Fizyka I (mechanika) 1100-1AF14

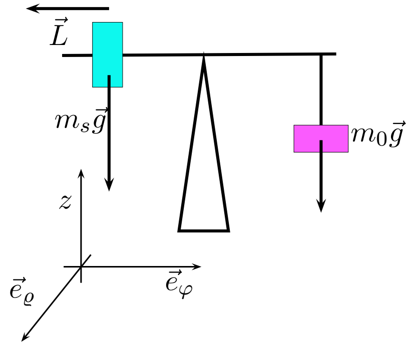
Wykład 9

December 4, 2023

Plan wykładu

1. Żyroskopy, bąki, etc.
2. Twierdzenie Steinera
3. Praca momentu sił
4. Nieobowiązkowo - równania Eulera

Niezrównoważony żyroskop

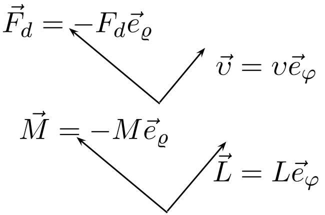


Żyroskop nie jest zrównoważony, gdy momenty siły ciężkości wirującego silnika o masie m_s i masy m_0 względem punktu podparcia dźwigni dwustronnej nie są sobie równe. Pojawia się wówczas wypadkowy moment siły $\vec{M}$ obracający układ wokół osi z.

Precesja żyroskopu - opis w układzie inercjalnym

W układzie inercjalnym mamy równanie ruchu: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$, czyli przy odpowiednio ustawionych osiach układu biegunowego: $\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\frac{M}{L}\vec{e}_\varrho$. $\vec{M}$ jest prostopadły do $\vec{L}$, zatem będzie powodować obrót $\vec{L}$ wokół osi z. Aby znaleźć ruch wektora $\vec{L}$ zauważmy analogię z ruchem ze stałą wartością prędkości wokół okręgu. Równanie ruchu ma postać: $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_d/m$, czyli $\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\frac{F_d}{mv}\vec{e}_\varrho$. Współczynnik $\frac{F_d}{mv}$ jest prędkością kątową, z jaką obraca się wektor $\vec{v}$. Mamy przecież w układzie biegunowym $\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varrho$. Przez analogię - częstością precesji wektora $\vec{L}$ jest $\omega_p = M/L$.

Analogia z ruchem po okręgu



Zauważmy, że ta analogia *nie wymaga* aby wektor $\vec{L}$ był związany z poruszającym się po okręgu punktem! Ważna jest tylko *zmiana kierunku* wektora $\vec{L}$.

Precesja żyroskopu - opis w układzie nieinercjalnym

Układ nieinercjalny to układ sztywno związany z obracającą się dźwignią - nie należy go wiązać z obracającym się wirnikiem żyroskopu! Równanie ruchu dla momentu pędu w tym układzie otrzymujemy z równania $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ transformując pochodną do układu nieinercjalnego:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}'}{dt} + \vec{\omega_p} \times \vec{L}' = \vec{M}.$$

W układzie obracającym się wraz z dźwignią moment pędu jest stały co do kierunku i wartości (w układzie inercjalnym - tylko co do wartości). Zatem,

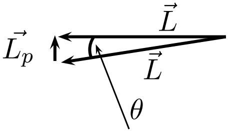
$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = 0 \qquad \text{czyli} \qquad \vec{\omega_p} \times \vec{L}' = \vec{M}.$$

Skąd, jak poprzednio,

$$\omega_p = \frac{M}{L}.$$

Przechylenie osi żyroskopu

Jeśli żyroskop (z kręcącym się wirnikiem, moment pędu L) jest początkowo zrównoważony (dźwignia jest pozioma), a następnie zwiększymy masę m_0 od Δm, to oprócz precesji z prędkością $\omega_p = M/L$ obserwujemy pochylenie dźwigni. Wynika to z *zasady zachowania momentu pędu*: początkowo moment pędu układu był równy $\vec{L}$, natomiast, gdy dźwignia się obraca, układ ma dodatkowy moment pędu $\vec{L}_p$ związany z precesją. Zatem, dla zachowania momentu pędu, dźwignia musi się pochylić. Kąt pochylenia θ jest równy w przybliżeniu L_p/L.



Energia kinetyczna ruchu obrotowego

$$E_k = \frac{1}{2}\sum_i \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i \Delta m_i(\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2$$

Korzystamy z tożsamości wektorowej:

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$$

skąd mamy $(\vec{\omega} \times \vec{r}'_i)^2 = \vec{\omega} \cdot (\vec{r}'_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i))$.

$$E_k = \frac{1}{2}\vec{\omega}\sum_i \Delta m_i[r'^2_i\vec{\omega} - \vec{r}'_i(\vec{r'}_i \cdot \vec{\omega})] = \frac{1}{2}\vec{\omega}\hat{I}\vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \vec{L}.$$

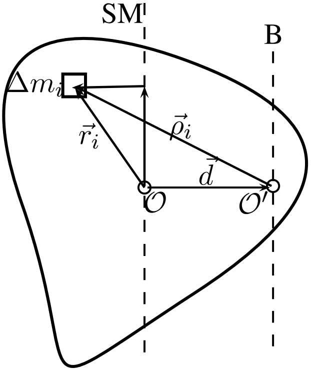
$$E_k = \frac{1}{2}(\omega_x^2 I_{xx} + \omega_y^2 I_{yy} + \omega_z^2 I_{zz} + 2\omega_x\omega_y I_{xy} + 2\omega_x\omega_z I_{xz} + 2\omega_y\omega_z I_{yz}).$$

W przypadku układu zgodnego z osiami głównymi:

$$E_k = \frac{1}{2}(\omega_x^2 I_{xx} + \omega_y^2 I_{yy} + \omega_z^2 I_{zz}).$$

Twierdzenie Steinera

Niech będzie dana oś SM przechodząca przez środek masy bryły sztywnej znajdujący się w punkcie $\mathcal{O}$ oraz równoległa do niej i oddalona o d oś B.



Twierdzenie Steinera

Jeśli moment bezwładności bryły sztywnej o masie M względem osi SM przechodzącej przez środek masy jest równy I_{SM}, to moment bezwładności względem osi B, równoległej do SM i oddalonej o d jest równy $I_B = I_{SM} + Md^2$.

UWAGA: oś B nie musi przechodzić przez bryłę sztywną.
Dowód:

$$I_B = \sum \Delta m_i \rho_{i,\perp}^2 = \sum \Delta m_i (\vec{r}_{i,\perp} - \vec{d})^2 =$$

$$= \sum \Delta m_i r_{i,\perp}^2 + Md^2 - 2\vec{d} \cdot \sum \Delta m_i \vec{r}_{i,\perp} =$$

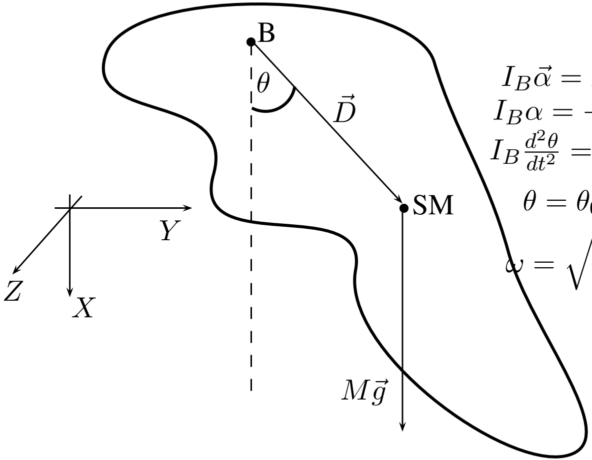
$$= I_{SM} + Md^2.$$

$$\vec{d} \cdot \sum \Delta m_i \vec{r}_{i,\perp} = \vec{d} \cdot \sum \Delta m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_{i,\parallel}) = 0 + 0 = 0.$$

Pierwszy składnik sumy jest równy zero, gdyż $\sum \Delta m_i \vec{r}_i / M$ jest położeniem środka masy względem środka masy. Drugi składnik jest równy zero, gdyż jest iloczynem skalarnym wektorów wzajemnie prostopadłych.

Wahadło fizyczne

Wahadło fizyczne waha się wokół osi, która *nie przechodzi* przez środek masy!



$$I_B\vec{\alpha} = \vec{D} \times M\vec{g}$$

$$I_B\alpha = -MgD\sin\theta$$

$$I_B\frac{d^2\theta}{dt^2} = -MgD\theta$$

$$\theta = \theta_0\cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{MgD}{I_B}} = \sqrt{\frac{MgD}{I_{SM}+MD^2}}$$

Wahadło zredukowane

Wahadło zredukowane jest to wahadło matematyczne, którego okres drgań jest taki, jak okres drgań danego wahadła fizycznego.

Wahadło fizyczne:

$$\omega = \sqrt{\frac{MgD}{I_{SM} + MD^2}}.$$

Wahadło matematyczne:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}.$$

Stąd

$$L = \frac{I_{SM} + MD^2}{MD} = D + \frac{I_{SM}}{MD} > D.$$

Praca momentu siły przy obrocie bryły wokół ustalonej osi

W przypadku ruchu wokół ustalonej osi, wszystkie punkty bryły poruszają się po okręgach. Pracę wykonuje tylko siła styczna do toru - okręgu (F_s), bo składowa normalna jest prostopadła do przesunięcia. Załóżmy, że siła jest przyłożona tylko w jednym punkcie bryły (np. na obwodzie walca), w odległości r od osi obrotu.

W czasie dt bryła obróciła się o $d\theta$. Punkt odległy o r od osi obrotu przybył drogę $ds = d\theta r$ z prędkością $v = \frac{ds}{dt} = \omega r$. W ogólności, siła F_s może zależeć od kąta: $F_s = F_s(\theta)$.

Praca wykonana przez siłę zewnętrzną jest równa $dW = d\theta r F_s(\theta) = M(\theta) d\theta$, czyli

$$W_{\theta_1 \to \theta_2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M(\theta) d\theta.$$

Równania Eulera

Równanie ruchu obrotowego w układzie inercjalnym $\mathcal{U}$ ma postać:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Przypuśćmy, że wybraliśmy osie układu $\mathcal{U}'$ zgodne z osiami głównymi bryły, a początek $\mathcal{O}'$ umieścilismy w środku masy bryły. W układzie $\mathcal{U}'$ równanie ruchu obrotowego ma postać:

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L}' = \vec{M}$$

W tym równaniu wszystkie wektory możemy przedstawić w postaci składowych na osiach układu $\mathcal{U}'$.

Równania Eulera

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L}' = \vec{M}$$

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_{x'} \\ \omega_{y'} \\ \omega_{z'} \end{bmatrix}, \qquad \vec{L}' = \hat{I}\vec{\omega} = I_{x'}\omega_{x'}\vec{e}_{x'} + I_{y'}\omega_{y'}\vec{e}_{y'} + I_{z'}\omega_{z'}\vec{e}_{z'}$$

$$\vec{\omega} \times \vec{L}' = \begin{vmatrix} \vec{e}_{x'} & \vec{e}_{y'} & \vec{e}_{z'} \\ \omega_{x'} & \omega_{y'} & \omega_{z'} \\ I_{x'}\omega_{x'} & I_{y'}\omega_{y'} & I_{z'}\omega_{z'} \end{vmatrix} = \begin{array}{c} (I_{z'} - I_{y'})\omega_{y'}\omega_{z'}\vec{e}_{x'} + \\ (I_{x'} - I_{z'})\omega_{x'}\omega_{z'}\vec{e}_{y'} + \\ (I_{y'} - I_{x'})\omega_{x'}\omega_{y'}\vec{e}_{z'} \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} I_{x'}\frac{d\omega_{x'}}{dt} + (I_{z'} - I_{y'})\omega_{y'}\omega_{z'} & = & M_{x'} \\ I_{y'}\frac{d\omega_{y'}}{dt} + (I_{x'} - I_{z'})\omega_{x'}\omega_{z'} & = & M_{y'} \\ I_{z'}\frac{d\omega_{z'}}{dt} + (I_{y'} - I_{x'})\omega_{x'}\omega_{y'} & = & M_{z'} \end{array} \right.$$

Zazwyczaj momenty bezwładności oraz momenty sił są znane, a szukamy $\vec{\omega}$.

Precesja prędkości kątowej swobodnej kuli

Rozważamy kulę, na którą nie działa moment siły.

Równania Eulera mają postać:

$$\frac{d\omega_i}{dt} = 0$$

dla każdej ze składowych prędkości kątowej.

Zatem, w tym przypadku $\vec{\omega} = \text{const.}$

Zauważmy, że wniosek ten jest słuszny także dla jednorodnego sześcianu, o ile obraca się on wokół jednej z osi głównych.

Precesja prędkości kątowej swobodnego bąka o symetrii walcowej

W tym przypadku, $I_{x'} = I_{y'} \neq I_{z'}$ i równania Eulera mają postać:

$$\begin{cases} I_{x'}\frac{d\omega_{x'}}{dt} + (I_{z'} - I_{y'})\omega_{y'}\omega_{z'} &= 0 \\ I_{x'}\frac{d\omega_{y'}}{dt} - (I_{z'} - I_{x'})\omega_{x'}\omega_{z'} &= 0 \\ \frac{d\omega_{z'}}{dt} &= 0 \end{cases}$$

Stąd mamy, że $\omega_{z'} = \text{const}$. Niech $\Omega = \frac{(I_{z'} - I_{x'})}{I_{x'}}\omega_{z'}$, wtedy

$$\begin{cases} \frac{d\omega_{x'}}{dt} + \Omega\omega_{y'} &= 0 \\ \frac{d\omega_{y'}}{dt} - \Omega\omega_{x'} &= 0 \end{cases}$$

skąd $\omega_{x'} = \omega_{x',0}\cos(\Omega t + \phi)$, $\omega_{y'} = \omega_{y',0}\sin(\Omega t + \phi)$

Wirująca swobodnie obręcz

Wiemy już, że w przypadku obręczy wirującej w taki sposób, że (środkowa) oś obrotu nie jest prostopadła do płaszczyzny obręczy, wektor momentu pędu $\vec{L}$ ma inny kierunek niż wektor prędkości kątowej $\vec{\omega}$ i z powodu niezerowego momentu sił w łożysku - obraca się wokół wektora prędkości kątowej.

A co będzie, gdy obręcz nie będzie zamocowana i będzie wirować wokół osi (środkowej) ustawionej pod kątem do płaszczyzny obręczy?

W takiej sytuacji nie działa moment sił, więc stały jest moment pędu, zatem wektor prędkości kątowej okrąża wektor momentu pędu.

Precesja momentu pędu bryły wirującej w polu grawitacyjnym

Niech będzie bryła sztywna podparta w jednym punkcie.

Jeśli bryła nie wiruje, to pod wpływem działania momentu siły ciężkości obraca się względem kierunku wskazywanego przez ten moment - się przewraca.

Jeśli zaś wiruje z prędkością kątową ω, to pod wpływem momentu siły następuje zmiana kierunku mmentu pędu (moment siły jest prostopadły do momentu pędu, więc zmienia jego kierunek, a nie wartość).