

# Fizyka I (mechanika) 1100-1AF14

## Wykład 4

October 30, 2023

# Plan wykładu

- 1 Siła sprężystości
- 2 Iloczyn wektorowy
- 3 Ruch cząstki naładowanej w polu magnetycznym
- 4 Transformacja  $\vec{v}$  i  $\vec{a}$  między układem inercyjnym a nieinercyjnym
- 5 Ziemia jako układ nieinercyjny

# Prawo Hooke'a

Dany jest pręt o długości  $L$  i przekroju  $\Delta S$ , który rozciągamy siłą  $\Delta F$ . Pod wpływem *naprężenia*

$$\sigma = \frac{\Delta F}{\Delta S}$$

pręt wydłuża się o  $\Delta L$ . *Wydłużenie względne* jest równe:

$$\lambda = \frac{\Delta L}{L}.$$

Prawo Hooke'a mówi, że *dla niezbyt dużych odkształceń*

$$\sigma = K\lambda,$$

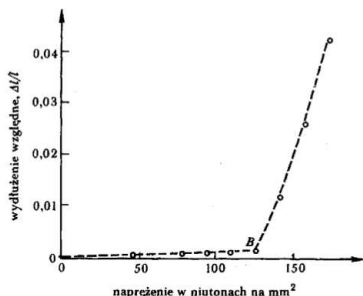
czyli *wydłużenie względne jest proporcjonalne do naprężenia*.

$K$  - moduł Younga (moduł odkształcalności liniowej). Z powyższego wynika, że

$$\Delta F = K \frac{\Delta S}{L} \Delta L = k \Delta L,$$

gdzie  $k$  - współczynnik sprężystości.

## Prawo Hooke'a - granice stosowalności

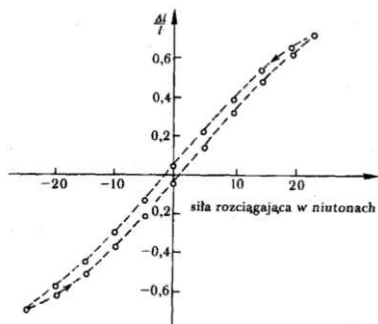


Zależność wydłużenia względnego od naprężenia dla drutu miedzianego o powierzchni przekroju poprzecznego  $S = 0.126 \text{ mm}^2$ . Zakres stosowalności prawa Hooke'a kończy się w punkcie  $B$ .

AKW &amp;

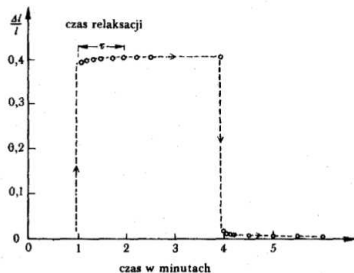
JAZ "Wstęp do fizyki", tom 1, str. 234, PWN, 1976.

## Sprężystość - histereza i relaksacja



Pętla histerezy dla rurki kauczukowej.

AKW & JAZ "Wstęp do fizyki", tom 1, str. 234,  
PWN, 1976.



Opóźnienie sprężyste przy rozciąganiu rurki kauczukowej, która była poddawana zmiennemu naprężeniu.

AKW & JAZ "Wstęp do fizyki", tom 1, str. 234,  
PWN, 1976.

# Równanie ruchu oscylatora harmonicznego

Oscylator harmoniczny jest układem opisanym funkcją  $\Psi(t)$ , której ewolucję w czasie określa równanie:

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2} + \omega^2\Psi = 0.$$

Rozwiązaniem tego równania jest

$$\Psi(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0),$$

gdzie  $A$  jest amplitudą drgań.

Równanie ruchu jest równaniem różniczkowym drugiego rzędu, więc wyznaczenie funkcji  $\Psi$  wymaga dwukrotnego całkowania. Każde całkowanie wprowadza jedną stałą całkowania. Dwie nieznanne wielkości  $A$  i  $\varphi_0$  wyznaczamy na podstawie warunków początkowych. Zazwyczaj warunkami tymi są znane wartości funkcji  $\Psi$  i jej pochodnej  $d\Psi/dt$  w chwili  $t = 0$ .

# Równanie oscylatora harmonicznego

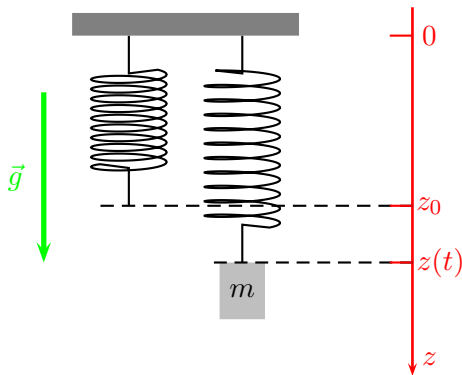
Z równaniem postaci:

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2} + \omega^2\Psi = 0$$

będziemy się często spotykać. Równanie to opisuje, m.in.:

- oscylacje wahadła matematycznego, fizycznego, torsyjnego (dla małych wychyleń);
- oscylacje masy na sprężynie;
- ruch cząstki naładowanej w polu magnetycznym;
- oscylacje prądów i napięć w obwodach prądu zmiennego.

## Przykład: masa na sprężynie



Równanie ruchu:

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = mg - k(z - z_0).$$



# Iloczyn wektorowy

Iloczyn wektorowy wektorów  $\vec{A}$  i  $\vec{B}$ ,  $\vec{A} \times \vec{B}$ , definiujemy jako wektor  $\vec{C}$ , który:

- jest wektorem prostopadłym do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory  $\vec{A}$  i  $\vec{B}$ ;
- ma zwrot zgodny z ruchem śruby prawoskrętnej, gdy wektorem  $\vec{A}$  kręcimy w kierunku wektora  $\vec{B}$  przez kąt mniejszy niż  $\pi$ ;
- ma długość równą  $|\vec{A}||\vec{B}| \sin(\angle(\vec{A}, \vec{B}))$ .

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B},$$

$$C = AB \sin(\angle(\vec{A}, \vec{B})).$$

# Iloczyn wektorowy wersorów

Zauważmy, że w *prawoskrętnym* układzie współrzędnych prostokątnych, rozpiętym przez wersory  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  i  $\vec{e}_z$ , zachodzi:

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z, \quad \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x, \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y,$$

a pozostałe iloczyny wektorowe są równe zero.

Te trzy równania można zapisać w postaci:

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k, \quad (i, j, k) = (x, y, z),$$

gdzie tensor całkowicie antysymetryczny  $\varepsilon_{ijk}$  zdefiniowany jest przez:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{dla parzystych permutacji } (i, j, k); \\ -1 & \text{dla nieparzystych permutacji } (i, j, k); \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

# Iloczyn wektorowy wyrażony przez współrzędne

Dane są dwa wektory  $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$  oraz  $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ , których współrzędne określone są w *prawoskrętnym* układzie współrzędnych. Korzystając z rozdzielczości iloczynu wektorowego względem dodawania wektorów oraz z obliczonych powyżej iloczynów wektorowych wersorów można łatwo obliczyć, że:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{matrix} \vec{e}_x(A_y B_z - A_z B_y) + \\ \vec{e}_y(-A_x B_z + A_z B_x) + \\ \vec{e}_z(A_x B_y - A_y B_x) \end{matrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

# Siła Lorentza

Siła działająca na cząstkę o ładunku  $q$ , poruszającą się z prędkością  $\vec{v}$  w polu magnetycznym o indukcji  $B$ :

$$\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}.$$

Jeśli dodatkowo obecne jest pole elektryczne  $\vec{E}$ , to całkowita siła działająca na cząstkę jest równa:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}.$$

# Ruch w jednorodnym polu magnetycznym

**Zadanie:** Znaleźć i przedyskutować ruch cząstki o masie  $m$  i ładunku  $q$  w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $\vec{B} = [0, 0, B]$ . Prędkość początkowa  $\vec{v}_0$  skierowana jest pod kątem  $\alpha$  do pola magnetycznego. W chwili  $t = 0$  cząstka znajdowała się w punkcie o współrzędnych  $(0, 0, 0)$ .

# Ruch w jednorodnym polu magnetycznym

Równanie ruchu ma postać:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B} = \vec{e}_x v_y B - \vec{e}_y v_x B$$

czyli we współrzędnych  $(x, y, z)$ :

$$\begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = qv_y B \\ m \frac{dv_y}{dt} = -qv_x B \\ m \frac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases}$$

## Ruch w jednorodnym polu magnetycznym

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = \omega_c v_y \\ \frac{dv_y}{dt} = -\omega_c v_x \\ v_z = v_{z0} = \text{const} \\ z(t) = v_{z0} t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 v_x}{dt^2} = -\omega_c^2 v_x \\ \frac{d^2 v_y}{dt^2} = -\omega_c^2 v_y \end{cases}$$

Po rozwiązaniu i uwzględnieniu warunków początkowych:

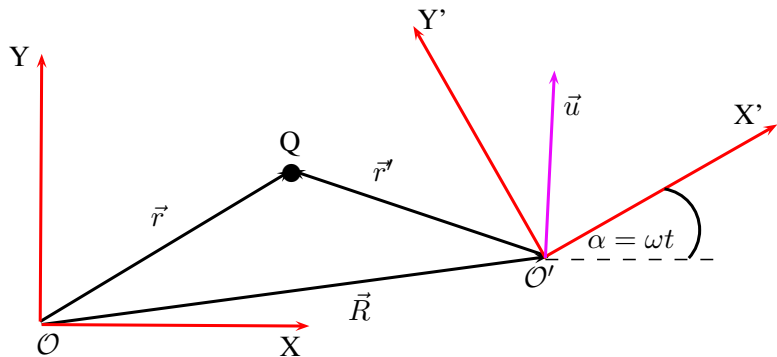
$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \sin \alpha \cos \omega_c t \\ v_y(t) = -v_0 \sin \alpha \sin \omega_c t \end{cases} ; \begin{cases} x(t) = \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega_c} \sin \omega_c t \\ y(t) = \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega_c} (\cos \omega_c t - 1) \end{cases}$$

## Ruch w jednorodnym polu magnetycznym - wnioski

- W przypadku, gdy prędkość początkowa ma kierunek pola magnetycznego, cząstka porusza się bez zmiany kierunku i wartości prędkości;
- W ogólnym przypadku ruch jest złożeniem ruchu jednostajnego w kierunku pola magnetycznego (z prędkością  $v_0 \cos \alpha$  i ruchu po okręgu w płaszczyźnie prostopadłej do pola. W ogólności zatem tor jest linią śrubową o stałym skoku równym  $2\pi m v_0 \sin \alpha / qB$ . Ruch po okręgu odbywa się z prędkością  $v_0 \sin \alpha$ . Promień okręgu wynosi  $v_0 \sin \alpha / \omega_c$ .
- Siła Lorentza jest prostopadła do prędkości, zatem nie wykonuje pracy i nie zmienia wartości prędkości cząstki, a jedynie jej kierunek.
- Kierunek ruchu okrężnego zależy od znaku ładunku cząstki.



## Dwaj obserwatorzy - związek między *mierzonymi* współrzędnymi punktu



Chcemy wyrazić położenie, prędkość i przyspieszenie *mierzone* w układzie  $O$  przez położenie, prędkość i przyspieszenie *mierzone* w układzie  $O'$

Zacznijmy od położenia. Zgodnie z rysunkiem

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}$$

ale zauważmy, że chcemy, aby  $\vec{r}'$  był wyznaczony przez współrzędne i wersory układu primowanego:

$$x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = x'\vec{e}'_{x'} + y'\vec{e}'_{y'} + z'\vec{e}'_{z'} + R_x\vec{e}_x + R_y\vec{e}_y + R_z\vec{e}_z.$$

Dla uproszczenia rachunków zakładamy, że ruch względny układów (złożony z obrotu i przesunięcia) jest ograniczony do płaszczyzny  $xy$ . Wtedy

$$\begin{aligned}\vec{e}'_{x'} &= \cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_y \\ \vec{e}'_{y'} &= -\sin \alpha \vec{e}_x + \cos \alpha \vec{e}_y \\ \vec{e}'_{z'} &= \vec{e}_z.\end{aligned}$$

Po podstawieniu i prostych przekształceniach otrzymamy:

$$\begin{cases} x &= (x' \cos \alpha - y' \sin \alpha) + R_x \\ y &= (x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) + R_y \\ z &= z' + R_z \end{cases} \quad (1)$$

oraz

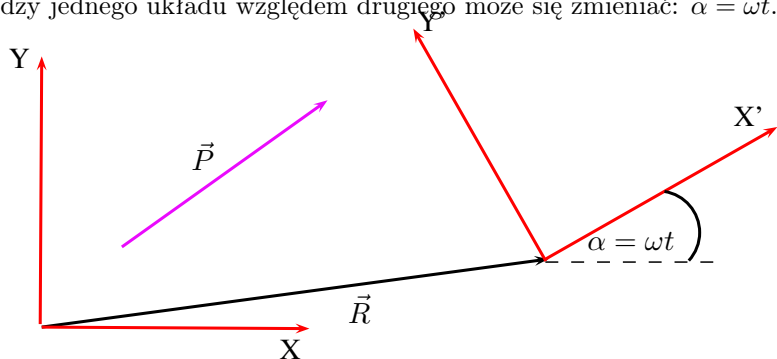
$$\begin{cases} x' &= (x - R_x) \cos \alpha + (y - R_y) \sin \alpha \\ y' &= -(x - R_x) \sin \alpha + (y - R_y) \cos \alpha \\ z' &= z - R_z \end{cases} \quad (2)$$

Te równania należy rozumieć w następujący sposób: jeśli obserwator  $\mathcal{O}$  mierzy w układzie odniesienia  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  współrzędne  $(x, y, z)$  punktu P, a obserwator  $\mathcal{O}'$  mierzy w układzie odniesienia  $\vec{e}'_x, \vec{e}'_y, \vec{e}'_z$  współrzędne  $(x', y', z')$  tego punktu, to równania (1) i (2) dają związki między współrzędnymi. **Podkreślmy: każdy z obserwatorów rzutuje wektor położenia na osie własnego układu odniesienia.**

$$x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = R_x\vec{e}_x + R_y\vec{e}_y + R_z\vec{e}_z = x'\vec{e}'_{x'} + y'\vec{e}'_{y'} + z'\vec{e}'_{z'}$$

## Dwaj obserwatorzy - związek między *mierzona* pochodną wektora

Zajmiemy się teraz znalezieniem relacji pomiędzy pochodną wektora  $\vec{P}$  mierzona przez obserwatorów  $\mathcal{O}$  i  $\mathcal{O}'$ .  $\vec{P}$  jest dowolnym wektorem, może symbolizować wektor położenia, prędkości, itp. Zakładamy też, że kąt obrotu między jednego układu względem drugiego może się zmieniać:  $\alpha = \omega t$ .



W układzie  $\mathcal{O}$ : 
$$\vec{P} = P_x \vec{e}_x + P_y \vec{e}_y + P_z \vec{e}_z.$$

W układzie  $\mathcal{O}'$ : 
$$\vec{P} = P'_{x'} \vec{e}'_{x'} + P'_{y'} \vec{e}'_{y'} + P'_{z'} \vec{e}'_{z'}.$$

Wprowadźmy *oznaczenie*  $\vec{P}'$ :

$$\vec{P}' = P'_{x'} \vec{e}'_{x'} + P'_{y'} \vec{e}'_{y'} + P'_{z'} \vec{e}'_{z'}.$$

rozumiejąc to w ten sposób, że wektor  $\vec{P}'$  jest to wektor  $\vec{P}$  wyrażony przez *współrzędne i wersory* układu  $\mathcal{O}'$ .

$$\vec{P} = P_x \vec{e}_x + P_y \vec{e}_y + P_z \vec{e}_z = P'_{x'} \vec{e}'_{x'} + P'_{y'} \vec{e}'_{y'} + P'_{z'} \vec{e}'_{z'} = \vec{P}'.$$

Podstawiając wersory “primowane” otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= P'_{x'} \vec{e}'_{x'} + P'_{y'} \vec{e}'_{y'} + P'_{z'} \vec{e}'_{z'} = \\ &= P'_{x'} (\cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_y) + P'_{y'} (-\sin \alpha \vec{e}_x + \cos \alpha \vec{e}_y) + P'_{z'} \vec{e}_z = \\ &= (P'_{x'} \cos \alpha - P'_{y'} \sin \alpha) \vec{e}_x + (P'_{x'} \sin \alpha + P'_{y'} \cos \alpha) \vec{e}_y + P'_{z'} \vec{e}_z. \end{aligned}$$

Zastanówmy się, co oznacza ta równość w prostym przypadku, gdy wektor  $\vec{P}$  jest wektorem stałym w układzie  $\mathcal{O}$ . Jeśli orientacja układu  $\mathcal{O}'$  względem układu  $\mathcal{O}$  jest ustalona (tzn. kąt  $\alpha$  nie zmienia się w czasie) to współrzędne “primowane” też muszą być stałe w czasie. Inaczej jest, gdy układ “primowany” obraca się względem “nieprimowanego” - widać, że w takiej sytuacji zmiana wartości funkcji  $\sin \alpha$  i  $\cos \alpha$  musi być skompensowana zmianą wartości współrzędnych primowanych. Inaczej mówiąc, dla obserwatora  $\mathcal{O}'$  wektor  $\vec{P}$  zmienia się (bo zmieniają się jego współrzędne w układzie primowanym). Zatem, mimo że pochodna wektora  $\vec{P}$  w układzie  $\mathcal{O}$  jest równa zero, w układzie  $\mathcal{O}'$  jest różna od zera. Znajdziemy teraz związek między tymi pochodnymi.

W ogólności, zmieniają się współrzędne wektora  $\vec{P}$  w obu układach. Zgodnie z założeniem, że ruch obrotowy zachodzi tylko w płaszczyźnie  $xy$ , mamy  $\alpha = \omega t$ , gdzie wektor prędkości kątowej  $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$  jest *mierzony przez obserwatora  $\mathcal{O}$* . Różniczkując (i wykorzystując związki między wersorami w obu układach), dostajemy:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{P}}{dt} &= \frac{dP_x}{dt}\vec{e}_x + \frac{dP_y}{dt}\vec{e}_y + \frac{dP_z}{dt}\vec{e}_z = \\ &= \frac{dP'_{x'}}{dt}\vec{e}'_{x'} + \frac{dP'_{y'}}{dt}\vec{e}'_{y'} + \frac{dP'_{z'}}{dt}\vec{e}'_{z'} - \omega P'_{y'}\vec{e}'_{x'} + \omega P'_{x'}\vec{e}'_{y'}. \end{aligned}$$

Czyli:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{P}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{P}'.$$



Zastosujmy ten wynik do wektora położenia punktu  $Q$ :  $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}$ . Wektor  $\vec{R}$  jest położeniem  $\mathcal{O}$  względem  $\mathcal{O}'$ , wyrażonym we współrzędnych “nieprimowanych”. Aby uzyskać pełną analogię z powyższym rozumowaniem, obliczmy pochodną wektora  $\vec{r} - \vec{R} = \vec{r}'$ :

$$\frac{d(\vec{r} - \vec{R})}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

$$\vec{v} - \vec{u} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}',$$

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}',$$

gdzie:

$\vec{v}$  - mierzona przez  $\mathcal{O}$  zmiana wektora  $\vec{r}$  (wyrażona przez współrzędne i wersory “nieprimowane”), czyli prędkość punktu  $Q$  w układzie  $\mathcal{O}$ ;

$\vec{v}'$  - mierzona przez  $\mathcal{O}'$  zmiana wektora  $\vec{r}'$  (wyrażona przez współrzędne i wersory “primowane”), czyli prędkość punktu  $Q$  w układzie  $\mathcal{O}'$ ;

$\vec{u}$  - mierzona przez  $\mathcal{O}$  zmiana wektora  $\vec{R}$  (wyrażona przez współrzędne i wersory “nieprimowane”), czyli prędkość  $\mathcal{O}'$  w układzie  $\mathcal{O}$ .

Znajdźmy teraz związek między przyspieszeniami:

$$\vec{v} - \vec{u} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{v} - \vec{u}) = \frac{d}{dt}(\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{\omega} \times (\vec{v}' + (\vec{\omega} \times \vec{r}'))$$

Ostatecznie, otrzymujemy:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{tr} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'),$$

gdzie:

$\vec{a}'$  - przyspieszenie mierzone w  $\mathcal{O}'$ ;

$\vec{a}_{tr} = \frac{d\vec{u}}{dt}$  - przyspieszenie postępowe  $\mathcal{O}'$  względem  $\mathcal{O}$ , mierzone w  $\mathcal{O}$ ;

$2\vec{\omega} \times \vec{v}'$  - przyspieszenie Coriolisa;  $\vec{v}'$  - mierzone w  $\mathcal{O}'$ ;

$\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'$  - przyspieszenie kątowe  $\mathcal{O}'$  względem  $\mathcal{O}$ ;

$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$  - przyspieszenie dośrodkowe.

Zauważmy, że  $\vec{a}$ ,  $\vec{a}_{tr}$  oraz  $\vec{\omega}$  są mierzone w  $\mathcal{O}$ .

## Przykład: przyspieszenie w ruchu po okręgu

### Zadanie.

Rozpatrzmy punkt  $Q$ , który - w układzie  $\mathcal{O}$  - porusza się po okręgu o promieniu  $R$  z prędkością kątową  $\omega = \chi t$ ,  $t \geq 0$ . Chcemy znaleźć przyspieszenie tego punktu w układzie  $\mathcal{O}$  i  $\mathcal{O}'$ , przy czym układ  $\mathcal{O}'$  wiruje wraz z poruszającym się punktem, a środki układów się pokrywają. W chwili  $t = 0$  osie  $x$  i  $x'$  oraz  $y$  i  $y'$  - odpowiednio - się pokrywały, a położenie punktu  $Q$  w układzie  $\mathcal{O}'$  dane jest przez  $(x', y') = (R, 0)$ .

Zauważmy, że związek między wersorami obu układów jest następujący:

$$\vec{e}'_{x'} = \cos \alpha(t) \vec{e}_x + \sin \alpha(t) \vec{e}_y,$$

$$\vec{e}'_{y'} = -\sin \alpha(t) \vec{e}_x + \cos \alpha(t) \vec{e}_y,$$

gdzie  $\alpha(t)$  jest kątem obrotu układu  $\mathcal{O}'$  względem  $\mathcal{O}$ .

## Rozwiązanie

Prędkość w układzie  $\mathcal{O}$  ma wartość  $v = \chi Rt$  oraz składowe:

$$\begin{aligned}v_x &= -\chi Rt \sin \alpha \vec{e}_x, \\v_y &= \chi Rt \cos \alpha \vec{e}_y, \\ \alpha(t) &= \frac{1}{2} \chi t^2.\end{aligned}$$

Prędkość w układzie  $\mathcal{O}'$  wynosi - na podstawie treści zadania - zero, ale możemy ją wyznaczyć stosując zależność  $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{\omega} \times \vec{r}'$ . Iloczyn wektorowy obliczamy w układzie primowanym.  $\vec{\omega}$  ma takie same składowe  $(0,0,\omega)$  w obu układach.

$$(v'_{x'}, v'_{y'}) = -\chi Rt \sin \alpha \vec{e}_x + \chi Rt \cos \alpha \vec{e}_y - \omega R \vec{e}'_{y'} = (0, 0)$$

Przyspieszenie w układzie “primowanym” jest równe zero (punkt  $Q$  jest w tym układzie nieruchomy). Ponieważ  $\vec{a}_{tr} = 0$ ,  $\vec{v}' = 0$ , więc powinniśmy stwierdzić, że

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}').$$

Lewą stronę obliczamy różniczkując składowe prędkości w układzie  $\mathcal{O}$ :

$$\begin{aligned} a_x &= \left(-\chi R \sin \frac{\chi t^2}{2} - \chi^2 R t^2 \cos \frac{\chi t^2}{2}\right), \\ a_y &= \left(\chi R \cos \frac{\chi t^2}{2} - \chi^2 R t^2 \sin \frac{\chi t^2}{2}\right), \\ \vec{a} &= a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y = \chi R \vec{e}'_{y'} - \chi^2 t^2 R \vec{e}'_{x'}. \end{aligned}$$

Zauważmy, na marginesie, że wersory  $\vec{e}'_{x'}$  i  $\vec{e}'_{y'}$  są równe, odpowiednio, wersorom układu biegunowego związanego z  $\mathcal{O}$ :

$$\vec{a} = -\chi^2 t^2 R \vec{e}_\rho + \chi R \vec{e}_\varphi.$$

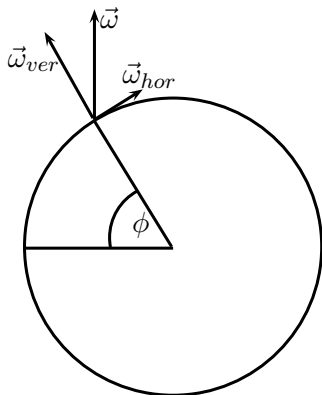
Prawą stronę obliczamy w układzie  $\mathcal{O}'$ :

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' = (0, 0, \chi) \times (R, 0, 0) = \chi R e'_{y'}$$

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot R e'_{x'}) - R e'_{x'} \omega^2 = -\chi^2 t^2 R e'_{x'}$$

Widać, że obliczenia różnych wielkości w dwóch układach współrzędnych dają ten sam wynik.

## Ruch obrotowy Ziemi

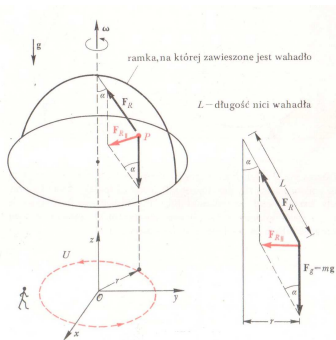


Prędkość kątową ruchu obrotowego Ziemi rozkładamy na dwie składowe:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{ver} + \vec{\omega}_{hor}.$$

$\omega_{ver}$  jest prędkością kątową obrotu płaszczyzny horyzontu wokół kierunku radialnego - odpowiada za zmianę płaszczyzny wahań wahadła Foucaulta. Prędkość  $\omega_{hor}$  określa szybkość podnoszenia się płaszczyzny horyzontu na zachodzie i opuszczania się na wschodzie.

## Wahadło na obracającej się Ziemi

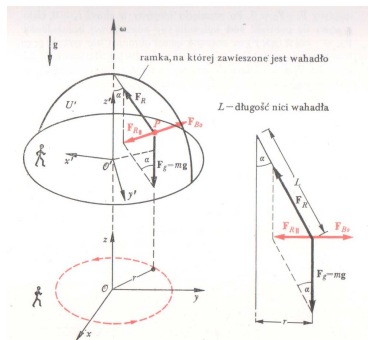


Obserwator  $\mathcal{O}$ : ciało  $P$  porusza się po okręgu o promieniu  $r$  pod wpływem siły dośrodkowej, będącej składową reakcji nici  $F_{R||}$ ; nadaje mu ona przyspieszenie dośrodkowe  $\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = -\omega^2 \mathbf{r}$ . Kąt wychylenia  $\alpha$  można obliczyć następująco:

$$F_{R||} = m\omega^2 r = m\omega^2 L \sin \alpha,$$

gdyż, jak widać z rysunku,  $r = L \sin \alpha$ , oraz  $\tan \alpha = F_{R||} / F_g = m\omega^2 L \sin \alpha / mg$ . Stąd

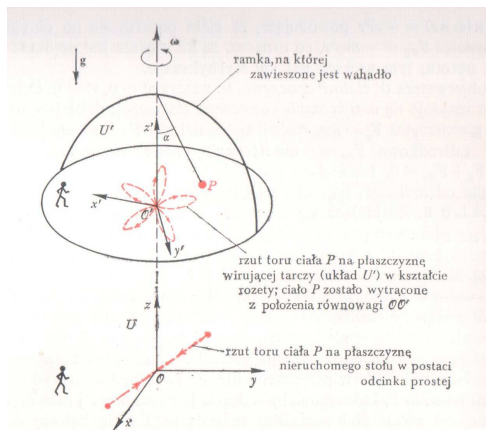
$$\cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 L}.$$



Obserwator  $\mathcal{O}'$ : ciało  $P$  znajduje się w równowadze statycznej ze względu na znikanie sumy siły grawitacyjnej  $F_g$  i reakcji sprężystej nici  $F_R$  oraz siły bezwładności odśrodkowej  $F_{B0}$ :  $F_g + F_R + F_{B0} = 0$ . Oczywiście  $F_{B0} = m\omega^2 r = F_{R||}$ ; a więc obserwator  $\mathcal{O}'$  znajdzie tę samą zależność dla kąta wychylenia  $\alpha$ , co obserwator  $\mathcal{O}$ .



# Wahadło Foucaulta

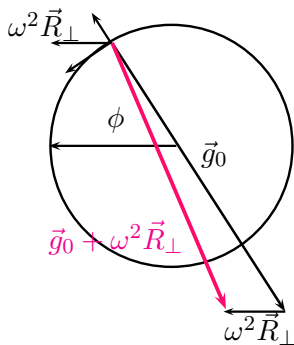


Obserwator  $\mathcal{O}$ : ciało  $P$  porusza się w niezmiennych w przestrzeni płaszczyźnie wahań, ponieważ nie działają na nie żadne siły, które mogłyby wytrącić je z ruchu w tej płaszczyźnie. Rzut toru ciała na płaszczyznę stołu  $xy$  jest odcinkiem prostej.

AKW & JAZ, *Wstęp do fizyki*

Zademonstrowane przez Jeana Bernarda Leona Foucaulta w Obserwatorium Astronomicznym w Paryżu w 1851 r. jest dowodem dobowego ruchu obrotowego Ziemi. Płaszczyzna wahań obraca się z częstością  $\omega_{ver} = \omega \sin \phi$ .

## Siła odśrodkowa i przyspieszenie na powierzchni Ziemi



Z powodu ruchu Ziemi wokół osi, mierzona wartość przyspieszenia ziemskiego zależy od szerokości geograficznej  $\phi$ . Jeśli ciało nie porusza się względem Ziemi, to działa na niego siła bezwładności skierowana wzdłuż promienia równoleżnika, związana z przyspieszeniem odśrodkowym  $\omega^2 R_{\perp} = \omega^2 R \cos \phi$ . Wskutek tego wypadkowe przyspieszenie ziemskie nie ma kierunku radialnego i opisane jest wektorem  $\vec{g}(\phi)$ , który spełnia równanie:  $\vec{g}_0 = \vec{g}(\phi) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}(\phi))$ , gdzie  $\vec{g}_0$  jest przyspieszeniem grawitacyjnym mierzonym w układzie inercyjnym na powierzchni kuli o masie i promieniu Ziemi.

## Spadek swobodny przy powierzchni Ziemi

Przyspieszenie odśrodkowe ma dwie składowe: radialną i horyzontalną. Składowa radialna dodaje się do skierowanego radialnie wektora  $\vec{g}_0$ . Składowa horyzontalna odpowiada za odchylenie toru ciała spadającego swobodnie: na południe na półkuli północnej i na północ na półkuli południowej.

Podczas spadku ciało się porusza w układzie nieinercjalnym ( $\vec{v}' \neq 0$ ), w związku z czym pojawia się dodatkowy efekt - przyspieszenie Coriolisa, które na obu półkulach powoduje odchylenie toru na wschód.

Czyli, tor spadającego ciała odchyła się od kierunku radialnego na południowy wschód na półkuli północnej i na północny wschód na półkuli południowej.