Fizyka I (mechanika) 1100-1AF14

Wykład 7

November 20, 2023

Plan wykładu

Praca

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Mnożymy skalarnie obie strony przez $d\vec{r}$:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Prawą stronę tego równania oznaczamy przez dW i nazywamy pracą siły $\vec{F}$ przy przesunięciu $d\vec{r}$.

$$dW = F ds \cos(\sphericalangle(\vec{F}, d\vec{r})) = F_t ds$$

$$W_{A\to B} = \vec{F}(\vec{r}_1) \cdot d\vec{r}_1 + .. + \vec{F}(\vec{r}_N) \cdot d\vec{r}_N = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Praca wykonana przez siłę $\vec{F}$ może (ale nie musi) zależeć od wyboru drogi łączącej punkty A i B.

Praca sił prostopadłych do przesunięcia

Siły prostopadłe do przesunięcia:

- Siła dośrodkowa
- Siła Lorentza
- Siła grawitacji w pobliżu Ziemi dla przesunięć poziomych
- Siła reakcji dla więzów niezależnych od czasu.

Praca tych sił jest równa zero!

Moc

W zastosowaniach praktycznych interesuje nas często szybkość wykonywania pracy. Wprowadzamy zatem wielkość o nazwie *moc* zdefiniowaną jako:

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{dE_k}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right)$$

Jeśli znamy moc jako funkcję czasu, to pracę wykonaną w przedziale czasu od t_1 do t_2 możemy przedstawić w postaci:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} P(t)dt.$$

Energia kinetyczna

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Mnożymy skalarnie obie strony przez $d\vec{r}$:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Lewa strona równania:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}dt = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$$

Energia kinetyczna i praca siły F

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Mnożymy skalarnie obie strony przez $d\vec{r}$:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Całkujemy wzdłuż drogi łączącej punkty A i B:

$$\int_A^B d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\frac{1}{2}mv^2(B) - \frac{1}{2}mv^2(A) = W_{A\to B}$$

Praca siły zewnętrznej jest równa zmianie energii kinetycznej ciała.

Prosty przykład - ruch w stałym polu grawitacyjnym

Masa m spoczywa na wysokości h nad Ziemią i w pewnej chwili zaczyna spadać.
Siła grawitacji wykonuje pracę:

$$W_{pole,\downarrow} = \int_h^0 m\vec{g} \cdot d\vec{r} =$$

$$= \int_h^0 (-mg)dz = -mg \int_h^0 dz = -mg(0-h) = mgh,$$

co jest równe zmianie energii kinetycznej (możemy ją wyznaczyć z równań ruchu):

$$\color{blue}{mgh} = \frac{1}{2}mv^2(z=0) - \frac{1}{2}mv^2(z=h) = \color{blue}{\frac{1}{2}mv^2(z=0)}$$

Praca w stałym polu grawitacyjnym

Jaką pracę wykonamy podnosząc masę m na wysokość h?
(Zakładamy, że robimy to tak wolno, że energię kinetyczną możemy zaniedbać.)

$$W_{my,\uparrow} = \int_0^h m\vec{g} \cdot d\vec{r} = \int_0^h (mg) dz = mgh$$

Czyli kosztem pracy siły zewnętrznej ciało zyskało energię potencjalną mgh.

A jaką pracę wykonała w tym czasie siła grawitacji?

$$W_{pole,\uparrow} = \int_0^h m\vec{g} \cdot d\vec{r} =$$

$$= \int_0^h (-mg) dz = -mg \int_0^h dz = -mg(h-0) = -mgh.$$

Siły zachowawcze i energia potencjalna

Zauważmy, że praca siły cieżkości przy przesunięciu masy m z punktu A do B nie zależy od drogi, którą ciało przebyło i zawsze jest równa:

$$W_{A \to B} = \int_A^B m\vec{g} \cdot d\vec{r}.$$

Ale wiemy, że taką właściwość ma całka z wyrażenia, które jest różniczką jakiejś funkcji, nazwijmy ją $-E_p$:

$$\int_A^B (-dE_p) = -(E_p(B) - E_p(A)).$$

Siły zachowawcze i energia potencjalna

Mamy więc dla siły grawitacji:

$$W_{A\to B} = -\int_A^B dE_p = -(E_p(B) - E_p(A)).$$

Równanie to przyjmiemy jako definicję pewnej klasy sił, które nazywamy *siłami zachowawczymi*: **dla sił zachowawczych praca zależy tylko od położenia początkowego i końcowego, nie zależy od pokonanej drogi**. Funkcję E_p nazywamy *energią potencjalną siły* $\vec{F}$.

W szczególności, jeśli A pokrywa się z B, to wyciągamy wniosek, że **praca siły zachowawczej po konturze zamkniętym jest równa zero**.

Definicje siły zachowawaczej

Z powyższych rozważań wynika, że siła $\vec{F}$ jest zachowawcza, jeśli

1. Praca siły $\vec{F}$ na drodze określonej wektorem $d\vec{r}$ jest równa różniczce pewnej funkcji, zwanej energią potencjalną, $\vec{F} \cdot d\vec{r} = -E_p$.
2. Praca siły zachowawaczej po konturze zamknietym jest równa zero.
3. Praca siły zachowawczej między punktami A i B zależy wyłącznie od położenia tych punktów, a nie od przebytej drogi.

Każde z tych stwierdzeń można przyjąć za definicję siły zachowawczej i wykazać równoważność przyjętej definicji z pozostałymi dwoma stwierdzeniami.

Poziom odniesienia dla energii potencjalnej

Energia potencjalna ciała w punkcie B jest określona przez pracę wykonaną przy przesunięciu ciała z punktu A do B:

$$E_p(B) - E_p(A) = -\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Jeśli zmienimy położenie punktu początkowego do A', to energia potencjalna w punkcie B będzie (w ogólności) inna:

$$E_p'(B) - E_p(A') = -\int_{A'}^B \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Widać, że

$$E_p'(B) = -\int_{A'}^A \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_p(B) + C,$$

gdzie C jest dane przez:

$$C = \int_A^{A'} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Zatem, energia potencjalna *jest określona z dokładnością do stałej*.

Siła centralna jest zachowawcza

Siła centralna to siłą, której wartość zależy wyłącznie od odległości od centrum siły, czyli:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(r)\frac{\vec{r}}{r}.$$

Jak już wiemy, dla siły zachowawczej praca nie zależy od drogi, a tylko od położenia punktu początkowego i końcowego. Zatem, dla siły centralnej:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B F(r)\frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{r} = \int_A^B F(r)dr = \Phi(r_B) - \Phi(r_A),$$

gdzie $\Phi(r)$ jest całką funkcji $F(r)$: $F(r) = d\Phi/dr$.

Zachowanie energii mechanicznej dla sił zachowawczych

Widzieliśmy, że dla siły zachowawczej,

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) \text{ oraz } dW = -dE_p.$$

Oznacza to, że

$$d(E_p + E_k) = 0,$$

czyli

$$E_p + E_k = const.$$

Suma energii kinetycznej i potencjalnej nosi nazwę *energii mechanicznej*.
Równanie to wyraża **zasadę zachowania energii mechanicznej w przypadku sił zachowawczych**.

Klocek wciągany na równię

Zadanie: klocek o masie m wciągany jest siłą F w górę równi o kącie nachylenia α. Współczynnik tarcia jest równy f. Rozważyć przemiany energii podczas przesunięcia klocka wzdłuż równi o d.

Rozwiązanie

$$T = -mgf\cos\alpha$$

$$a = \frac{F}{m} - g\sin\alpha - gf\cos\alpha$$

$$d = v_0t + \frac{1}{2}at^2 = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \Rightarrow a = \frac{v^2 - v_0^2}{2d}$$

$$\frac{F}{m} - g\sin\alpha - gf\cos\alpha = \frac{v^2 - v_0^2}{2d}$$

$$Fd = mg\sin\alpha d + \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) + mgfd\cos\alpha$$

$$W_F = \Delta E_p + \Delta E_k + W_T$$

$$W_F = \Delta E_{mech} + \Delta E_{term}$$

Zasada zachowania energii

Zmiana całkowitej energii układu jest równa energii dostarczonej do układu lub od niego odebranej.

Do tej pory zmianę energii mogliśmy osiągnąć przez wykonanie nad układem pracy. Ale są i inne sposoby (np. ciepło).

Siła a energia potencjalna - przypadek jednowymiarowy

Jeśli siła zachowawcza ma tylko jedną składową $\vec{F} = F\vec{e}_x$, zaś współrzędne punktów A i B są równe a i b, to :

$$E_p(b) - E_p(a) = -\int_A^B \vec{F} \cdot \vec{dr} = -\int_a^b F dx,$$

zatem

$$F(b) = -\frac{dE_p}{dx}|_{x=b}$$

Siła a energia potencjalna - przykłady

- Siła sprężysta.
  Energia potencjalna sprężyny ściśniętej o x jest równa:
  $$E_p = \frac{1}{2}kx^2.$$
  Stąd, siła sprężystości jest dana przez
  $$F_{spr} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -kx.$$
- Siła grawitacji przy powierzchni Ziemi.
  Energia grawitacyjna jest równa
  $$E_p = mgh.$$
  Siła grawitacji
  $$F = -\frac{d}{dh}mgh = -mg.$$

Przypadek trójwymiarowy - gradient

W ogólnym przypadku, energia potencjalna jest funkcją x, y, z: $E_p = E_p(x, y, z)$. Wtedy

$$\vec{F} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{e}_x - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{e}_y - \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{e}_z = -\vec{\nabla} E_p.$$

$$\frac{\partial E_p(x, y, z)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{E_p(x + \Delta x, y, z) - E_p(x, y, z)}{\Delta x}$$

Operator

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$$

nazywamy *gradientem*. Argumentem gradientu jest funkcja **skalarna**, zaś wynikiem - funkcja **wektorowa**.

Gradient skalara jest wektorem.

Gradient i powierzchnie ekwipotencjalne

Gradient funkcji skalarnej jest wektorem o następujących właściwościach:

- jest to wektor prostopadły do płaszczyzny ekwipotencjalnej $\Rightarrow$ z tego wynika, że kierunek działania siły jest prostopadły do powierzchni ekwipotencjalnej: $\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$.
- jest to wektor, który pokazuje kierunek najszybszego wzrostu funkcji E_p.

Proste przykłady prostopadłości siły i powierzchni ekwipotencjalnych:

- siła grawitacji w stałym polu grawitacyjnym
- siła grawitacji, elektrostatyczna $\sim r^{-2}$

Gradient i powierzchnie ekwipotencjalne

Dowód powyższych faktów jest następujący:

- Różniczka funkcji wielu zmiennych $E_p(x, y, z)$ wyraża się wzorem:

$$dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x}dx + \frac{\partial E_p}{\partial y}dy + \frac{\partial E_p}{\partial z}dz = \vec{\nabla} E_p \cdot d\vec{r}.$$

- Jeśli $d\vec{r}$ leży na powierzchni ekwipotencjalnej, to $dE_p = 0$, czyli $\vec{\nabla} E_p \cdot d\vec{r} = 0$, co oznacza, że $\vec{\nabla} E_p \perp d\vec{r}$, czyli $\vec{\nabla} E_p$ jest prostopadły do powierzchni ekwipotencjalnej
- Jeśli rozpatrzymy dwie bardzo bliskie siebie powierzchnie ekwipotencjalne odpowiadające wartościom E_p i $E_p + dE_p$, to najkrótszą linią łączącą te powierzchnie jest linia do nich prostopadła, czyli odpowiadająca kierunkowi gradientu. Oznacza to, że zmiana dE_p jest najszybsza w kierunku gradientu.