Fizyka I (mechanika) 1100-1AF14

Wykład 2

October 9, 2023

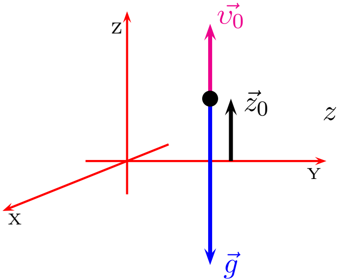
Plan wykładu

Rzut pionowy - zapis wektorowy

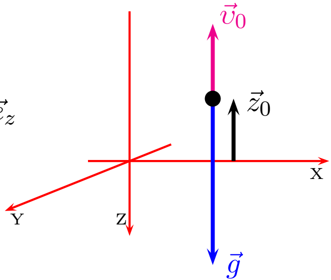
$$\vec{z}(t) = \vec{z}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

Ta postać jest *taka sama* we wszystkich układach odniesienia!
Różnice powstają, gdy *rzutujemy* to równanie na osie *wybranego* układu współrzędnych.

Rzut pionowy - opis w dwóch układach odniesienia



$$z(t) = \vec{z}(t) \cdot \vec{e}_z$$



Przypadek I

$$z(t) = z_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\vec{z}_0 = (0, 0, z_0),\ z_0 > 0$$

$$\vec{v}_0 = (0, 0, v_0),\ v_0 > 0$$

$$\vec{g} = (0, 0, -g),\ g > 0$$

Przypadek II

$$z(t) = -z_0 - v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$\vec{z}_0 = (0, 0, -z_0),\ z_0 > 0$$

$$\vec{v} = (0, 0, -v_0),\ v_0 > 0$$

$$\vec{g} = (0, 0, g),\ g > 0$$

Spotkanie

Zajmiemy się teraz "zagadnieniem spotkania": do spotkania dochodzi, gdy dwa punkty materialne znajdą się w tym samym miejscu w tym samym czasie.

Potrzebne są równania opisujące ruch obu punktów materialnych: $\vec{r}_1(t)$ i $\vec{r}_2(t)$.

Następnie zakładamy, że spotkanie następuje w chwili t_s i rozwiązujemy układ równań:

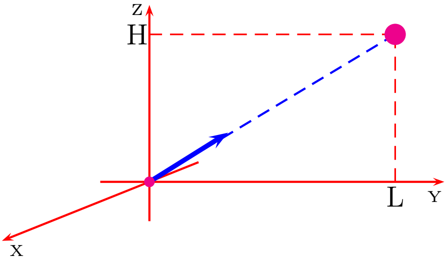
$$\vec{r}_1(t_s) = \vec{r}_2(t_s),$$

co oznacza, że:

$$x_1(t_s) = x_2(t_s), \;\; y_1(t_s) = y_2(t_s) \;\text{ i }\; z_1(t_s) = z_2(t_s).$$

Strzał do spadającego celu

Zadanie: Strzelamy do celu znajdującego się w odległości L w poziomie i H w pionie, mierząc dokładnie w cel (tzn. strzał zachodzi pod kątem $\alpha = \text{arctg}(H/L)$. W chwili, gdy kula opuszcza lufę, cel zaczyna spadać swobodnie. Wykazać, że kula zawsze trafi w cel, o ile ruch w kierunku pionowym nie jest ograniczony (np. cel znajduje sie nad bardzo głęboką przepaścią).



Pocisk: $\vec{r}_p = \vec{r}_{0p} + \vec{v}_{0p}t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$

$\vec{r}_{0p} = (0, 0, 0)$,

$\vec{v}_{0p} = (0, v_0 \cos\alpha, v_0 \sin\alpha)$,

$\vec{g} = (0, 0, -g)$

Cel: $\vec{r}_c = \vec{r}_{0c} + \vec{v}_{0c}t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$

$\vec{r}_{0c} = (0, L, H)$, $\vec{v}_{0c} = (0, 0, 0)$,

$\vec{g} = (0, 0, -g)$

Trafienie w chwili $t = t_s$**:**

$$\vec{r}_p(t_s) = \vec{r}_c(t_s)$$

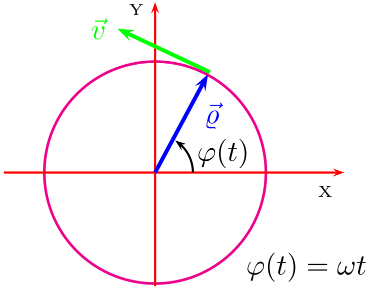
$$y: v_0 \cos\alpha t_s = L$$

$$z: v_0 \sin\alpha t_s - \frac{1}{2}gt_s^2 = H - \frac{1}{2}gt_s^2$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{H}{L}, \qquad t_s = \frac{L}{v_0 \cos\alpha} = \frac{H}{v_0 \sin\alpha}$$

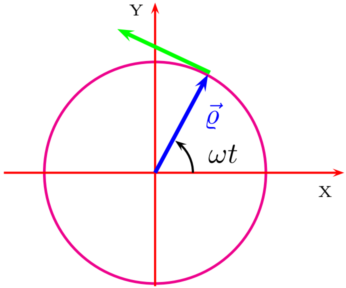
Ruch po okręgu

Ruch po okręgu ze stałą wartością prędkości (często nieprecyzyjnie mówimy - ze stałą prędkością) jest ruchem,
w którym przyspieszenie wynika wyłącznie ze *zmiany* kierunku wektora prędkości i ma kierunek do środka okręgu.



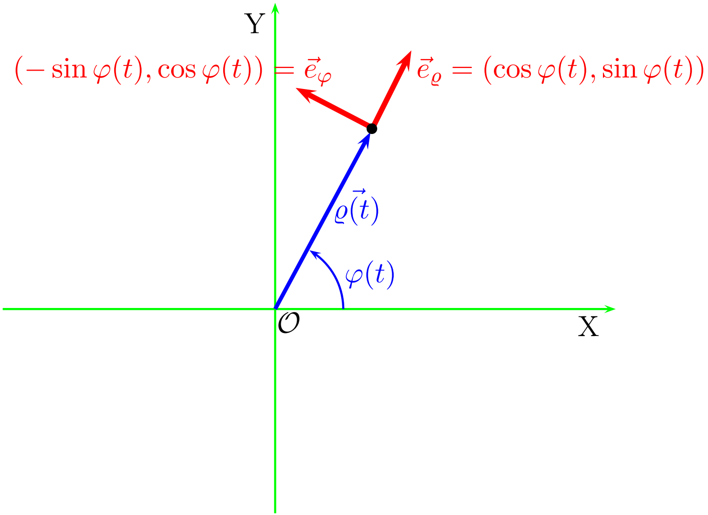
Ruch harmoniczny

Ruch, w którym współrzędne zmieniają się proporcjonalnie do $\sin(\omega t)$ (lub, rzecz jasna, do $\cos(\omega t)$) nazywamy ruchem harmonicznym. Takim ruchem poruszają się po osiach układu współrzędnych rzuty końca wektora obracającego się wokół początku układu ze stałą prędkością kątową ω.



$$\begin{cases} x(t) & = & \varrho \cos \omega t \\ y(t) & = & \varrho \sin \omega t \end{cases}$$

Układ współrzędnych biegunowych



Układ współrzędnych biegunowych

Zauważmy, że:

- układ biegunowy ma swój początek $\mathcal{O}$, w którym zaczepiony jest wektor położenia $\vec{\varrho}(t)$, a kąt $\varphi(t)$ jest określony względem *ustalonej* osi $\mathcal{O}x$ układu kartezjańskiego. Można powiedzieć, że układowi biegunowemu zawsze towarzyszy układ kartezjański o ustalonych w przestrzeni osiach.
- mając wersory $\vec{e}_\varrho$ i $\vec{e}_\varphi$ zaczepione w poruszającym się punkcie, znając ich orientację na płaszczyźnie, znając ϱ i φ możemy opisać, co się dzieje z poruszającym się punktem.
- UWAGA: w układzie biegunowym, i współrzędne $(\varrho(t), \varphi(t))$, i wersory $(\vec{e}_\varrho(t), \vec{e}_\varphi(t))$ zależą od czasu.
  Musimy zatem nauczyć się obliczać pochodne wersorów.

Opis ruchu po okręgu we współrzędnych biegunowych

Załóżmy, że ruch zachodzi za stałą wartością prędkości v po okręgu o promieniu R, z czego wynika, że

$$\varrho = R,\ \varphi = \omega t \text{ oraz } v = \omega R.$$

Położenie punktu dane jest przez:

$$\vec{\varrho}(t) = (x(t), y(t)) = (R\cos\omega t, R\sin\omega t) = R\cos\omega t \vec{e}_x + R\sin\omega t \vec{e}_y.$$

Postać tego wyrażenia mówi, że są to współrzędne kartezjańskie (tzn. $R\cos\omega t$ i $R\sin\omega t$). We współrzędnych biegunowych współrzędne wektora położenia są dane przez $(R, 0)$ i wektor ma postać:

$$\vec{\varrho}(t) = (\varrho(t), 0) = (R, 0) = R\vec{e}_\varrho.$$

Opis ruchu po okręgu we współrzędnych biegunowych

Skoro położenie punktu jest dane przez

$$\vec{\varrho}(t) = (x(t), y(t)) = R\cos\omega t\vec{e}_x + R\sin\omega t\vec{e}_y = (R\cos\omega t, R\sin\omega t),$$

to jego prędkość jest równa:

$$\vec{v}(t) = (v_x(t), v_y(t)) = -R\omega\sin\omega t\vec{e}_x + R\omega\cos\omega t\vec{e}_y = R\omega(-\sin\omega t, \cos\omega t) =$$

$$= R\omega\vec{e}_\varphi,$$

a przyspieszenie

$$\vec{a}(t) = (a_x(t), a_y(t)) = -R\omega^2\cos\omega t\vec{e}_x - R\omega^2\sin\omega t\vec{e}_y =$$

$$= -R\omega^2\vec{e}_\varrho.$$

Opis ruchu po okręgu we współrzędnych biegunowych

Prędkość jest równa pochodnej wektora położenia względem czasu, czyli:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{\varrho}}{dt}.$$

W rozpatrywanym przypadku, mamy:

$$\frac{d(R\vec{e}_\varrho)}{dt} = R\omega\vec{e}_\varphi,$$

czyli

$$\frac{d\vec{e}_\varrho}{dt} = \omega\vec{e}_\varphi.$$

Zaś przyspieszenie:

$$\frac{d(R\omega\vec{e}_\varphi)}{dt} = -R\omega^2\vec{e}_\varrho,$$

czyli

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\omega\vec{e}_\varrho.$$

Opis ruchu po okręgu we współrzędnych biegunowych

Podsumowując, w przypadku ruchu po okręgu ze stałą wartością prędkości, mamy:

$$\frac{d\vec{e}_\varrho}{dt} = \omega\vec{e}_\varphi, \qquad \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\omega\vec{e}_\varrho.$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{\varrho}}{dt} = \frac{d\varrho}{dt}\vec{e}_\varrho + \varrho\frac{d\vec{e}_\varrho}{dt} = R\omega\vec{e}_\varphi.$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = R\omega\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -R\omega^2\vec{e}_\varrho.$$

Opis ruchu we współrzędnych biegunowych - przypadek ogólny

W przypadku ogólnym, gdy ϱ (tzn. odległość punktu od początku układu) zmienia się w czasie, a kąt φ nie jest liniową funkcją czasu, otrzymujemy:

$$\vec{\varrho} = \varrho \vec{e}_\varrho$$

$$\vec{v} = \frac{d\varrho}{dt}\vec{e}_\varrho + \varrho \frac{d\vec{e}_\varrho}{dt} = \frac{d\varrho}{dt}\vec{e}_\varrho + \varrho \frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{a} = \left[\frac{d^2\varrho}{dt^2} - \varrho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]\vec{e}_\varrho + \left[2\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) + \varrho\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)\right]\vec{e}_\varphi$$

Przykład - spirala Archimedesa

Ruch po spirali Archimedesa ze stałą prędkością kątową

$$\varrho = s\varphi, \varphi = \omega t.$$

W układzie biegunowym:

$$\vec{\varrho} = s\omega t\vec{e}_\varrho,$$

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(s\omega t\vec{e}_\varrho) = s\omega\vec{e}_\varrho + s\omega^2 t\vec{e}_\varphi,$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(s\omega\vec{e}_\varrho + s\omega^2 t\vec{e}_\varphi) = -\omega^2\varrho\vec{e}_\varrho + 2s\omega^2\vec{e}_\varphi.$$

Składowa przyspieszenia w kierunku $\vec{e}_\varrho$ to *przyspieszenie radialne*, a w kierunku $\vec{e}_\varphi$ - *przyspieszenie transwersalne*.

Prędkość i wektor styczny do krzywej

Rozpatrujemy dowolną krzywą, wzdłuż ktorej porusza się punkt materialny. W każdym punkcie tej krzywej możemy zdefiniować wektor do niej styczny $\vec{e}_t$, korzystając z faktu, że prędkość punktu materialnego w danym punkcie krzywej jest styczna do krzywej:

$$\vec{v} = v\vec{e}_t.$$

Wektor $\vec{e}_t$ możemy wyznaczyć obliczając:

$$\vec{e}_t = \frac{\vec{v}}{v},$$

gdzie $\vec{v}$ jest wyrażone przez współrzędne kartezjańskie albo biegunowe. Wtedy otrzymujemy współrzędne wektora stycznego albo w jednym, albo w drugim układzie współrzędnych.

Wektor styczny do spirali Archimedesa

Na przykład, dla spirali Archimedesa mamy:

$$\vec{v} = s\omega\vec{e}_\varrho + s\omega^2 t\vec{e}_\varphi,$$

$$v = s\omega\sqrt{1+\omega^2 t^2},$$

$$\vec{e}_t = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 t^2}}\vec{e}_\varrho + \frac{\omega t}{\sqrt{1+\omega^2 t^2}}\vec{e}_\varphi.$$

Wyrażając wersory $\vec{e}_\varrho$ i $\vec{e}_\varphi$ przez $\vec{e}_x$ i $\vec{e}_y$ otrzymamy składowe wektora $\vec{e}_t$ we współrzędnych kartezjańskich.

Przyspieszenie styczne i normalne

Przyspieszenie możemy obliczyć w następujący sposób:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + v\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \vec{a}_t + \vec{a}_n.$$

Wektor $\vec{e}_t$ ma długość równą 1, więc jego pochodna określa wyłącznie zmianę jego kierunku, a nie wartości. Pochodna wektora o stałej długości jest wektorem do niego prostopadłym. Pochodna ta ma kierunek tzw. normalnej głównej.

Składową przyspieszenia $\vec{a}_t$ nazywamy *przyspieszeniem stycznym*, a $\vec{a}_n$ - *przyspieszeniem normalnym*.

Przepis na przyspieszenie styczne i normalne

Zauważmy, że:

$$\vec{a}_t = (\vec{a} \cdot \vec{e}_t)\vec{e}_t = \left(\vec{a} \cdot \frac{\vec{v}}{v}\right)\vec{e}_t,$$

$$\vec{a}_n = \vec{a} - \vec{a}_t,$$

czyli znając wektor prędkości i przyspieszenia możemy wyznaczyć przyspiesznie styczne i normalne.

$\vec{a}_n$ i $\vec{a}_t$ dla spirali Archimedesa

Dla spirali Archimedesa, otrzymamy:

$$\vec{a} = -\omega^2 \varrho \vec{e}_\varrho + 2s\omega^2 \vec{e}_\varphi,$$

$$\vec{e}_t = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 t^2}} \vec{e}_\varrho + \frac{\omega t}{\sqrt{1+\omega^2 t^2}} \vec{e}_\varphi.$$

Zatem,

$$\vec{a}_t = \frac{\omega^3 st}{1+\omega^2 t^2} (\vec{e}_\varrho + \omega t \vec{e}_\varphi),$$

Przyspieszenie w ruchu wzdłuż toru o dowolnym kształcie

Czasem ruch odbywa się wzdłuż toru, którego nie można w łatwy sposób opisać za pomocą współrzędnych kartezjańskich ani biegunowych. Zawsze jednak można zdefiniować dwie składowe wektora przyspieszenia $\vec{a}$ – przyspieszenie styczne $\vec{a}_t$ i przyspieszenie normalne $\vec{a}_n$:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n.$$

Przyspieszenie styczne, zgodnie z nazwą, ma kierunek styczny do krzywej, taki, jak kierunek prędkości chwilowej.
Odpowiada za zmianę wartości prędkości.
Przyspieszenie normalne ma kierunek tzw. normalnej głównej.
Odpowiada za zmianę kierunku prędkości.

Hodograf wersora stycznego do krzywej

Jeśli początki wersorów stycznych do krzywej $\mathcal{Z}$, po której porusza się punkt materialny przesuniemy do jednego punktu, to ich końce bedą leżeć na sferze $\mathcal{S}$ o promieniu 1.

Ewolucję kierunku wektora prędkości punktu materialnego poruszającego się wzdłuż zadanej krzywej Γ możemy przedstawić w postaci krzywej Ψ na powierzchni tej sfery.

Krzywa Ψ nosi nazwę hodografu wersora stycznego do krzywej Γ.

Pochodna wersora jest wektorem stycznym do krzywej Ψ, czyli leżącym na sferze $\mathcal{S}$, zatem prostopadłym do jej promienia, czyli wersora.

Tak więc, pochodna wersora stycznego do krzywej $\mathcal{Z}$ jest wektorem prostopadłym do tego wektora stycznego.

Płaszczyzna ściśle styczna i normalna główna

Możemy oczywiście poprowadzić nieskończenie wiele wektorów prostopadłych do wektora stycznego do danej krzywej.
Dla ruchu płaskiego nie mamy wątpliwości: wektor styczny i normalny muszą leżeć w płaszczyźnie badanej krzywej.
Okazuje się, że każda (dostatecznie "gładka") krzywa jest lokalnie płaska – infinitezymalnie krótki jej fragment leży w płaszczyźnie, którą nazywamy płaszczyzną ściśle styczną.
Jasne jest wtedy, że wektor normalny, który jest pochodną wektora stycznego do krzywej, leży w płaszczyźnie ściśle stycznej.
Kierunek tego wektora nazywamy kierunkiem normalnej głównej.

Zdarzenia i czasoprzestrzeń

Zdarzenie: coś się stało w określonym punkcie przestrzeni i określonej chwili czasu. Zdarzeniu przypisujemy trzy współrzędne przestrzenne i jedną czasową: $(\vec{r}, t)$.

Czasoprzestrzeń: przestrzeń zdarzeń, tzn. zbiór punktów, które mają trzy współrzędne przestrzenne i jedną czasową.

Obserwator: ktoś, kto umie przypisać zdarzeniom współrzędne przestrzenne i czasowe.

Obserwatorzy $\mathcal{O}$ i $\mathcal{O}'$ obserwują poruszający się punkt $\mathcal{P}$.

Rozpatrujemy następującą sytuację: obserwator $\mathcal{O}$ znajduje się w początku układu xyz, natomiast obserwator $\mathcal{O}'$ - w początku układu $x'y'z'$, który porusza się ze stałą prędkością $\vec{u}$ względem $\mathcal{O}$. Prędkość $\vec{u}$ jest mierzona przez obserwatora $\mathcal{O}$. Wektor $\vec{R}$, mierzony przez $\mathcal{O}$, określa położenie $\mathcal{O}'$ względem $\mathcal{O}$.
Obsrwatorzy mierzą położenie, prędkość i przyspieszenie punktu $\mathcal{P}$ i uzyskują wyniki (przykładowo, dla prędkości):

$$\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z$$

oraz

$$\vec{v}' = v'_{x'}\vec{e}_{x'} + v'_{y'}\vec{e}_{y'} + v'_{z'}\vec{e}_{z'}$$

i analogicznie dla położenia $\vec{r}$ i $\vec{r}'$ oraz przyspieszenia $\vec{a}$ i $\vec{a}'$.

Transformacja Galileusza

Transformacja Galileusza: przepis pozwalający
na przetłumaczenie wyników obserwacji jednego obserwatora
na wyniki obserwacji drugiego obserwatora. Inaczej mówiąc, związek między współrzędnymi czasowo-przestrzennymi przypisanymi temu samemu zdarzeniu przez obserwatorów, którzy poruszają się względem siebie ze **stałą** prędkością.
W tym przypadku zdarzeniem jest określenie położenia, prędkości i przyspieszenia punktu $\mathcal{P}$. Zachodzi:

$$t = t'$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{R}(t)$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}'(t) + \vec{u}$$

$$\vec{a}(t) = \vec{a}'(t)$$

Transformacja Galileusza - przejście do równań skalarnych

Zauważmy, że współrzędne wektorów po obu stronach równań znane są w różnych układach współrzędnych. Jak przejść do równań skalarnych? Rozpatrzmy przypadek, gdy:

$$\left\{ \begin{array}{lcc} \vec{e}_{x'} & = & \cos\varphi \vec{e}_x + \sin\varphi \vec{e}_y \\ \vec{e}_{y'} & = & -\sin\varphi \vec{e}_x + \cos\varphi \vec{e}_y \\ \vec{e}_{z'} & = & \vec{e}_z \end{array} \right.$$

oraz

$$\vec{u} = u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y, \qquad \vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y$$

Do równań skalarnych dochodzimy w taki sam sposób, jak zawsze - przez wzięcie iloczynu skalarnego z wersorami osi. Możemy wybrać wersory układu xyz albo $x'y'z'$, nie ma to znaczenia. Wybierając wersory układu xyz dostaniemy (przykładowo - dla prędkości):

$$\begin{cases} \vec{v}' \cdot \vec{e}_x & = & v_x + u_x \\ \vec{v}' \cdot \vec{e}_y & = & v_y + u_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} (v'_{x'}\vec{e}_{x'} + v'_{y'}\vec{e}_{y'}) \cdot \vec{e}_x & = & v_x + u_x \\ (v'_{x'}\vec{e}_{x'} + v'_{y'}\vec{e}_{y'}) \cdot \vec{e}_y & = & v_y + u_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} v'_{x'} \cos\varphi - v'_{y'} \sin\varphi & = & v_x + u_x \\ v'_{x'} \sin\varphi + v'_{y'} \cos\varphi & = & v_y + u_y \end{cases}$$

Z tego układu możemy wyznaczyć dwie szukane niewiadome.

Bezwładność

Definicja z Encyklopedii PWN, 1998r:

Właściwość układu fizycznego (ciała) charakteryzująca jego podatność na zmiany stanu (w szczególności - ruchu)

$\Rightarrow$ Dążenie układu do zachowania stanu, w którym się znajduje.
$\Rightarrow$ "Opór" stawiany przez układ, gdy próbujemy zmienić jego stan.

Bezwładność - doświadczenia

- Wyciąganie serwety spod talerza.
- Moneta na kartce, na szklance.
- Mały wózek na dużym wózku, na torze powietrznym.
- Ciężarek na nitce.
- Ołowiana cegła i młotek.
- Cegła spadająca na puszkę.
- Pomiar stałej prędkości na torze powietrznym.
- Przecinanie nitki w ruchu po okręgu.

Zasada bezwładności

- Wynik doświadczenia: Zmiana stanu ruchu ciała jest bezpośrednim rezultatem jego oddziaływania z ciałami otaczającymi (otoczeniem, "resztą Wszechświata").
- Wynik doświadczenia: Wszelkie rodzaje oddziaływań w świecie makroskopowym między ciałami zmniejszają się wraz ze wzrostem odległości między nimi.
- Jak zatem zachowuje się czastka, która nie podlega żadnemu oddziaływaniu ze strony otoczenia (czyli cząstka odosobniona)?
- Mówimy, że na cząstkę odosobnioną nic nie działa lub, że działania te znoszą się.

Cząstka odosobniona nie istnieje!!!

Ale istnieją jej bardzo dobre przybliżenia!!!

Zasada bezwładności

Odpowiedzi na pytanie o zachowanie cząstki odosobnionej udzielił jako pierwszy Newton w postaci postulatu:
cząstka odosobniona zawsze pozostaje w spoczynku lub porusza się po linii prostej ze stałą prędkością.

Układ, względem którego cząstka odosobniona spoczywa lub porusza się ruchem jednostajnym po linii prostej nazywamy układem inercjalnym.

Obecnie postulat Newtona formułujemy w następujący sposób:
Istnieje układ odniesienia, w którym cząstka odosobniona spoczywa lub porusza się bez przyspieszenia.
Jest to zasada bezwładności, czyli I zasada dynamiki Newtona.

Układy inercjalne

Z transformacji Galileusza ($\vec{a} = \vec{a}'$) wynika, że jeżeli istnieje jeden układ inercjalny, to istnieje ich nieskończenie wiele (każdy inny poruszający się ze stałą prędkością względem pierwszego).

Pytanie: gdzie takiego układu szukać?

- dla wielu doświadczeń - układ laboratorium. Przyspieszenie dośrodkowe ziemskie na równiku: $\sim 3.34 \times 10^{-2}$ m/s^2.
- ruch Ziemi wokół Słońca:$\sim 6 \times 10^{-3}$ m/s^2.
- obrót Układu Słonecznego względem centrum Galaktyki: $\sim 3 \times 10^{-10}$ m/s^2.