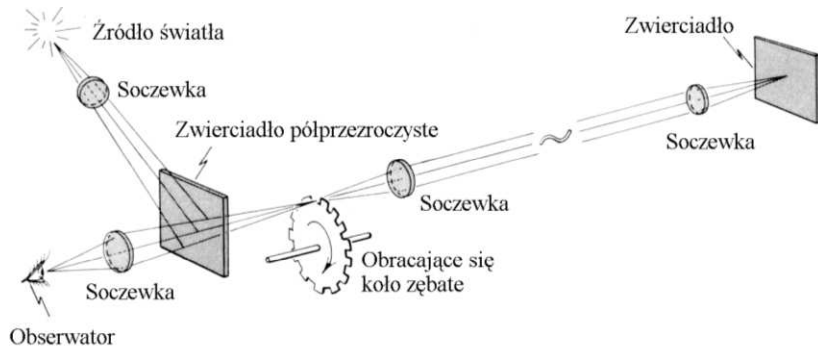
- Galileusz - koncepcja doświadczenia (1638 r.): dwaj obserwatorzy z latarniami wyposażonymi w zasłony, ustawieni w znanej odległości od siebie. Jest to typ metody “tam i z powrotem”, w którym mierzona jest średnia prędkość światła rozchodzącego się w dwie strony. Technika stosowana także dziś.
- Pomiary astronomiczne
  - ▲ Ole Roemer, 1676 r.; okresowe w ciągu roku wahania okresu obiegu Jowisza przez jego księżyc Io; pierwszy raz podana zmierzona wartość prędkości światła  $c = 214\,000$  km/s
  - ▲ James Bradley, 1727 r., pomiar aberracji światła gwiazd,  $c = 299\,770$  km/s.

# Historia badań prędkości światła

Pomiary laboratoryjne:

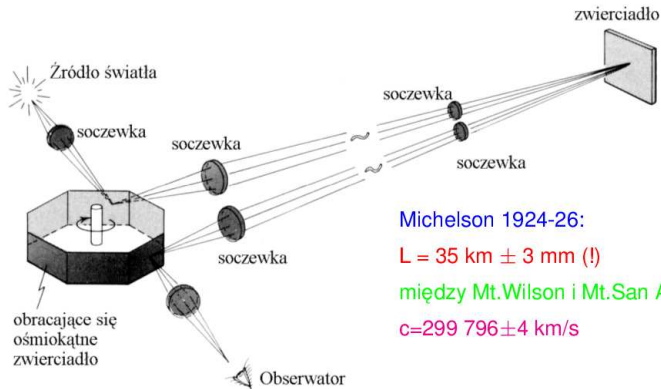
- \* metoda wirującego koła zębatego
  - ▲ H. L. Fizeau, 1848 r.,  $c = 315\,300 \text{ km/s}$
  - ▲ A. Cornu, 1874 r.,  $c = 300030 \pm 200 \text{ km/s}$
  - ▲ Perrotin, 1902 r.,  $c = 299800 \pm 84 \text{ km/s}$
- \* metoda wirującego zwierciadła
  - ▲ zaproponowana przez F. Arago w 1838 r.
  - ▲ zastosowana po raz pierwszy przez J. Foucaulta w 1850 r.;  $c = 298000 \pm 500 \text{ km/s}$
  - ▲ S. Newcomb, 1882 r.,  $c = 299\,810 \pm 30 \text{ km/s}$
  - ▲ A. Michelson, 1926 r.,  $c = 299\,796 \pm 4 \text{ km/s}$
- \* elektrooptyczna modulacja natężenia wiązki - efekt Kerra
  - ▲ A. Karolus i O. Mittelstaedt, 1929 r.,  $c = 299\,776 \pm 20 \text{ km/s}$ .
  - ▲ Grosse, 1967 r.,  $c = 299\,792,5 \pm 0,05 \text{ km/s}$

# Metoda Fizeau pomiaru prędkości światła



$$L = 8633\text{m}, 720 \text{ zębów}$$

# Metoda wirującego zwierciadła



Michelson 1924-26:

$L = 35 \text{ km} \pm 3 \text{ mm} (!)$

między Mt. Wilson i Mt. San Antonio

$c = 299\,796 \pm 4 \text{ km/s}$

# Prędkość światła

Doświadczenia pokazują, że prędkość światła nie zależy od długości fali, polaryzacji i kierunku rozchodzenia się w przestrzeni.

Dzisiaj przyjmujemy, że prędkość światła ma **dokładnie** wartość

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$$

i względem tej wartości **definiujemy metr** jako odległość, którą światło przybywa w czasie  $1/299792458$  s.



# Hipoteza eteru i doświadczenie Michelsona - Morley'a

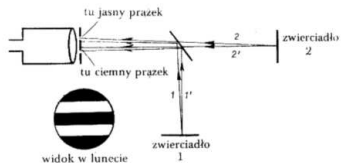
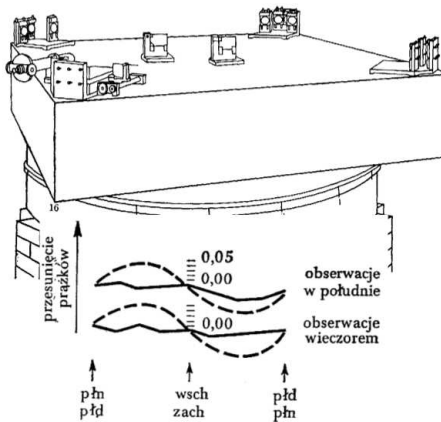
**Eter** - hipotetyczna substancja rozciągająca się wszędzie (nawet w próżni), przenikająca wszystko.

**Eter** był “potrzebny”, aby wyjaśnić zagadnienie rozchodzenia się światła - wydawało się, że musi istnieć jakiś ośrodek, w którym światło się rozchodzi.

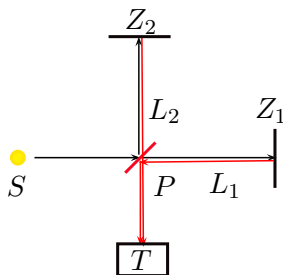
**Eter** wiązano z absolutną, nieruchomą przestrzenią Newtona.

**Eter**, gdyby istniał, musiałby mieć niewyłącznie właściwości - byłby bardzo sprężysty (ogromna wartość prędkości światła), a jednocześnie doskonale przezroczysty i przenikliwy (np. ruch planet odbywa się bez zauważalnego oporu).

# Doświadczenie Michelsona - Morley'a



## Hipoteza eteru i doświadczenie Michelsona - Morley'a



$Z_1$ ,  $Z_2$  - zwierciadła,  $T$  - teleskop,  $S$  - źródło światła

Obserwowano obraz interferencyjny promieni odbitych od zwierciadeł  $Z_1$  i  $Z_2$ .

Obraz interferencyjny powstaje w wyniku różnicy dróg  $P \rightarrow Z_1 \rightarrow P$  oraz  $P \rightarrow Z_2 \rightarrow P$ .

## Hipoteza eteru i doświadczenie Michelsona - Morley'a

Przypuśćmy, że ramię  $PZ_1$  jest skierowane zgodnie z ruchem Ziemi względem eteru. Ziemia porusza się względem eteru z prędkością  $v_Z$ , zaś światło - z prędkością  $c$ . Względem interferometru światło porusza się z taką prędkością  $c'$ , że wynikająca z tego prędkość światła względem eteru jest równa  $c$ . Oznacza to, że gdy światło porusza się w interferometrze w kierunku ruchu Ziemi (droga  $P \rightarrow Z_1$ ), jego prędkość względem interferometru wynosi  $c - v_Z$ , a gdy przeciwnie - prędkość jest równa  $c + v_Z$ . Czas potrzebny na przebycie drogi  $P \rightarrow Z_1 \rightarrow P$  wynosi:

$$\Delta t_1 = \frac{L_1}{c - v_Z} + \frac{L_1}{c + v_Z} = \frac{2L_1}{c} \gamma^2,$$

gdzie

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v_Z}{c}.$$

# Hipoteza eteru i doświadczenie Michelsona - Morley'a

Dla promienia poruszającego się w drugim ramieniu, prędkość w układzie interferometru  $c'$  musi spełniać zależność:

$$c^2 = c'^2 + v_z^2, \quad \text{czyli} \quad c'^2 = c^2 - v_z^2.$$

Czas potrzebny na przebycie drogi  $P \rightarrow Z_2 \rightarrow P$  wynosi:

$$\Delta t_2 = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v_z^2}} = \frac{2L}{c} \gamma.$$

Różnica  $\Delta t_1 - \Delta t_2$  powoduje różnicę fazy promieni docierających do lunety i pojawieniu się obrazu inderferencyjnego.

# Hipoteza eteru i doświadczenie Michelsona - Morley'a

Badano, czy obraz się zmieniał, gdy interferomer był obracany wokół osi pionowej o  $90^\circ$  - oczekujemy wtedy zmiany  $\Delta t_1 - \Delta t_2$ . Nie zaobserwowano zmiany obrazu interferencyjnego.

W doświadczeniu Kennedy'ego i Thorndike'a prowadzono obserwacje przez wiele miesięcy, szukając zmiany obrazu interferencyjnego wywołanego ruchem Ziemi wokół Słońca.

Wszystkie te doświadczenia dały wynik negatywny, co doprowadziło do odrzucenia hipotezy o istnieniu eteru.