Fizyka I (mechanika) 1100-1AF14

Wykład 13

January 22, 2024

Plan wykładu

1. Transformacja prędkości
2. Doświadczenie myślowe Tolmana
3. Doświadczenie Bucherera
4. Energia w mechanice relatywistycznej
5. Efekt Comptona

Transformacja prędkości

Powracamy do rozpatrywanego kiedyś problemu: obserwator $\mathcal{O}'$ mierzy prędkość cząstki $\vec{u}' = (u'_x, u'_y, u'_z)$. Jaką prędkość zmierzy obserwator $\mathcal{O}$, jeśli prędkość $\mathcal{O}'$ względem $\mathcal{O}$ jest równa $\vec{V} = (V, 0, 0)$?

Obserwatorzy $\mathcal{O}$ i $\mathcal{O}'$ rejestrują kolejne położenia cząstki w kolejnych chwilach czasu. Określenie położenia cząstki jest zdarzeniem, któremu $\mathcal{O}$ przypisuje współrzędne (ct, x), zaś $\mathcal{O}'$ przypisuje współrzędne (ct', x'). Relacja między współrzędnymi określonymi przez obu obserwatorów dana jest transformacją Lorentza:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \gamma(x' + \beta ct') \\ ct & = & \gamma(ct' + \beta x') \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} dx & = & \gamma(dx' + \beta cdt') \\ cdt & = & \gamma(cdt' + \beta dx') \end{array} \right.$$

Transformacja prędkości

Dzieląc stronami otrzymujemy:

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{u'_x + V}{1 + \frac{u'_x V}{c^2}}$$

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{u'_y}{\gamma(1 + \frac{u'_x V}{c^2})}$$

$$u_z = \frac{dz}{dt} = \frac{u'_z}{\gamma(1 + \frac{u'_x V}{c^2})}$$

Transformacja prędkości - przypadki szczególne: $\beta \to 0$

Gdy $\beta \to 0$, wówczas:

$$u_x \to u'_x + V$$

$$u_y \to u'_y$$

$$u_z \to u'_z$$

i otrzymujemy transformację Galileusza, niezależnie od wartości u oraz V.

Transformacja prędkości - przypadki szczególne: $u'_x = c, u'_y = u'_z = 0$

W takim przypadku:

$$u_x = \frac{c + V}{1 + \frac{cV}{c^2}} = c,$$

$$u_y = 0,$$

$$u_z = 0$$

zgodnie z założeniem, że prędkość światła we wszystkich układach jest stała. Zauważmy, że wynik ten jest słuszny także wtedy, gdy $V = c$. Czyli, gdyby foton poruszający się w kierunku $+x$ (obserwator $\mathcal{O}'$) wyemitował foton (obserwowana cząstka) poruszający się także w kierunku $+x$, to pomiar prędkości wyemitowanego fotonu przez obserwatora $\mathcal{O}$ da wynik c.

Transformacja przyspieszenia

Podobnie, jak w przypadku transformacji prędkości możemy określić, w jaki sposób transformują się składowe przyspieszenia.

$$a'_x = \frac{du'_x}{dt'} = \frac{d\left(\frac{u_x - V}{1 - \frac{u_x V}{c^2}}\right)}{dt'} = \frac{d\left(\frac{u_x - V}{1 - \frac{u_x V}{c^2}}\right)}{dt} \frac{1}{dt'/dt} =$$

$$= \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{u_x - V}{1 - \frac{u_x V}{c^2}}\right)}{\frac{d}{dt}(\gamma(1 - u_x V/c^2))} = \frac{(1 - V^2/c^2)^{3/2}}{(1 - u_x V/c^2)^3} a_x,$$

$$a'_y = \frac{(1 - V^2/c^2)}{(1 - u_x V/c^2)^2} \left[a_y + \frac{u_y V/c^2}{1 - u_x V/c^2} a_x\right],$$

$$a'_z = \frac{(1 - V^2/c^2)}{(1 - u_x V/c^2)^2} \left[a_z + \frac{u_z V/c^2}{1 - u_x V/c^2} a_x\right].$$

Doświadczenie myślowe (Gedankenexperiment, thought experiment) Tolmana

Doświadczenie myślowe, w którym z zasady zachowania pędu i relatywistycznej transformacji prędkości wynika zależność masy od prędkości

- Rozpatrujemy zderzenie dwóch malutkich, doskonale sprężystych kulek z punktu widzenia dwóch układów inercjalnych $\mathcal{U}$ i $\mathcal{U}'$, zdefiniowanych w sposób "standardowy". "Malutki" oznacza, że zderzenie następuje w jednym punkcie przestrzeni.
- Obaj obserwatorzy mierzą tę samą masę kulek w swoich układach w przypadku, gdy kulki nie poruszają się względem mierzącego ich masę obserwatora.
- Zakładamy, że kulka 1 porusza się w $\mathcal{U}$ z prędkością $\vec{u} = u\vec{e}_z$, zaś kulka 2 porusza się w układzie $\mathcal{U}'$ z prędością $\vec{u}' = -u\vec{e}_{z'}$.
- Zakładamy, że kulki zostały puszczone w ruch tak, że w chwili zderzenia ich środki leżą na prostej równoległej do osi z (tzn., zderzenie nastąpiło w punkcie leżącym na osi x, a zatem także na osi x'). W takiej sytuacji składowe prędkości w kierunku x i y nie ulegną zmianie - siły zderzeniowe działają wyłącznie wzdłuż prostej łączącej środki kul.

Doświadczenie myślowe Tolmana

Przed zderzeniem

	U			U'		
Kulka 1	u_{1x}	$=$	0	$u'_{1x'}$	$=$	$-v$
	u_{1y}	$=$	0	$u'_{1y'}$	$=$	0
	u_{1z}	$=$	u	$u'_{1z'}$	$=$	u/γ
Kulka 2	u_{2x}	$=$	v	$u'_{2x'}$	$=$	0
	u_{2y}	$=$	0	$u'_{2y'}$	$=$	0
	u_{2z}	$=$	$-u/\gamma$	$u'_{2z'}$	$=$	$-u$

Po zderzeniu

	U			U'		
Kulka 1	${}^*u_{1x}$	$=$	0	${}^*u'_{1x'}$	$=$	$-v$
	${}^*u_{1y}$	$=$	0	${}^*u'_{1y'}$	$=$	0
	${}^*u_{1z}$	$=$	${}^*u$	${}^*u'_{1z'}$	$=$	${}^*u/\gamma$
Kulka 2	${}^*u_{2x}$	$=$	v	${}^*u'_{2x'}$	$=$	0
	${}^*u_{2y}$	$=$	0	${}^*u'_{2y'}$	$=$	0
	${}^*u_{2z}$	$=$	$-{}^*u/\gamma$	${}^*u'_{2z'}$	$=$	$-{}^*u$

Doświadczenie myślowe Tolmana

Stosujemy zasadę zachowania pędu (np. w układzie $\mathcal{U}$) pamiętając, że masa zależy od wartości (czyli modułu) prędkości.

$$
\begin{array}{lrcl}
x: & m(\sqrt{u^2})0 + m(\sqrt{v^2+u^2/\gamma^2})v & = & m(\sqrt{{}^*u^2})0 + m(\sqrt{v^2+{}^*u^2/\gamma^2})v \\
y: & m(\sqrt{u^2})0 + m(\sqrt{v^2+u^2/\gamma^2})0 & = & m(\sqrt{{}^*u^2})0 + m(\sqrt{v^2+{}^*u^2/\gamma^2})0 \\
z: & m(\sqrt{u^2})u - m(\sqrt{v^2+u^2/\gamma^2})\frac{u}{\gamma} & = & m(\sqrt{{}^*u^2}){}^*u - m(\sqrt{v^2+{}^*u^2/\gamma^2})\frac{{}^*u}{\gamma}
\end{array}
$$

Z pierwszego równania wynika, że

$$
m\left(\sqrt{v^2+u^2/\gamma^2}\right) = m\left(\sqrt{v^2+{}^*u^2/\gamma^2}\right),
$$

czyli $u = \pm{}^*u$. Ponieważ wynik ten musi przechodzić w wynik otrzymany w przypadku nierelatywistycznym, musimy wybrać $u = -{}^*u$. Z trzeciego równania dostajemy wtedy:

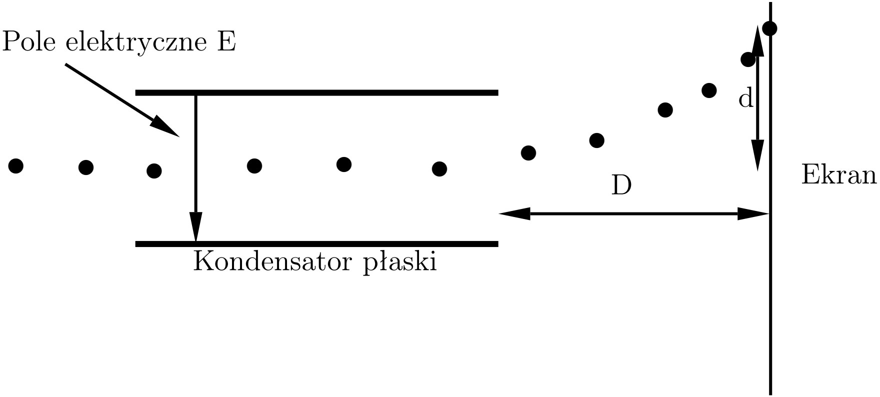
$$
m\left(\sqrt{v^2+u^2/\gamma^2}\right) = m\left(\sqrt{u^2}\right)\gamma = \frac{m(u)}{\sqrt{1-v^2/c^2}},
$$

Masa relatywistyczna

Zatem, dla $u \to 0$ mamy:

$$m(v) = \frac{m(0)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Separator prędkości - doświadczenie Bucherera (1908)



Pole magnetyczne B, prostopadłe do płaszczyzny rysunku, jest obecne w kondensatorze i poza nim.

Zmieniając pole elektryczne E w kondensatorze oraz pole magnetyczne B możemy wybierać z wiązki elektronów tylko takie, dla których

$$v = \frac{E}{B},$$

tzn. takie, dla których wypadkowa siła pochodząca od pola elektrycznego (eE) i magnetycznego (evB) jest równa zero. Łatwo można wykazać, że mierzone odchylenie d wiązki elektronów o prędkości $v = E/B$ wiąże się z wartościami D, E i B w następujący sposób:

$$\frac{e}{m} = \frac{2d}{D^2 + d^2} \frac{E}{B^2}.$$

Wynik doświadczenia Bucherera

$\frac{v}{c}$	$\frac{e}{m}$ (10^{11}C/kg)	$\frac{e}{m_0}$ (10^{11}C/kg)
$0,3173$	$1,661$	$1,752$
$0,3787$	$1,630$	$1,761$
$0,4281$	$1,590$	$1,760$
$0,5154$	$1,511$	$1,763$
$0,6870$	$1,283$	$1,767$

Praca i energia kinetyczna

Podobnie, jak w przypadku nierelatywistycznym, mnożymy skalarnie równanie ruchu przez $d\vec{r}$:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r}$$

$$dW = dE_k = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r} = d\vec{p} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot d(m\vec{v})$$

$$W = E_k = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^v \vec{v} \cdot d(m\vec{v}) = \vec{v} \cdot m\vec{v}|_0^v - \int_0^v m\vec{v} \cdot d\vec{v} =$$

$$= mv^2 - \int_0^v \frac{m_0 v dv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = (\gamma - 1)m_0 c^2.$$

$$W = E_k = (m - m_0)c^2$$

Energia cząstki

Zatem, energia kinetyczna cząstki wyraża się przez relatywistyczny wzrost masy:

$$E_k = (m - m_0)c^2.$$

Wielkość m_0c^2 nazywamy *energią spoczynkową cząstki* - jest ona niezmiennikiem transformacji Lorentza (ma taką samą wartość we wszystkich inercjalnych układach odniesienia).
Całkowita energia cząstki jest równa

$$E = mc^2.$$

Zależność ta pozwala na stwierdzenie, że każdej energii możemy przypisać pewną bezwładność,

Energia cząstki

Wiemy, że $\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v}$.
Pomnóżmy to równanie obustronnie przez c, podnieśmy do kwadratu i dodajmy do obu stron $m_0^2 c^4$:

$$m_0^2 c^4 + p^2 c^2 = m_0^2 c^4 + \gamma^2 c^2 m_0^2 v^2 = \frac{m_0^2 c^4}{1-\beta^2} = E^2.$$

Czyli

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

$$E_k = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} - m_0 c^2$$

Na marginesie: $\vec{p} = m\vec{v} = \frac{E}{c^2}\vec{v}$.

Przybliżenie nierelatywistyczne

$$E_k = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} - m_0c^2 = m_0c^2(\gamma - 1) = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) \approx$$

$$\approx m_0c^2(1 + \frac{1}{2}\beta^2 - 1) = \frac{1}{2}mv^2.$$

Przybliżenie ultrarelatywistyczne

Jeśli cząstka ma zerową masę spoczynkową, to $E = pc$, czyli $p = E/c$. Z drugiej strony, $p = \frac{E}{c^2}v$, czyli w tym przypadku otrzymujemy $v = c$: cząstki bezmasowe poruszają się z prędkością światła.

Jeśli

$$pc \gg m_0 c^2,$$

to

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2 c^4} \approx pc.$$

czyli otrzymujemy zależność energii od pędu taką, jak dla fotonu!

Transformacja energii i pędu

Są na to dwa sposoby:

- albo korzystamy z transformacji prędkości, masy i energii relatywistycznej i obliczamy bezpośrednio związek między pędem cząstki obserwowanym z dwóch układów odniesienia,
- albo argumentujemy odwołując się do niezmiennika, jakim jest masa spoczynkowa.

Pierwszy sposób jest dość uciążliwy algebraicznie, więc zajmiemy się drugim.

Transformacja energii i pędu

Wiemy, że

$$m_0^2 c^4 = E^2 - p^2 c^2$$

Ale $m_0^2 c^4$ ma tę samą wartość we wszystkich układach inercjalnych - jest niezmiennikiem transformacji Lorentza. Podobnie jest z wyrażeniem $c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$. Zatem przyjmujemy odpowiedniość:

$$ct \leftrightarrow E, \quad x \leftrightarrow cp_x, \quad y \leftrightarrow cp_y, \quad z \leftrightarrow cp_z$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} cp'_x & = & \gamma(cp_x - \beta E) \\ cp'_y & = & cp_y \\ cp'_z & = & cp_z \\ E & = & \gamma(E - \beta cp_x) \end{array} \right.$$

Masa niezmiennicza

Rozważmy układ cząstek, z których każda ma pęd $\vec{p}_i$ oraz energię E_i.
Wprowadźmy całkowity pęd $\vec{P}$ i energię E układu:

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i, \qquad E = \sum_i E_i$$

Korzystając z liniowości transformacji Lorentza, mamy:

$$\begin{cases} cP'_x & = & \gamma(cP_x - \beta E) \\ cP'_y & = & cP_y \\ cP'_z & = & cP_z \\ E' & = & \gamma(E - \beta c P_x) \end{cases}$$

Definiujemy *masę niezmienniczą* $\mathcal{M}$:

$$E^2 - P^2 c^2 = E'^2 - P'^2 c^2 = \mathcal{M}^2 c^4$$

Zauważmy, że zasada zachowania energii i pędu sprawia, że masa niezmiennicza ma tę samą wartość w obu układach odniesienia przed i po zderzeniu.

Układ środka masy

Definiujemy prędkość środka masy wiążąc pęd całkowity z energią całkowitą układu cząstek, podobnie, jak dla pojedynczej cząstki:

$$\vec{V}_{SM} = \frac{c^2 \vec{P}}{E}$$

Pęd w układzie środka masy (załóżmy, że $\vec{P}$ ma w układzie $\mathcal{U}$ tylko składową x):

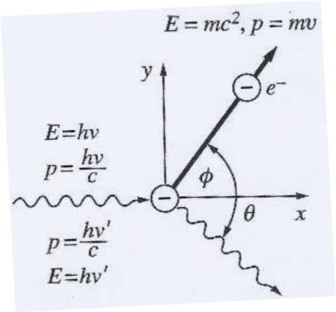
$$cP_{x,SM} = \gamma(cP_x - \beta E) = \gamma(cP_x - \frac{cP_x}{E} E) = 0.$$

Zatem, masa niezmiennicza jest równa całkowitej energii układu cząstek mierzonej w ich środku masy.

Efekt Comptona

Doświadczenie Comptona (1923 r.) umożliwiło doświadczalne potwierdzenie istnienia fotonu jako skończonej porcji energii. Za swoją pracę A. H. Compton otrzymał nagrodę Nobla w 1927 r.
Przebieg doświadczenia: wiązka promieni Roentgena o dokładnie określonej długości fali kierowana była na blok grafitowy. Mierzono natężenie promieni Roentgena w funkcji długości fali dla różnych kątów rozproszenia.
Wynik doświadczenia: mimo, że wiązka kierowana na blok grafitowy miała określoną długość fali λ, wiązka rozproszona była złożona z promieniowania o dwóch długościach fali: λ i $\lambda' > \lambda$, przy czym różnica $\lambda' - \lambda$ zależała od kąta rozproszenia θ.
Wyniku doświadczenia Comptona nie można wytłumaczyć traktując promieniowanie elektromagnetyczne jak falę - w obrazie falowym nie jest możliwa zmiana długości fali wskutek rozproszenia.

Opis korpuskularny efektu Comptona



W obrazie korpuskularnym, gdy *traktujemy foton jak cząstkę, której energia wiąże się z długością fali zależnością $E = hc/\lambda$*, mówimy, że foton w zderzeniu z elektronem traci na rzecz elektronu część swojej energii, w związku z czym zwiększa się długość rozproszonej fali.

Opis korpuskularny efektu Comptona

Foton o energii $E = h\nu = hc/\lambda$ *ma pęd* $p = E/c$ *oraz długość fali* $\lambda = h/p = hc/E$.

Rozproszone elektrony mogą poruszać się z bardzo dużą prędkością, wiec do opisu energii kinetycznej należy stosować wzory relatywistyczne. Korzystamy z zasady zachowania pędu i energii. Zakładamy, że foton padający porusza się wzdłuż osi x, rozproszony elektron porusza się pod kątem ϕ w stosunku do osi x, zaś rozproszony foton - pod kątem θ do osi x.

Opis korpuskularny efektu Comptona

Zasada zachowania pędu:

$$\text{Składowa } x \ : \frac{h}{\lambda} = p\cos\phi + \frac{h}{\lambda'}\cos\theta;$$

$$\text{Składowa } y \ : 0 = p\sin\phi - \frac{h}{\lambda'}\sin\theta.$$

Zasada zachowania energii:

$$\frac{hc}{\lambda} + m_0c^2 = \gamma m_0 c^2 + \frac{hc}{\lambda'}.$$

Opis korpuskulary efektu Comptona

Trzeba pamiętać, że γ jest funkcją pędu p - zależy od prędkości elektronu. Biorąc pod uwagę, że $p = \gamma m_0 v$ otrzymamy
$\gamma^2 = 1 + p^2/c^2 m_0^2$.
Z zasady zachowania pędu, eliminując ϕ, otrzymamy:

$$p^2 = \frac{h^2}{\lambda'^2} + \frac{h^2}{\lambda^2} - \frac{2h^2}{\lambda\lambda'} \cos\theta.$$

Wyznaczone p^2 podstawiamy do wyrażenia na γ^2 i porównujemy z γ^2 wyznaczonym z zasady zachowania energii.

Przesunięcie Comptonowskie

Po prostych przekształceniach otrzymamy:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta).$$

Otrzymane wyrażenie opisuje tzw. przesunięcie comptonowskie. Jak widać przesunięcie to zależy od kąta obserwacji. Jest równe zero w przypadku rozproszenia w przód i maksymalne (równe $2h/m_0 c$) w przypadku rozproszenia do tyłu.