Fizyka I (mechanika) 1100-1AF14

Wykład 3

October 23, 2023

Plan wykładu

1. Transformacja Galileusza
2. Bezwładność i pierwsza zasada dynamiki
3. Masa i siła - druga zasada dynamiki
4. Więzy i trzecia zasada dynamiki Newtona
5. Siła sprężystości
6. Siła tarcia

Przyspieszenie w ruchu wzdłuż toru o dowolnym kształcie

Czasem ruch odbywa się wzdłuż toru, którego nie można w łatwy sposób opisać za pomocą współrzędnych kartezjańskich ani biegunowych. Zawsze jednak można zdefiniować dwie składowe wektora przyspieszenia $\vec{a}$ – przyspieszenie styczne $\vec{a}_t$ i przyspieszenie normalne $\vec{a}_n$:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n.$$

Przyspieszenie styczne, zgodnie z nazwą, ma kierunek styczny do krzywej, taki, jak kierunek prędkości chwilowej.
Odpowiada za zmianę wartości prędkości.
Przyspieszenie normalne ma kierunek tzw. normalnej głównej.
Odpowiada za zmianę kierunku prędkości.

Hodograf wersora stycznego do krzywej

Jeśli początki wersorów stycznych do krzywej $\mathcal{Z}$, po której porusza się punkt materialny przesuniemy do jednego punktu, to ich końce bedą leżeć na sferze $\mathcal{S}$ o promieniu 1.

Ewolucję kierunku wektora prędkości punktu materialnego poruszającego się wzdłuż zadanej krzywej Γ możemy przedstawić w postaci krzywej Ψ na powierzchni tej sfery.

Krzywa Ψ nosi nazwę hodografu wersora stycznego do krzywej Γ.

Pochodna wersora jest wektorem stycznym do krzywej Ψ, czyli leżącym na sferze $\mathcal{S}$, zatem prostopadłym do jej promienia, czyli wersora.

Tak więc, pochodna wersora stycznego do krzywej $\mathcal{Z}$ jest wektorem prostopadłym do tego wektora stycznego.

Płaszczyzna ściśle styczna i normalna główna

Możemy oczywiście poprowadzić nieskończenie wiele wektorów prostopadłych do wektora stycznego do danej krzywej.
Dla ruchu płaskiego nie mamy wątpliwości: wektor styczny i normalny muszą leżeć w płaszczyźnie badanej krzywej.
Okazuje się, że każda (dostatecznie "gładka") krzywa jest lokalnie płaska – infinitezymalnie krótki jej fragment leży w płaszczyźnie, którą nazywamy płaszczyzną ściśle styczną.
Jasne jest wtedy, że wektor normalny, który jest pochodną wektora stycznego do krzywej, leży w płaszczyźnie ściśle stycznej.
Kierunek tego wektora nazywamy kierunkiem normalnej głównej.

Zdarzenia i czasoprzestrzeń

Zdarzenie: coś się stało w określonym punkcie przestrzeni i określonej chwili czasu. Zdarzeniu przypisujemy trzy współrzędne przestrzenne i jedną czasową: $(\vec{r}, t)$.

Czasoprzestrzeń: przestrzeń zdarzeń, tzn. zbiór punktów, które mają trzy współrzędne przestrzenne i jedną czasową.

Obserwator: ktoś, kto umie przypisać zdarzeniom współrzędne przestrzenne i czasowe.

Obserwatorzy $\mathcal{O}$ i $\mathcal{O}'$ obserwują poruszający się punkt $\mathcal{P}$.

Rozpatrujemy następującą sytuację: obserwator $\mathcal{O}$ znajduje się w początku układu xyz, natomiast obserwator $\mathcal{O}'$ - w początku układu $x'y'z'$, który porusza się ze stałą prędkością $\vec{u}$ względem $\mathcal{O}$. Prędkość $\vec{u}$ jest mierzona przez obserwatora $\mathcal{O}$. Wektor $\vec{R}$, mierzony przez $\mathcal{O}$, określa położenie $\mathcal{O}'$ względem $\mathcal{O}$.
Obsrwatorzy mierzą położenie, prędkość i przyspieszenie punktu $\mathcal{P}$ i uzyskują wyniki (przykładowo, dla prędkości):

$$\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z$$

oraz

$$\vec{v}' = v'_{x'}\vec{e}_{x'} + v'_{y'}\vec{e}_{y'} + v'_{z'}\vec{e}_{z'}$$

i analogicznie dla położenia $\vec{r}$ i $\vec{r}'$ oraz przyspieszenia $\vec{a}$ i $\vec{a}'$.

Transformacja Galileusza

Transformacja Galileusza: przepis pozwalający na przetłumaczenie wyników obserwacji jednego obserwatora na wyniki obserwacji drugiego obserwatora. Inaczej mówiąc, związek między współrzędnymi czasowo-przestrzennymi przypisanymi temu samemu zdarzeniu przez obserwatorów, którzy poruszają się względem siebie ze **stałą** prędkością.

W tym przypadku zdarzeniem jest określenie położenia, prędkości i przyspieszenia punktu $\mathcal{P}$. Zachodzi:

$$t = t'$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{R}(t)$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}'(t) + \vec{u}$$

$$\vec{a}(t) = \vec{a}'(t)$$

Transformacja Galileusza - przejście do równań skalarnych

Zauważmy, że współrzędne wektorów po obu stronach równań znane są w różnych układach współrzędnych. Jak przejść do równań skalarnych? Rozpatrzmy przypadek, gdy:

$$\begin{cases} \vec{e}_{x'} & = & \cos\varphi \vec{e}_x + \sin\varphi \vec{e}_y \\ \vec{e}_{y'} & = & -\sin\varphi \vec{e}_x + \cos\varphi \vec{e}_y \\ \vec{e}_{z'} & = & \vec{e}_z \end{cases}$$

oraz

$$\vec{u} = u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y, \qquad \vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y$$

Do równań skalarnych dochodzimy w taki sam sposób, jak zawsze - przez wzięcie iloczynu skalarnego z wersorami osi. Możemy wybrać wersory układu xyz albo $x'y'z'$, nie ma to znaczenia. Wybierając wersory ukłądu xyz dostaniemy (przykładowo - dla prędkości):

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \vec{v}' \cdot \vec{e}_x & = & v_x - u_x \\ \vec{v}' \cdot \vec{e}_y & = & v_y - u_y \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (v'_{x'} \vec{e}_{x'} + v'_{y'} \vec{e}_{y'}) \cdot \vec{e}_x & = & v_x - u_x \\ (v'_{x'} \vec{e}_{x'} + v'_{y'} \vec{e}_{y'}) \cdot \vec{e}_y & = & v_y - u_y \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} v'_{x'} \cos\varphi - v'_{y'} \sin\varphi & = & v_x - u_x \\ v'_{x'} \sin\varphi + v'_{y'} \cos\varphi & = & v_y - u_y \end{array} \right.$$

Z tego układu możemy wyznaczyć dwie szukane niewiadome.

Bezwładność - doświadczenia

- Wyciąganie serwety spod talerza.
- Moneta na kartce, na szklance.
- Mały wózek na dużym wózku, na torze powietrznym.
- Ciężarek na nitce.
- Ołowiana cegła i młotek.
- Cegła spadająca na puszkę.
- Pomiar stałej prędkości na torze powietrznym.
- Przecinanie nitki w ruchu po okręgu.

Bezwładność

Definicja z Encyklopedii PWN, 1998r:

Właściwość układu fizycznego (ciała) charakteryzująca jego podatność na zmiany stanu (w szczególności - ruchu)

$\Rightarrow$ Dążenie układu do zachowania stanu, w którym się znajduje.
$\Rightarrow$ “Opór” stawiany przez układ, gdy próbujemy zmienić jego stan.

Zasada bezwładności

- Wynik doświadczenia: Zmiana stanu ruchu ciała jest bezpośrednim rezultatem jego oddziaływania z ciałami otaczającymi (otoczeniem, “resztą Wszechświata”).
- Wynik doświadczenia: Wszelkie rodzaje oddziaływań w świecie makroskopowym między ciałami zmniejszają się wraz ze wzrostem odległości między nimi.
- Jak zatem zachowuje się czastka, która nie podlega żadnemu oddziaływaniu ze strony otoczenia (czyli cząstka odosobniona)?
- Mówimy, że na cząstkę odosobnioną nic nie działa lub, że działania te znoszą się.

Cząstka odosobniona nie istnieje!!!

Ale istnieją jej bardzo dobre przybliżenia!!!

Zasada bezwładności

Odpowiedzi na pytanie o zachowanie cząstki odosobnionej udzielił jako pierwszy Newton w postaci postulatu:
cząstka odosobniona zawsze pozostaje w spoczynku lub porusza się po linii prostej ze stałą prędkością.

Układ, względem którego cząstka odosobniona spoczywa lub porusza się ruchem jednostajnym po linii prostej nazywamy układem inercjalnym.

Obecnie postulat Newtona formułujemy w następujący sposób:
Istnieje układ odniesienia, w którym cząstka odosobniona spoczywa lub porusza się bez przyspieszenia.
Jest to zasada bezwładności, czyli I zasada dynamiki Newtona.

Układy inercjalne

Z transformacji Galileusza ($\vec{a} = \vec{a}'$) wynika, że jeżeli istnieje jeden układ inercjalny, to istnieje ich nieskończenie wiele (każdy inny poruszający się ze stałą prędkością względem pierwszego).

Pytanie: gdzie takiego układu szukać?

- dla wielu doświadczeń - układ laboratorium. Przyspieszenie dośrodkowe ziemskie na równiku: $\sim 3.34 \times 10^{-2}$ m/s^2.
- ruch Ziemi wokół Słońca:$\sim 6 \times 10^{-3}$ m/s^2.
- obrót Układu Słonecznego względem centrum Galaktyki: $\sim 3 \times 10^{-10}$ m/s^2.

Druga zasada dynamiki - doświadczenia

- Wózki na torze powietrznym: cząstki i akceleratory.

Wprowadzenie pojęcia siły i masy

Wiemy już, że w układzie inercjalnym
ciało pozostaje w spoczynku lub porusza się bez przyspieszenia,
gdy wypadkowa sił działających na ciało jest równa zero.

Chcemy zatem powiązać przyspieszenie
z siłą działającą na ciało.

Zaniedbujemy wpływ, jaki ciało wywiera na "resztę Wszechświata",
tzn. ciało nie zmienia postaci siły na nie działającej.

Uwaga do przeprowadzonego doświadczenia

Idea doświadczenia polega na stosowaniu obiektów niezależnych od siebie: akceleratorów i cząstek. W naszym doświadczeniu *akcelerator także się porusza*, tzn. ciężarek o masie m porusza układ o masie $m + M$. W związku z tym, mierzone przyspieszenie wynosi

$$a = \frac{mg}{m + M}$$

zamiast pożądanego

$$a = \frac{mg}{M}.$$

Popełniany błąd systematyczny pomiaru jest rzędu $\frac{m}{M}$ i wynosi w naszym doświadczeniu ok. 5%.

Wprowadzenie pojęcia siły i masy

- Mamy N cząstek P_0, P_1, ..., P_N
  oraz M akceleratorów A_0, A_1, ..., A_M.
- Za pomocą A_0 nadajemy im przyspieszenia $a_0^{(0)}$ i $a_1^{(0)}$, ..., $a_N^{(0)}$.
  (Dolny indeks numeruje cząstki, a górny - akceleratory.)
  Przyspieszenia mierzymy w układzie inercjalnym.
- Możemy dobrać takie liczby $p_1^{(0)}$, $p_2^{(0)}$, ..., $p_N^{(0)}$,
  że $p_1^{(0)} a_1^{(0)} = p_2^{(0)} a_2^{(0)} = ... = p_N^{(0)} a_N^{(0)} = a_0^{(0)}$.

  Zauważmy, że wybraliśmy cząstkę P_0 jako "wzorcową" i do osiąganego przez nią przyspieszenia dostosowujemy pozostałe za pomcą współczynników $p_i^{(0)}$.

Wprowadzenie pojęcia siły i masy

Zmieniamy akceleratory i powtarzamy procedurę:

$$
\begin{gathered}
p_1^{(1)} a_1^{(1)} = p_2^{(1)} a_2^{(1)} = \ldots = p_N^{(1)} a_N^{(1)} = a_0^{(1)}; \\
p_1^{(2)} a_1^{(2)} = p_2^{(2)} a_2^{(2)} = \ldots = p_N^{(2)} a_N^{(2)} = a_0^{(2)}; \\
\ldots \\
p_1^{(M)} a_1^{(M)} = p_2^{(M)} a_2^{(M)} = \ldots = p_N^{(M)} a_N^{(M)} = a_0^{(M)}.
\end{gathered}
$$

WYNIK DOŚWIADCZENIA:

dla danego i (cząstki) liczby $p_i^{(j)}$ nie zależą od j (akceleratora), czyli dla danej cząstki jej przyspieszenie względem przyspieszenia cząstki "wzorcowej" nie zależy od tego, jakiego akceleratora użyjemy.

Wprowadzenie pojęcia siły i masy

Np., dla cząstki o numerze 1:

$$p_1^0 = p_1^1 = ... = p_1^M$$

Skoro tak, to możemy pominąć górny indeks i napisać:

$$p_1^0 = p_1^1 = ... = p_1^M = m_1.$$

Liczbę m_1 nazywamy masą bezwładną cząstki P_1.

I analogicznie dla pozostałych cząstek.

Cząstka wzorcowa ma masę jednostkową: $m_0 = 1$.
Od nas zależy, co będzie tą jednostką: kg, g, oz, lb, ...

Wprowadzenie pojęcia siły i masy

Zauważmy, z kolei, że w ciągu równości

$$
\begin{gathered}
m_1 a_1^{(0)} = m_2 a_2^{(0)} = \ldots = m_N a_N^{(0)} = m_0 a_0^{(0)};\\
m_1 a_1^{(1)} = m_2 a_2^{(1)} = \ldots = m_N a_N^{(1)} = m_0 a_0^{(1)};\\
m_1 a_1^{(2)} = m_2 a_2^{(2)} = \ldots = m_N a_N^{(2)} = m_0 a_0^{(2)};\\
\ldots\\
m_1 a_1^{(M)} = m_2 a_2^{(M)} = \ldots = m_N a_N^{(M)} = m_0 a_0^{(M)}.
\end{gathered}
$$

iloczyny $m_i a_i^{(j)}$ nie zależą od cząstki, ale od akceleratora.

Iloczyn ten jest *siłą* wywieraną przez akcelerator na cząstkę.

Możemy przyjąć, że akcelerator A_0 definiuje *jednostkową siłę* $m_0 a_0^{(0)}$.

Druga zasada dynamiki Newtona

W układzie inercjalnym, ciało o masie m, na które działa wypadkowa siła $\vec{F}$ porusza się z przyspieszeniem $\vec{a}$ takim, że:

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Trzecia zasada dynamiki - doświadczenia

- Stalowy pręt w uchwycie i magnes sztabkowy.
- Dwa magnesy: jeden na wadze elektronicznej, drugi wiszący na dynamometrze cyfrowym.
- Dwa jednakowe magnesy wiszące na prętach.
- Dwa wózki na torze powietrznym ze sprężyna pomiędzy nimi, ściągnięte nicią, która przepalamy.
- Prawo Archimedesa: ciało zawieszone na dynamometrze + naczynie z wodą + waga.

Więzy

- Ruch poruszających się obiektów jest często ograniczony do płaszczyzny (w ogólności - powierzchni) lub krzywej.
- Mówimy wtedy, że mamy do czynienia z ruchem z więzami.
- Więzy są źródłem siły reakcji, która jest prostopadała do płaszczyzny (lub krzywej) więzów.
- Ruch z więzami charakteryzuje się mniejszą niż trzy liczbą stopni swobody:
  - Ruch swobodny: 3 stopnie swobody;
  - Ruch na płaszczyźnie: 2 stopnie swobody;
  - Ruch wzdłuż krzywej: 1 stopień swobody;
- Liczba stopni swobody = 3 - (liczba równań opisujących więzy).

Trzecia zasada dynamiki Newtona

W układzie inercjalnym, jeśli ciało A działa na ciało B siłą $\vec{F}_{A\to B}$, to ciało B działa na ciało A siłą $\vec{F}_{B\to A}$ o tej samej wartości lecz przeciwnie skierowanej:

$$\vec{F}_{A\to B} = - \vec{F}_{B\to A}.$$

Zauważmy, że zasada ta może obowiązywać tylko w przypadku, gdy oddziaływania rozchodzą się w sposób natychmiastowy. Jest zatem zasadą słuszną w ramach fizyki nierelatywistycznej.

UWAGA: Pisząc $\vec{F}_{A\to B} = - \vec{F}_{B\to A}$ mamy na myśli, że siła $\vec{F}_{A\to B}$ przyłożona jest do ciała B, a siła $\vec{F}_{B\to A}$ - do ciała A!

Prawo Hooke'a

Dany jest pręt o długości L i przekroju ΔS, który rozciągamy siłą ΔF. Pod wpływem *naprężenia*

$$\sigma = \frac{\Delta F}{\Delta S}$$

pręt wydłuża się o ΔL. *Wydłużenie względne* jest równe:

$$\lambda = \frac{\Delta L}{L}.$$

Prawo Hooke'a mówi, że *dla niezbyt dużych odkształceń*

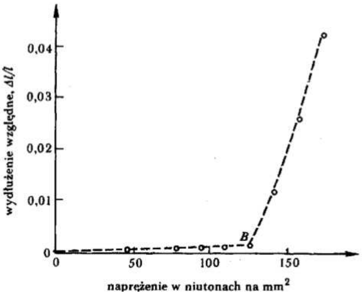
$$\sigma = K\lambda,$$

czyli *wydłużenie względne jest proporcjonalne do naprężenia*.
K - moduł Younga (moduł odkształcalności liniowej). Z powyższego wynika, że

$$\Delta F = K\frac{\Delta S}{L}\Delta L = k\Delta L,$$

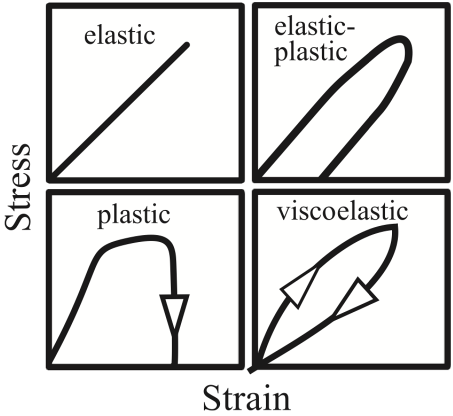
gdzie k - współczynnik sprężystości.

Prawo Hooke'a - granice stosowalności



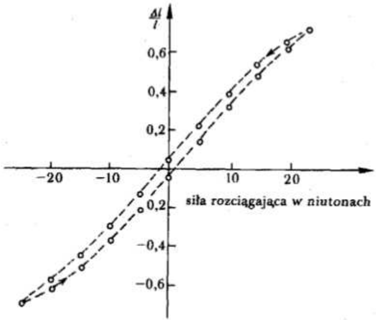
Zależność wydłużenia względnego od naprężenia dla drutu miedzianego o powierzchni przekroju poprzecznego $S = 0.126$ mm^2. Zakres stosowalności prowa Hooke'a kończy się w punkcie B. AKW & JAZ "Wstęp do fizyki", tom 1, str. 234, PWN, 1976.

Krzywe $\sigma - \lambda$



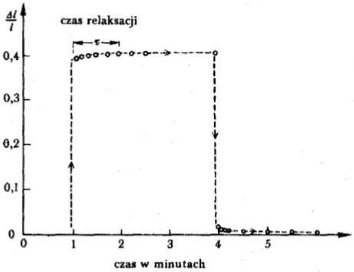
- Krzywe naprężenie-odkształcenie ilustrujące różne rodzaje zachowań.

Sprężystość - histereza i relaksacja



Pętla histerezy dla rurki kauczukowej.

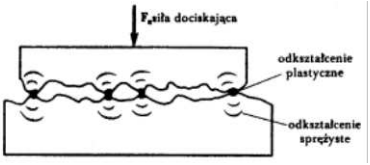
AKW & JAZ "Wstęp do fizyki", tom 1, str. 234, PWN, 1976.



Opóźnienie sprężyste przy rozciąganiu rurki kauczukowej, która była poddawana zmiennemu naprężeniu.

AKW & JAZ "Wstęp do fizyki", tom 1, str. 234, PWN, 1976.

Tarcie poślizgowe



- Powierzchnia styku jest dużo mniejsza niż powierzchnia geometryczna.
- Mechanizm tarcia: "spawanie na zimno" i rozrywanie.
- Współczynnik tarcia statycznego jest większy niż tarcia poślizgowego.
- Współczynnik tarcia tocznego jest mniejszy niż tarcia poślizgowego.

Właściwości siły tarcia: prawa Amontonsa - Coulomba

- Nauka o tarciu: trybologia.
- Prawa te mają charakter empiryczny. Znał je już Leonardo da Vinci, odkrył ponownie Guillaume Amontons (1699 r.), dokładnie sprawdził Charles Coulomb (1781 r.)
- Pierwsze: siła tarcia T między dwoma ciałami jest wprost proporcjonalna do siły normalnej F_N utrzymującej je w zetknięciu. Współczynnik proporcjonalności μ nazywa się współczynnikiem tarcia:

$$T = \mu F_N$$

W zapisie wektorowym:

$$\vec{T} = -\mu F_N \vec{e}_v.$$

- Drugie: przy danej sile normalnej, siła tarcia nie zależy od powierzchni zetknięcia ciał.
- Trzecie: dla niezbyt dużych prędkości, współczynnik tarcia kinetycznego nie zależy od prędkości (nie mówimy tu o sile lepkości, która z definicji zależy od prędkości).

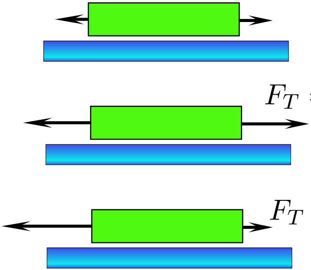
Tarcie statyczne i kinetyczne

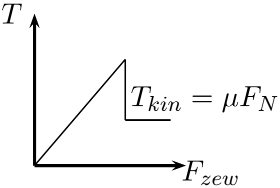
F_{zew}

$F_T < T_{stat,max}$; stan spoczynku

$F_T = T_{stat,max}$; stan spoczynku

$F_T = T_{kin}$; ruch przyspieszony





Siła tarcia a równania ruchu

Jeśli ciało porusza się, to siła tarcia jest równa swojej maksymalnej wartości $T = \mu F_N$. W takim przypadku znaną siłę tarcia możemy wstawić do równań ruchu.

Jeśli ciało nie porusza się, to siła tarcia równoważy wypadkową "sił ciągnących" i jest nie większa niż maksymalna wartość: $T < \mu F_N$. W takim przypadku, siłę tarcia możemy wyznaczyć z równań ruchu.

Siła tarcia

Doświadczenie mówi, że: siła oporu ruchu jest skierowana przeciwnie do wektora prędkości i, w ogólności, zależy od prędkości:

$$\vec{T} = -\vec{e}_v T(\vec{v}).$$

Równanie ruchu w przypadku obecności tarcia:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{T}$$

$$m\vec{a} = \vec{F} - \vec{e}_v T(\vec{v})$$

Będziemy zajmować się dwoma przypadkami:
a) siła tarcia jest niezależna od prędkości: $\vec{T} = -T\vec{e}_v$;
b) siła tarcia jest wprost proporcjonalna do prędkości: $\vec{T} = -\alpha v\vec{e}_v$.

Siła lepkości

- Siła oporu działająca na ciało poruszające się w cieczy lub gazie (ogólnie - w płynie).
- Zależy od wielu czynników, jak: prędkość, gęstość płynu, rozmiary ciała,...
- Będziemy rozpatrywać najprostszy przypadek, gdy siła lepkości jest proporcjonalna do prędkości poruszającego się ciała.