

Lorentza transformacja położenia i czasu

Zadanie 1 (transformacja Lorentza wprost i do niej odwrotna)

Zapisz transformację Lorentza za pomocą macierzy. Pokaż, że zmiana znaku parametru β , czyli zamiana $\beta \rightarrow -\beta$ prowadzi do macierzy transformacji odwrotnej.

Zadanie 2 („być między”)

Równoczesność jest pojęciem względnym w szczególnej teorii względności. A czy takim pojęciem jest „być między”, jak np. we frazie: „między dwoma domami stał płot” (mam na myśli trzy obiekty ustawione wzdłuż jednej linii)? Czy możliwym jest, że w pewnym układzie odniesienia płot może nie być między domami?

Zadanie 3 (pomiar prędkości światła w jedną stronę)

Dane są dwa zegary: A i B , identycznie odmierzające czas, tzn. jednostki czasu (np. sekundy) na obu zegarach trwają tyle samo, jeśli oba zegary spoczywają względem siebie. Wskazania zegarów można zerować, tzn. ustawiać ich wskazania na zero, za pomocą sygnału świetlnego. Niech będzie dany układ współrzędnych, w którym zegar A umieszczony jest w punkcie $x = 0$, a zegar B w punkcie $x = L$. Po między nimi, pośrodku, w punkcie O , ustawiono laser z systemem zwierciadeł umożliwiających jednoczesną emisję w przeciwnych kierunkach wiązek światła, w kierunku zegarów. W pewnej chwili zegary zsynchronizowano w taki sposób, że wysłano jednocześnie do obu wiązki światła, które po dotarciu do zegarów, powodują ustawienie wskazań zegarów na zero. Taka procedura synchronizacji zegarów równoważna jest oczywiście synchronizacji Einsteina-Poincaré. Przypuśćmy, o czym nie wiedzą obserwatorzy, że światło rozchodzi się z różnymi prędkościami: w kierunku dodatnim osi Ox z prędkością c_+ i prędkością c_- w kierunku ujemnym osi Ox . Pokaż, że przy takiej metodzie synchronizacji zegarów, pomiar prędkości światła między punktami A i B metodą czasu przelotu – czyli, jak by się wydawało, w jednym kierunku – daje w rezultacie wartość prędkości zależną od prędkości światła w obu kierunkach, czyli że pomiar prędkości c_+ lub c_- światła w jedną stronę, jest niemożliwy.

Zadanie 4 (transformacja czasu)

Kosmonauta, po zsynchronizowaniu swojego zegara z ziemskim, pędzi na Srebrny Glob z prędkością $\beta = 0,6c$. Jakie będzie wskazanie jego zegara w chwili dotarcia do celu? Odległość Księżyca od Ziemi wynosi $L = 1,2$ sekundy świetlne.

Zadanie 5 (transformacja położenia)

Kosmonauta, po zsynchronizowaniu swojego zegara z ziemskim, przeleciał wzdłuż Chińskiego Muru z prędkością $\beta = 0,8c$. Ile wnosi długość L Chińskiego Muru w układzie związanym z Ziemią, jeśli na zegarze kosmonauty czas przelotu trwał $T' = 15$ ms?

Zadanie 6 (transformacja Lorentza)

W początku układu odniesienia U związanego z Ziemią wystąpiły dwa zdarzenia w odstępnie czasowym $\Delta t = 0,8$ s. W układzie U' poruszającym się względem Ziemi odnotowano, że zdarzenia te oddzielał czas $\Delta t' = 0,9$ s. Z jaką prędkością porusza się układ U' względem układu U ? W jakiej odległości $\Delta x'$ od siebie zarejestrowano te zdarzenia w układzie U' ?

Zadanie 7 (transformacja czasu)

Dwa układy współrzędnych U' i U'' poruszają się wzdłuż osi Ox układu U z prędkościami $v' < v''$ względem tego układu. W układzie U zmierzono okres T czasu, w którym duża wskazówka zegara spoczywającego w układzie U' wykonała jeden obrót na tarczy. Podaj czas T'' tego okresu w układzie U'' .

Zadanie 8 (równoczesność)

Wzdłuż osi Ox układu U ustawione są trzy zsynchronizowane zegary A , B i C , rozmieszczone w punktach o współrzędnych $x_A = -L$, $x_B = 0$ oraz $x_C = L$, gdzie $L = 1,2 \cdot 10^9$ m. Względem tego układu, wzdłuż jego osi Ox i równoległe do niej, porusza się z prędkością v układ U' , w którym na osi X' spoczywają w równych odstępach trzy zsynchronizowane zegary A' , B' i C' ustawione w konfiguracji geometrycznej analogicznej do konfiguracji zegarów układu U , tj. $x'_{A'} < x'_{B'} < x'_{C'}$. Odległość między nimi jest tak dobrana, że mierzona w układzie U (nie U' !) także wynosi L . W chwili, gdy zegar B' mija zegar B , zegary układu U , jak również zegar B' , wskazują czas $t = 0$, zaś zegar C' wskazuje, mierzony w układzie U , czas $cT = 8 \cdot 10^8$ m. Jaki czas wskazuje, w tym momencie, zegar A' ? Z jaką prędkością v porusza się układ U' względem układu U ? Jakie są odległości między zegarami A' , B' i C' mierzone w układzie U' ? Jakie są wskazania wszystkich zegarów w układzie U' w momencie, gdy zegar B' mija zegar C' ?

Zadanie 9 (kontrakcja Lorentza)

Protony w akceleratorze LHC (w ośrodku CERN w Szwajcarii) poruszają się w paczkach i przelatują przez detektor co $T = 50$ ns. Prędkości protonów odpowiada współczynnik Lorentza $\gamma = 3500$. Ile wynosi odległość między paczkami protonów w ich układzie odniesienia?

Zadanie 10 (kontrakcja Lorentza)

Pociąg o długości L_0 w układzie własnym przejeżdża z prędkością β względem torów. Przy torach stoi nieruchomo zaciekawiony obserwator, ponieważ zadaje sobie pytanie: ile czasu T będzie trwał przejazd pociągu obok mnie?

Zadanie 11 (kontrakcja Lorentza)

Pociąg o długości L_0 w układzie własnym przejeżdża z prędkością β względem torów przez tunel o długości L_0 . Przy torach stoi nieruchomo znudzony obserwator, ponieważ zadaje nam pytanie, na które zna odpowiedź: ile czasu T będzie trwał przejazd pociągu przez tunel i co na ten temat powiedzą pasażerowie pociągu?

Zadanie 12 (kontrakcja Lorentza)

Pociąg podróżuje z prędkością $v = \beta c$ po torach, z którymi wiążemy układ odniesienia U , w którym to układzie długość tego pociągu, skrócona Lorentzowsko, wynosi L . Wzdłuż pociągu, zgodnie z jego kierunkiem jego jazdy, przelatuje rakietą z prędkością $u = \beta c$. Z rakieta wiążemy układ odniesienia U' . Jaką długość pociągu zmierzają obserwatorzy związani z rakieta? Rozwiąż zadanie bez odwoływania się do transformacji prędkości.

Zadanie 13 (transformacja czasu)

Układ U wiążemy z dwiema, nieruchomymi w tym układzie, żarówki odległymi od siebie o $L = 10$ km. Żarówki te wysyłają jednocześnie, w układzie U , błysk świtała. Układ U' wiążemy z relatywistycznym latającym dywanem poruszającym się z prędkością $v = 3 \cdot 10^7$ m/s w kierunku od jednej żarówki do drugiej. Dywan ten, w momencie kiedy żarówki błysnęły, znajdował się dokładnie w środku między nimi. Jaki odstęp czasu odnotują obserwatorzy związani z dywanem? Która z żarówek wg nich błysnęła jako pierwsza? Z jaką prędkością powinien poruszać się dywan, aby w jego układzie odniesienia błyski były jednocześnie?

Zadanie 14 (transformacja czasu – indywidualny widz)

Układ U wiążemy z dwiema, nieruchomymi w tym układzie, żarówki odległymi od siebie o $L = 10$ km. Żarówki te wysyłają jednocześnie, w układzie U , błysk świtała. Układ U' wiążemy z relatywistycznym latającym dywanem poruszającym się z prędkością $v = 3 \cdot 10^7$ m/s w kierunku od jednej żarówki do drugiej. Błyski te obserwowane są przez indywidualnego widza na relatywistycznym latającym dywanie poruszającym się z prędkością $v = 3 \cdot 10^7$ m/s w kierunku od jednej żarówki do drugiej. Dywan ten, w momencie kiedy żarówki błysnęły, znajdował się dokładnie w środku odległości między nimi. Która z żarówek wg widza błysnęła pierwsza? Jaki odstęp czasu między błyskami on odnotuje?

Zadanie 15 (efekt Dopplera)

Relatywistyczny pociąg o długości $L_0 = 200$ m porusza się po prostych torach z prędkością $V = 0,6 c$. Z pociągiem wiążemy układ odniesienia U' , a z peronem układ odniesienia U . W chwili, gdy lokomotywa mija pojedynczego widza – dróżnika stojącego na peronie, pasażerowie znajdujący się na obu końcach pociągu wysyłają do niego sygnał świetlny. Jaki odstęp T czasu między otrzymanymi sygnałami zmierzy dróżnik? A jaki odstęp czasu zmierzy on, jeśli obserwatorzy wysłają sygnał świetlny w momencie, gdy mija go ostatni wagon?

Zadanie 16 (efekt Dopplera)

Automatyczna stacja kosmiczna została wysłana w celu zbadania planety, krążącej wokół gwiazdy X i powrotu na Ziemię. Zainstalowany na stacji system przez cały czas podróży przekazuje na Ziemi komunikaty w jednakowych odstępach czasu pokładowego. Po uzyskaniu na Ziemi sygnału o wyruszeniu stacji w drogę powrotną, częstość komunikatów odbieranych przez naziemną stację obsługi lotu zwiększyła się $k = 4$ razy w stosunku do częstości sygnałów otrzymywanych ze stacji w drodze na planetę.

- Oblicz prędkość lotu stacji. Zakładamy, że stacja leciała w obie strony z tą samą prędkością.
- Stacja powróciła na Ziemię po sześciu latach od chwili odebrania komunikatów z planety. Jak długo nie było stacji na Ziemi?
- Jak długo trwał lot według wskazań zegara pokładowego? Zakładamy, że czas pobytu stacji na planecie był pomijalnie krótki.

Zadanie 17 (przesunięcie ku czerwieni)

W astrofizyce, przesunięcie ku czerwieni dla światła dobiegającego do nas od odległego obiektu, np. galaktyki, oznaczane jest symbolem z i definiowane jest następująco:

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0},$$

gdzie λ_0 jest długością fali światła mierzona w układzie obiektu ją wysyłającego, natomiast λ to długość fali jaką zmierzy pojedynczy widz, względem którego obiekt się porusza. Wyraż tę wielkość przez prędkość obiektu. Obecnie, jedna z najbardziej odległych galaktyk astronomicznie charakteryzuje się przesunięciem ku czerwieni o wartości 11,1. Z jaką prędkością oddala się od nas ten obiekt?

Zadanie 18 (przesunięcie ku czerwieni)

Długość λ_0 fali linii widmowej zwanej H_α wynosi 656,1 nm, zaś mierzone na Ziemi długości tych fal emitowane z przeciwnych krańców równika słonecznego różnią się o $2\Delta\lambda = 0,9$ nm. Przyjmując, że przyczyną tej różnicy jest rotacja zewnętrznych warstw Słońca, wyznacz okres T tej rotacji. Promień R Słońca wynosi $7 \cdot 10^5$ km.

Zadanie 19 (zegar prętowy)

Na jednym końcu pręta o długości L umieszczone jest źródło światła, a na drugim zwierciadło. Pręt porusza się z prędkością v w kierunku wyznaczonym przez własną oś, zwierciadłem do przodu, względem układu U obserwatorów. W pewnym momencie źródło światła wysła bardzo krótki błysk w kierunku zwierciadła. Po jakim czasie, w układzie związanym z prętem, impuls dotrze do zwierciadła i po jakim czasie powróci do źródła? Jakie odstęp czasu zmierzą obserwatorzy w układzie U ? Jaką drogę w tym czasie pokona źródło światła w układzie U ?

Zadanie 20 (transformacja Lorentza)

Po relatywistycznym Dzikim Zachodzie jedzie pociąg o długości $L = 1,8 \cdot 10^6$ km z prędkością $v = 0,8c$. Na końcu pociągu stoi szeryf, który strzela z rewolweru w kierunku do lokomotywy w momencie, gdy mija on załom skalny, za którym ukryty jest Indianin. Prędkość u pocisku w układzie szeryfa wynosi $0,6c$. Po jakim czasie mierzonym w układzie szeryfa pocisk doleci do lokomotywy i jaką drogę pokona? Po jakim czasie mierzonym w układzie Indianina pocisk doleci do lokomotywy i jaką drogę pokona?

Zadanie 21 (transformacja Lorentza)

Student przystępuje do egzaminu ze szczególnej teorii względności. Profesor, po wręczeniu tematu, udaje się w podróż ze stałą prędkością $v = 0,97c$ względem studenta. Odmierzwszy na swym zegarku jedną godzinę, wysła studentowi sygnał świetlny, po odebraniu którego student natychmiast wręcza swą pracę asystentowi poruszającemu się względem niego z prędkością $u = 0,99c$. Asystent poprawia zadanie i dogoniwszy profesora wręcza mu poprawioną pracę. Ile czasu, we własnym układzie odniesienia, miał student na rozwiązanie zadania? Ile czasu, w układzie profesora, miał asystent na poprawienie zadania?

Zadanie 22 (transformacja Lorentza)

Dane są dwa zegary: A i B , identycznie odmierzające czas tzn. jednostki czasu (np. sekundy) na obu zegarach trwają tyle samo, gdy zegary te spoczywają względem siebie. Zegary można resetować, tzn. ustawiać na zero, za pomocą sygnału świetlnego. Niech będzie dany układ odniesienia U związany z układem współrzędnych, w którym zegar A umieszczony jest w punkcie $x = 0$ a zegar B w punkcie $x = L$, gdzie $L = 100$ m. Pośrodku, pomiędzy nimi, ustawiono laser emitujący w przeciwnych kierunkach dwie wiązki światła, docierające do obu zegarów. W pewnej chwili zegary zsynchronizowano w taki sposób, że wysłano jednocześnie do obu wiązki światła, które spowodowały ustawienie ich wskazań na zero. W tej samej chwili oba zegary zaczęły się poruszać w kierunku dodatnim osi Ox z prędkościami wynoszącymi odpowiednio $v_A = 200$ m/s i $v_B = 100$ m/s. Wyznacz wskazania obu zegarów w chwili znalezienia się w tym samym punkcie osi Ox .

Lorentza transformacja prędkości

Zadanie 23 (transformacja prędkości)

Wychodząc z zasady bezwładności i transformacji Lorentza wyprowadź relatywistyczne prawo dodawania prędkości.

Zadanie 24 (transformacja prędkości)

Wykonując podwójną transformację Lorentza: z układu U'' do układu U' , a następnie z układu U' do układu U , wyprowadź relatywistyczne prawo dodawania prędkości. Przyjmij, że układu U'' porusza się względem U' z prędkością u , zaś układ U' względem układu U z prędkością v .

Zadanie 25 (aberracja światła)

W 1729 roku astronom angielski J. Bradley na spotkaniu Royal Society (Phil. Trans. XXXV, 637) przedstawił wynik swych obliczeń prędkości światła. Odwoływały się one do jego obserwacji astronomicznych, z których wynikało, że w przypadku, gdy kierunek do gwiazdy jest prostopadły do wektora prędkości Ziemi w jej ruchu wokół Słońca, gwiazda w ciągu roku na nieboskłonie zatacza okrąg o kątowym promieniu $\alpha \approx 0,005^\circ$. Bradley nazwał to zjawisko aberracją gwiazdową i uznał, że ruch ten jest pozorny, gdyż wynika ze skończonej prędkości światła. Aberrację najłatwiej jest zrozumieć na przykładzie obserwacji kropel deszczu spadających przy bezwietrznej pogodzie. Jeśli jesteśmy w spoczynku względem powietrza, to widzimy, że spadają one pionowo. Jeśli jednak poruszamy się względem powietrza, na przykład siedząc w pociągu, to zauważymy, że kierunek ruchu kropli odchyła się od pionu o pewien kąt. Wytlumacz zjawisko aberracji gwiazdowej na gruncie szczególnej teorii względności i wyznacz prędkość światła jaka wynika z pomiarów Bradleya, jeśli prędkość v Ziemi na orbicie słonecznej wynosi około 30 km/s.

Kinematyka relatywistyczna

Zadanie 26 (rozpad cząstki Λ)

Nietrwąca cząstka Λ o masie $m_\Lambda = 1115 \text{ MeV}/c^2$ rozpada się w spoczynku na proton o masie spoczynkowej $m_p = 938 \text{ MeV}/c^2$ i pion π^- o masie spoczynkowej $m_\pi = 140 \text{ MeV}/c^2$. Wyznacz czynniki lorentzowskie, pędy i energie produktów rozpadu.

Zadanie 27 (anihilacja protonów)

Proton i antyproton, cząstki elementarne o tej samej masie spoczynkowej $m_p = 940 \text{ MeV}/c^2$, anihilują w spoczynku, produkując mezon π^+ i mezon π^- , każdy o masie spoczynkowej $m_\pi = 140 \text{ MeV}/c^2$. Jaka oczekiwana drogę przebędzie każdy z nich, jeśli oczekiwany czas życia τ mezonów π^+ i π^- , mierzony w układzie własnym każdego z nich, jest taki sam i wynosi $2,6 \cdot 10^{-8} \text{ s}$?

Zadanie 28 (transformacja Lorentza pędu i energii)

Wielkość η , zwana popieszczością, używana jest do opisu cząstek produktów powstałych w wyniku reakcji w zderzeniach cząstek i jader atomowych. Dla pojedynczej cząstki powstającej w wyniku takiej reakcji, definiowana jest ona związkiem:

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \frac{E + cp_x}{E - cp_x},$$

gdzie E jest energią tej cząstki, zaś p_x składową jej pędu rzutowaną na kierunek lotu cząstki pocisku. Znajdź prawo transformacji popieszczości przy przejściu do nowego układu odniesienia, poruszającego się z prędkością v wzdłuż kierunku lotu pocisku.

Zadanie 29 (prostokątny efekt Dopplera)

Z prawa transformacji energii i związku $E = hv$ między energią a częstotliwością światła, wyprowadź wyrażenie na efekt Dopplera. Jeśli obiekt wysyłający światło porusza się pod kątem prostym do kierunku obserwacji to światło będzie bardziej czerwone czy też bardziej niebieskie?

Zadanie 30 (rozpad na trzy i więcej ciał)

W przypadku rozpadu na dwa ciała, zasady zachowania pędu i energii determinują pędy i energie produktów rozpadu w układzie cząstki rozpadającej się. Czy w rozpadzie na trzy ciała te same zasady jednoznacznie określają pędy i energie produktów rozpadu? Jeśli nie, to ile swobodnych wielkości wtedy występuje? A jak się rzecz będzie miała w przypadku rozpadu na n ciał?

Zadanie 31 (rozłot)

Rozważ elastyczne rozpraszanie relatywistycznej cząstki o masie m , pędzie p i energii E na spoczywającej cząstce o identycznej masie jak cząstka padająca. Wyznacz zakres kątów między wektorami pędu (kątów „rozłotu”) cząstek po zderzeniu. Porównaj z przypadkiem nierelatywistycznym.

Zadanie 32 (oddziaływanie mezonu K^-)

W wyniku oddziaływania mezonu K^- o masie $m_K = 494 \text{ MeV}/c^2$ z protonem o masie $m_p = 938 \text{ MeV}/c^2$ mogą, obok rozpraszania elastycznego, zajść wypisane poniżej reakcje wraz z masami uczestniczących cząstek. Jaka jest energia progowa każdej z tych reakcji, jeśli mezon K^- zderza się ze spoczywającym protonem?

$$\begin{aligned} K^- p &\rightarrow \Lambda \pi^0, & m_\Lambda &= 1115 \text{ MeV}/c^2, & m_{\pi^0} &= 135 \text{ MeV}/c^2, \\ K^- p &\rightarrow \Sigma^+ \pi^-, & m_{\Sigma^+} &= 1189 \text{ MeV}/c^2, & m_{\pi^-} &= 140 \text{ MeV}/c^2, \\ K^- p &\rightarrow \Sigma^0 \pi^0, & m_{\Sigma^0} &= 1192 \text{ MeV}/c^2, & m_{\pi^0} &= 135 \text{ MeV}/c^2, \\ K^- p &\rightarrow \Sigma^- \pi^+, & m_{\Sigma^-} &= 1197 \text{ MeV}/c^2, & m_{\pi^+} &= 140 \text{ MeV}/c^2, \\ K^- p &\rightarrow n K^0, & m_n &= 939 \text{ MeV}/c^2, & m_{K^0} &= 498 \text{ MeV}/c^2. \end{aligned}$$

Zadanie 33 (dopuszczalne procesy)

Czy swobodny proton o masie spoczynkowej $m = 940 \text{ MeV}/c^2$ rozpędzony do prędkości $v = 0,99999c$ może oddać część swojej energii, emitując foton o długości fali $\lambda = 1 \text{ nm}$?

Efekt Comptona

Zadanie 34 (wysokoenergetyczne fotony)

Rozpraszanie fotonów na wysokoenergetycznej wiązce elektronów, to sposób na uzyskanie intensywnej wiązki fotonów wysokiej energii. W jednym z eksperymentów (Il Nuovo Cimento, **59B**, (1980), 247) laserową wiązkę fotonów o długości fali $\lambda = 5145 \text{ \AA}$ skierowano na przeciwbiebną wiązkę elektronów o masie spoczynkowej $m = 0,5 \text{ MeV}/c^2$ i energii całkowitej $E_e = 1,5 \text{ GeV}$. Wyznacz maksymalną energię fotonów, jaką można było uzyskać w takim eksperymencie.

Zadanie 35 (odrzut)

Atom w stanie podstawowym ma masę m zaś w stanie wzbudzonym masę M .

a) Wyznacz energię E_f emitowanego fotonu przy deekscytacji spoczywającego atomu.

- b) Ile wynosiłaby energia fotonu, gdyby atom był nieskończenie ciężki?
- c) Wyznacz energię kinetyczną T atomu po wyemitowaniu fotonu. Porównaj z energią fotonu.
- d) Oblicz energię E_f fotonu i prędkość v atomu wodoru po emisji, jeśli atom ma masę $m = 1 \text{ GeV}$, zaś $\Delta m = M - m$ mas odpowiada energii 10 eV.