

Optyka kwantowa

Jan Chwedeńczuk

Na podstawie: Scully & Zubairy "Quantum Optics", Cambridge 1997

Spis treści

1	Kwantowanie pola elektromagnetycznego	5
1.1	Energia swobodnego pola elektromagnetycznego	5
1.1.1	Przypadek jednowymiarowy	6
1.2	Kwantowanie przez dostawienie daszków	7
1.3	Przestrzeń Hilberta — stany Focka	8
2	Stany koherentne i stany ściśnięte	11
2.1	Pole od klasycznego prądu	11
2.2	Stan koherentny inaczej	12
2.2.1	Operator przesunięcia	13
2.3	Czemu koherentny jest koherentny	13
2.4	Własności stanu koherentnego	14
2.5	Stany ściśnięte	15
2.5.1	Ściskanie wielomodowe	17
3	Metody przestrzeni fazowej	19
3.1	P -reprezentacja Glaubera	20
3.1.1	P -reprezentacja — przykłady	23
3.2	Q -reprezentacja	24
3.2.1	Q -reprezentacja — przykłady	25
3.3	Funkcja Wignera-Weyla	27
3.4	Reprezentacje uogólnione	29
4	Interferometria i spójność	31
4.1	Interferometr typu Hanbury–Brown & Twiss	31
4.2	Funkcje korelacji pola elektromagnetycznego	32
4.3	Spójność pierwszego rzędu i doświadczenie Younga	35
4.4	Spójność drugiego rzędu	37
4.5	Detekcja homodynowa	37
4.5.1	Zwykła detekcja homodynowa	38
4.5.2	Zbalansowana detekcja homodynowa	39
4.5.3	Pomiar fazy — interferometr Macha-Zehndera	39
4.6	Kryteria nieklasyczności dla $G^{(2)}$	40
4.6.1	Pole dwumodowe	40
4.6.2	Nierówność Cauchy-Schwarza	41
4.6.3	Kryterium pochodzące z wariancji	42

5	Oddziaływanie światła z materią — półklasycznie	45
5.1	Hamiltonian oddziaływania	45
5.1.1	Niezmienniczość ze względu na cechowanie a Hamiltonian minimalnego sprzężenia	45
5.1.2	Przybliżenie dipolowe i Hamiltonian $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$	46
5.2	Oddziaływanie atomu dwupoziomowego z monochromatyczną falą	47
5.2.1	Obraz oddziaływania	49
6	Oddziaływanie światła z materią — kwantowo	51
6.1	Oddziaływanie atomu dwupoziomowego z polem jednomodowym	52
6.1.1	“Collapse and revival”	54
6.1.2	Rozwiązanie przez równanie Heisenberga	54
6.1.3	Rozwiązanie przez operator ewolucji	55
6.2	Emisja spontaniczna	56
6.2.1	Stan światła	58
6.3	Kaskady dwufotonowe	59
7	Tłumienie — metoda Heisenberga-Langevina	61
7.1	Tłumienie przez sprzężenie z rezerwuarem oscylatorów	61
7.1.1	Dynamika korelacji pola	64
7.1.2	Twierdzenie fluktuacyjno-dysypacyjne i związek Einsteina	65
7.2	Atom we wnęce z tłumieniem	66
8	Parametryczny podział częstości	69
8.1	Parametryczny podział częstości w kryształach nieliniowych	69
8.2	Ściskanie we wnęce rezonansowej	70
8.2.1	Ściskanie pola wyciekającego z wnęki	73
8.3	Mieszanie czterech fal	75
8.3.1	Ściskanie w procesie mieszania czterech fal	75
9	Paradoks EPR, nierówności Bella, nielokalność	77

Rozdział 1

Kwantowanie pola elektromagnetycznego

W tym rozdziale przedstawimy tradycyjną metodę kwantowania swobodnego pola elektromagnetycznego. Zaczniemy od klasycznych pól: elektrycznego i magnetycznego, spełniających swobodne równania Maxwella w próżni. Wyprowadzimy wyrażenie na energię swobodnego pola, a następnie, bazując na analogii do Hamiltonianu oscylatora harmonicznego, dokonamy kwantowania pola.

1.1 Energia swobodnego pola elektromagnetycznego

Punktem wyjściowym naszych rozważań jest zestaw czterech równań Maxwella

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (1.1d)$$

gdzie $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ oraz $\mu_0 \epsilon_0 = c^{-2}$. Poprzez przemnożenie wektorowo przez ∇ równania (1.1a), czyli przez policzenie stronami rotacji tego równania, otrzymujemy

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (1.2)$$

czyli równanie falowe. Wyprowadzając to równanie skorzystaliśmy ze związku $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$, gdzie \mathbf{A} jest dowolnym, dwukrotnie różniczkowalnym polem wektorowym. Rozwiązanie tego równania jest postaci

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)}, \quad (1.3)$$

gdzie $\mathbf{e}_{\mathbf{k}}$ jest jednostkowym wektorem polaryzacji, spełniającym $\mathbf{e}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} = 0$, zaś $\mathcal{E}_{\mathbf{k}}$ jest amplitudą pola elektrycznego. Związek dyspersyjny łączący częstotliwość

ω_k z wektorem falowym \mathbf{k} dla swobodnego pola jest postaci $\omega_k = |\mathbf{k}|c$. Ponieważ równanie jest liniowe, w ogólności jego rozwiązanie będzie złożeniem rozwiązań postaci (1.3), czyli

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \mathbf{e}_{\mathbf{k}, \sigma} \mathcal{E}_{\mathbf{k}, \sigma} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)}, \quad (1.4)$$

gdzie σ oznacza dwie możliwe polaryzacje ortogonalne do wektora \mathbf{k} . Dla kompletu, wypiszmy wyrażenie na pole \mathbf{H} , które otrzymuje się poprzez wstawienie (1.4) do (1.1b) i odcałkowanie rezultatu po czasie. W wyniku tej procedury otrzymujemy

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}, \sigma}}{\omega_k} \mathcal{E}_{\mathbf{k}, \sigma} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)}. \quad (1.5)$$

1.1.1 Przypadek jednowymiarowy

Dla uproszczenia rozważymy teraz przypadek jednowymiarowy, gdy pole elektryczne ograniczone jest wewnątrz wnęki rezonansowej o długości L zorientowanej wzdłuż osi z . Załóżmy ponadto, że pole spolaryzowane jest wzdłuż osi x . Korzystając z warunków zerowania się pola na brzegach wnęki, otrzymujemy

$$E_x(z, t) = \sum_n A_n q_n(t) \sin(k_n z), \quad \text{gdzie } k_n = n \frac{\pi}{L}. \quad (1.6)$$

Zauważmy, że zależność od położenia w postaci $\sin(k_n z)$ wymuszona jest warunkami brzegowymi. Ponieważ równanie falowe jest liniowe, nie określa ono wartości stałych A_n .

Następnie, wyznaczmy pole \mathbf{H} . Jako że pola \mathbf{E} i \mathbf{H} są prostopadłe, a ponadto każde z nich jest prostopadłe do wektora falowego (skierowanego wzdłuż osi z w naszym przypadku), zatem pole \mathbf{H} we wnęce może mieć jedynie składową wzdłuż osi y . Korzystając z równania (1.1a) otrzymujemy

$$H_y(z, t) = \sum_n A_n \frac{\dot{q}_n(t) \epsilon_0}{k_n} \cos(k_n z), \quad (1.7)$$

gdzie $\dot{}$ oznacza pochodną czasową.

W kolejnym kroku wyznaczmy energię pola elektromagnetycznego, daną w naszym przypadku przez wyrażenie

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int_V d\mathbf{r} \left(\epsilon_0 E_x^2(z, t) + \mu_0 H_y^2(z, t) \right). \quad (1.8)$$

Obszar V po którym całkujemy ma długość L wzdłuż z oraz poprzeczną powierzchnię S . Podstawiając do \mathcal{H} równania (1.6) i (1.7) otrzymujemy

$$\mathcal{H} = \frac{V}{4} \sum_n A_n^2 \left(\epsilon_0 q_n^2(t) + \frac{\mu_0 \epsilon_0^2}{k_n^2} \dot{q}_n^2(t) \right). \quad (1.9)$$

Następnie, dobieramy A_n w postaci (przypominamy, że równanie falowe jest liniowe, więc mamy tu pełną dowolność):

$$A_n = \left(\frac{2m_n}{V \epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} \omega_n, \quad (1.10)$$

co daje

$$\mathcal{H} = \sum_n \left(\frac{1}{2} m_n \dot{q}_n^2 + \frac{1}{2} m_n \omega_n^2 q_n^2(t) \right). \quad (1.11)$$

Oznaczając $p_n = m_n \dot{q}_n$, dostajemy

$$\mathcal{H} = \sum_n \left(\frac{p_n^2}{2m_n} + \frac{1}{2} m_n \omega_n^2 q_n^2 \right). \quad (1.12)$$

Jeżeli q_n dobierzemy tak, by miało wymiar długości, analiza wymiarowa pokazuje, że m_n ma wymiar masy, co uzasadnia oznaczenie.

Widzimy zatem, że energia pola elektromagnetycznego we wnęce rezonansowej jest tożsama z energią zbioru oscylatorów harmoniczych. Analogia ta pozwoli nam na zapostulowanie rozsądnej metody kwantowania pola elektromagnetycznego.

1.2 Kwantowanie przez dostawienie daszków

Przypomnijmy, że dla pojedynczej cząstki o masie m umieszczonej w potencjale harmonicznym o częstotliwości ω , klasyczny Hamiltonian jest postaci

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2. \quad (1.13)$$

Kwantowy odpowiednik tego wyrażenia to

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{q}^2. \quad (1.14)$$

Zatem wyrażenie (1.14) otrzymuje się poprzez dodanie daszków zmiennym dynamicznym z równania (1.13) (teraz to są operatory hermitowskie działające na elementy przestrzeni Hilberta cząstki), oraz (co nie mniej istotne!) podanie reguły komutacyjnej $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$. Poprzez analogię, postulujemy, że Hamiltonian swobodnego skwantowanego pola elektromagnetycznego będzie następującą modyfikacją równania (1.12):

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_n \left(\frac{\hat{p}_n^2}{2m_n} + \frac{1}{2} m_n \omega_n^2 \hat{q}_n^2 \right) \quad (1.15)$$

z regułami komutacyjnymi

$$[\hat{q}_n, \hat{p}_m] = i\hbar \delta_{nm}. \quad (1.16)$$

Kolejnym krokiem jest wprowadzenie operatorów kreacji i anihilacji. W tym celu, zdefiniujemy oscylatorową jednostkę długości stowarzyszoną z n -tym modem, $\xi_n = \left(\frac{\hbar}{m_n \omega_n} \right)^{\frac{1}{2}}$. Operator anihilacji dany jest wzorem

$$\hat{a}_n e^{-i\omega_n t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\hat{x}_n}{\xi_n} + i\xi_n \frac{\hat{p}_n}{\hbar} \right), \quad (1.17)$$

zaś operator kreacji jest jego hermitowskim sprzężeniem. Reguła komutacyjna, wynikająca z (1.16), to $[\hat{a}_n, \hat{a}_m^\dagger] = \delta_{nm}$. Hamiltonian (1.15), wyrażony w języku nowych operatorów przyjmuje znaną postać

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_n \hbar\omega_n \left(\hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n + \frac{1}{2} \right). \quad (1.18)$$

Dla kompletu, przywołajmy postać pól elektrycznego i magnetycznego po skwantowaniu. Mianowicie, korzystając z równań (1.6), (1.7) oraz transformacji (1.17), otrzymujemy

$$E_x(z, t) = \sum_n \mathcal{E}_n (\hat{a}_n e^{-i\omega_n t} + \hat{a}_n^\dagger e^{i\omega_n t}) \sin(k_n z), \quad (1.19a)$$

$$H_y(z, t) = -i\epsilon_0 c \sum_n \mathcal{E}_n (\hat{a}_n e^{-i\omega_n t} - \hat{a}_n^\dagger e^{i\omega_n t}) \cos(k_n z), \quad (1.19b)$$

gdzie amplituda $\mathcal{E}_n = \left(\frac{\hbar\omega_n}{\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}}$ ma wymiar pola elektrycznego.

Trzy wymiary

Poprzez analogię do zagadnienia jednowymiarowego, możemy podać postać skwantowanego pola elektrycznego i magnetycznego w trzech wymiarach,

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \mathbf{e}_{\mathbf{k}, \sigma} \mathcal{E}_{\mathbf{k}, \sigma} \hat{a}_{\mathbf{k}, \sigma} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)} + \text{H.c} \equiv \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \quad (1.20a)$$

$$\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}, \sigma}}{\omega_k} \mathcal{E}_{\mathbf{k}, \sigma} \hat{a}_{\mathbf{k}, \sigma} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)} + \text{H.c} \equiv \hat{\mathbf{H}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{H}}^{(-)}(\mathbf{r}, t). \quad (1.20b)$$

Rozkład na część o dodatniej i ujemnej częstotliwości (czyli na część ewoluującą w czasie jak $e^{-i\omega_k t}$ oraz $e^{i\omega_k t}$) będzie przydatny w dalszych rozważaniach. Hamiltonian swobodnego pola elektrycznego i magnetycznego jest postaci

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}, \sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}, \sigma} + \frac{1}{2} \right). \quad (1.21)$$

1.3 Przestrzeń Hilberta — stany Focka

Powtórzmy teraz rachunek znany z wstępnego kursu z mechaniki kwantowej — wykażemy mianowicie, że przestrzeń Hilberta oscylatora harmonicznego rozpinana jest przez stany o ustalonej liczbie fotonów (wzbudzeń pola elektromagnetycznego), zwane stanami Focka. W tym celu rozważmy Hamiltonian dla jednego modu, czyli

$$\hat{\mathcal{H}} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right). \quad (1.22)$$

Oznaczmy przez $|n\rangle$ stan własny $\hat{\mathcal{H}}$, czyli stan o ustalonej energii, spełniający

$$\hat{\mathcal{H}}|n\rangle = E_n |n\rangle. \quad (1.23)$$

Zauważmy, że bezpośrednio z reguł komutacyjnych wynika, że

$$\hat{\mathcal{H}}(\hat{a}|n\rangle) = (E_n - \hbar\omega)\hat{a}|n\rangle. \quad (1.24)$$

Zatem wektor $\hat{a}|n\rangle$ również jest wektorem własnym (nie stanem, bo w ogólności nie jest unormowany), operatora $\hat{\mathcal{H}}$, zaś odpowiadająca mu energia jest o $\hbar\omega$ mniejsza od E_n . W szczególności, istnieje stan podstawowy $|0\rangle$ o energii E_0 . Dla niego, związek powyższy ma postać

$$\hat{\mathcal{H}}(\hat{a}|0\rangle) = (E_0 - \hbar\omega)\hat{a}|0\rangle. \quad (1.25)$$

Ponieważ $|0\rangle$ jest stanem podstawowym, nie może istnieć stan $\hat{a}|0\rangle$ o energii o $\hbar\omega$ niższej od niego. Stąd wnioskujemy, że powyższą równość można spełnić tylko wtedy, gdy $\hat{a}|0\rangle \equiv 0$. Zatem, korzystając z równania (1.23), otrzymujemy

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega. \quad (1.26)$$

Następnie, reguła (1.24) zastosowana n -krotnie daje znane wyrażenie

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (1.27)$$

Zatem energie własne oddalone są o $\hbar\omega$, stąd możemy napisać, że wektor $\hat{a}|n\rangle$, który na mocy (1.24) daje energię o $\hbar\omega$ niższą od $|n\rangle$, jest postaci

$$\hat{a}|n\rangle = \alpha_n |n-1\rangle, \quad (1.28)$$

gdzie α_n jest stałą normalizacyjną. Mamy

$$\langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = n = |\alpha_n|^2. \quad (1.29)$$

Stąd, z dokładnością do fazy, $\alpha_n = \sqrt{n}$. Analogiczny rachunek przeprowadzony dla operatora kreacji, daje komplet związków

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad (1.30a)$$

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \quad (1.30b)$$

Przestrzeń Hilberta jest zatem rozpięta przez stany $|n\rangle$, które tworzą bazę zupełną

$$\hat{1} = \sum_n |n\rangle\langle n|. \quad (1.31)$$

Wyniki te można uogólnić na przypadek wielomodowy i trójwymiarowy. Stanem własnym operatora $\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}$ jest $|n_{\mathbf{k},\sigma}\rangle$, zaś wektory własne rozpinające przestrzeń Hilberta

$$\mathbb{H} = \bigotimes_{\mathbf{k},\sigma} \mathbb{H}_{\mathbf{k},\sigma} \quad (1.32)$$

są postaci

$$|\{n\}\rangle = \bigotimes_{\mathbf{k},\sigma} |n_{\mathbf{k},\sigma}\rangle, \quad (1.33)$$

gdzie $|\{n\}\rangle$ oznacza n_1 wzbudzeń modu \mathbf{k}_1, σ_1 , i tak dalej.

Wracając do przypadku jednomodowego, gdy pole elektryczne jest postaci

$$\hat{E}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E} \hat{a} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + \text{H.c.} \quad (1.34)$$

Oznacza to, że średnia wartość pola na stanie $|n\rangle$ wynosi

$$\langle n | \hat{E}(\mathbf{r}, t) | n \rangle = 0. \quad (1.35)$$

Lecz, co ciekawe, średnia wartość kwadratu operatora pola nie jest zerowa,

$$\langle n | \hat{E}^2(\mathbf{r}, t) | n \rangle = 2|\mathcal{E}|^2 \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (1.36)$$

W szczególności w stanie próżni, mamy

$$\langle 0 | \hat{E}^2(\mathbf{r}, t) | 0 \rangle = |\mathcal{E}|^2. \quad (1.37)$$

Zatem fluktuacje pola elektrycznego (jak i magnetycznego), w stanie próżni są niezerowe

$$\langle (\Delta \hat{E}(\mathbf{r}, t)) \rangle^2 = \langle \hat{E}^2(\mathbf{r}, t) \rangle - \langle \hat{E}(\mathbf{r}, t) \rangle^2 = |\mathcal{E}|^2. \quad (1.38)$$

Fakt ten — niezerowe *fluktuacje próżni* elektromagnetycznej — prowadzi do licznych konsekwencji, których badania należą do dziedziny elektrodynamiki kwantowej. W jednym z następných rozdziałów wykażemy, że zjawisko to prowadzi do emisji spontanicznej atomów.

Rozdział 2

Stany koherentne i stany ściśnięte

W tym rozdziale wprowadzimy stany koherentne pola elektromagnetycznego — rodzinę stanów kwantowych, które w największym możliwym stopniu odtwarzają klasyczne promieniowanie elektromagnetyczne.

2.1 Pole od klasycznego prądu

Rozważmy klasyczne źródło promieniowania elektromagnetycznego. Klasyczne, czyli opisywane c-liczbowym prądem $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$, a nie skwantowanym operatorem $\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, t)$. Prąd ten oddziałuje z polem elektromagnetycznym, zaś potencjał oddziaływania dany jest przez

$$\hat{V}(t) = \int d\mathbf{r} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t). \quad (2.1)$$

Obiekt, który pojawił się powyżej, czyli $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t)$, to potencjał wektorowy pola elektromagnetycznego. Wiąże się on, na przykład, z polem elektrycznym, poprzez wyrażenie

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.2)$$

zatem korzystając z wyrażenia (1.20a) otrzymujemy

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = -i \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \frac{1}{\omega_k} \mathbf{e}_{\mathbf{k}, \sigma} \mathcal{E}_{\mathbf{k}, \sigma} \hat{a}_{\mathbf{k}, \sigma} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)} + \text{H.c.} \quad (2.3)$$

W następnym kroku poszukujemy ewolucji stanu pola elektromagnetycznego pod wpływem oddziaływania (2.1). W obrazie oddziaływania początkowy stan (zakładamy, że przy braku pola jest to próżnia) zmienia się w sposób następu-

jący¹

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t d\tau \hat{V}(\tau)} |0\rangle. \quad (2.4)$$

Zauważmy, że wykładnik możemy przedstawić w postaci

$$-\frac{i}{\hbar} \int_0^t d\tau \hat{V}(\tau) = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \left(\alpha_{\mathbf{k}, \sigma} \hat{a}_{\mathbf{k}, \sigma}^\dagger - \alpha_{\mathbf{k}, \sigma}^* \hat{a}_{\mathbf{k}, \sigma} \right), \quad (2.5)$$

gdzie zespolona amplituda $\alpha_{\mathbf{k}, \sigma}$ dana jest wzorem

$$\alpha_{\mathbf{k}, \sigma} = \frac{\mathcal{E}_{\mathbf{k}, \sigma}}{\hbar \omega_{\mathbf{k}}} \int_0^t d\tau \int d\mathbf{r} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}, \sigma} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} \tau)}. \quad (2.6)$$

A zatem stan kwantowy pola elektromagnetycznego pochodzący od klasycznego prądu jest postaci

$$|\{\alpha\}\rangle = \prod_{\mathbf{k}, \sigma} e^{\alpha_{\mathbf{k}, \sigma} \hat{a}_{\mathbf{k}, \sigma}^\dagger - \alpha_{\mathbf{k}, \sigma}^* \hat{a}_{\mathbf{k}, \sigma}} |0\rangle. \quad (2.7)$$

Stan taki nazywamy *koherentnym* i istnieje wiele powodów by używać tego określenia. Część z nich przedstawimy w tym rozdziale, pozostałe przy okazji teorii spójności Glaubera. Jako że operatory kreacji i anihilacji dla różnych modów komutują, stan ten można zapisać jako iloczyn jednomodowych stanów koherentnych, czyli

$$|\{\alpha\}\rangle = \prod_{\mathbf{k}, \sigma} |\alpha_{\mathbf{k}, \sigma}\rangle. \quad (2.8)$$

Ponieważ różne mody nie są skorelowane, możemy zbadać cechy stanu koherentnego skupiając się na stanie jednomodowym

$$|\alpha\rangle = e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}} |0\rangle. \quad (2.9)$$

Zanim jednak przedyskutujemy te własności, wyprowadzimy powyższe wyrażenie w alternatywny sposób.

2.2 Stan koherentny inaczej

Wprowadźmy stan własny operatora anihilacji o wartości własnej α , czyli

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle. \quad (2.10)$$

W ramach standardowego kursu mechaniki kwantowej wykazuje się, poprzez rozłożenie $|\alpha\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$ i wyznaczenie związku rekurencyjnego między c_n i c_{n-1} , że stan ten jest postaci

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (2.11)$$

¹Potencjał zależy od czasu i nie komutuje sam ze sobą w różnych chwilach czasu, powinniśmy więc uwzględnić uporządkowanie czasowe operatora ewolucji. Niemniej, jako że $[\hat{V}(\tau), \hat{V}(\tau')] \propto f(\tau - \tau')$ — czyli komutator jest liczbą — uwzględnienie uporządkowania czasowego wprowadzi wyłącznie zależne od czasu czynniki fazowe, które można pominąć, dostając równanie (2.4).

Korzystając ze związku (1.30b) zastosowanego n -krotnie, czyli $(\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle = \sqrt{n!} |n\rangle$, powyższe wyrażenie możemy przepisać jako

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} |0\rangle. \quad (2.12)$$

W ostatnim kroku zauważmy, że operator, który pojawia się w wyrażeniu (2.9) można, na mocy twierdzenia BCH przepisać w postaci

$$e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}} = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{a}}. \quad (2.13)$$

Wynika to ze związku $e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}$, który zachodzi pod warunkiem, że $[[\hat{A}, \hat{B}], \hat{A}] = [[\hat{A}, \hat{B}], \hat{B}] = 0$, to zaś w naszym przypadku jest spełnione, gdyż $\alpha \hat{a}^\dagger$ i $\alpha^* \hat{a}$ komutują do stałej. Zauważmy, że

$$e^{-\alpha^* \hat{a}} |0\rangle = |0\rangle, \quad (2.14)$$

gdyż tylko jedynka przeżywa rozwinięcie funkcji wykładniczej, pozostałe człony, w działaniu na próżnię, nie dają wkładu. A zatem, łącząc wyrażenia (2.9), (2.12) i (2.11), wnioskujemy, że stan własny operatora anihilacji jest zarazem stanem koherentnym zdefiniowanym w części 2.1.

2.2.1 Operator przesunięcia

Operator, który pojawia się w równaniach (2.9) i (2.13) nazywamy operatorem przesunięcia (ang. *displacement operator*), i oznaczamy jako

$$\hat{D}(\alpha) \equiv e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}}. \quad (2.15)$$

Jest to operator unitarny,

$$\hat{D}^\dagger(\alpha) = \hat{D}(-\alpha) = \hat{D}^{(-1)}(-\alpha) \quad (2.16)$$

co widać z równania początkowego (2.4), a także można wykazać bezpośrednim rachunkiem. Głębsze zrozumienie, czemu ten obiekt nazywamy operatorem *przesunięcia*, będzie możliwe dopiero, gdy omówimy metody przestrzeni fazowej w rozdziale 3. Teraz zauważmy, że przechodząc z obrazu Schrödingera do Heisenberga, otrzymujemy (znowu korzystając z twierdzenia BCH)

$$\hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{a} \hat{D}(\alpha) = \hat{a} + \alpha, \quad (2.17)$$

zatem operator \hat{D} rzeczywiście przesuwa operator anihilacji o stałą.

2.3 Czemu koherentny jest koherentny

By przedstawić pewne argumenty na rzecz tego, że stan $|\alpha\rangle$ można nazywać koherentnym, znajdziemy najpierw jego reprezentację położeniową. W tym celu, przywołajmy definicję (2.10) oraz wyrażmy operator anihilacji przez operatory położenia i pędu. Otrzymujemy równanie na funkcję falową $\psi_\alpha(x)$ stanu koherentnego w reprezentacji położeniowej, czyli

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{a_0} + a_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi_\alpha(x) = \alpha \psi_\alpha(x). \quad (2.18)$$

Przenosząc wszystko, co nie zależy od pochodnej na jedną stronę, dostajemy równanie różniczkowe postaci

$$\psi'_\alpha(x) = \frac{1}{a_0^2}(\sqrt{2}\alpha a_0 - x)\psi_\alpha(x), \quad (2.19)$$

którego rozwiązaniem jest funkcja falowa

$$\psi_\alpha(x) = \mathcal{N} e^{-\frac{(x-\sqrt{2}\alpha a_0)^2}{2a_0^2}}, \quad (2.20)$$

gdzie \mathcal{N} jest stałą normalizacyjną. A zatem funkcja falowa stanu koherentnego w reprezentacji położeniowej jest niczym innym, tylko stanem podstawowym oscylatora harmonicznego przesuniętym względem minimum potencjału o stałą $x_0 = \sqrt{2}\alpha a_0$. Ewolucja czasowa tej paczki falowej sprowadza się do zmiany $x_0 \rightarrow x_0 \cos \omega t$ oraz nadruku fazy. Szerokość paczki pozostaje jednak bez zmian, co oznacza, że stan koherentny w funkcji czasu jedynie harmonicznym zmienia swoje położenie, lecz nie zmienia swojego kształtu. Mówimy zatem, że w trakcie ewolucji stan $\psi_\alpha(x)$ utrzymuje swoją spójność, jest zatem *koherentny*, co w pewnym stopniu uzasadnia nazewnictwo.

2.4 Własności stanu koherentnego

Omówimy teraz podstawowe własności stanu koherentnego, takie jak statystyka, czy liczba fotonów. Zaczniemy od tego, że stan $|\alpha\rangle$ nie ma ustalonej liczby fotonów, innymi słowy nie jest stanem własnym operatora liczby fotonów $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$. Niemniej, średnia liczba fotonów wyraża się bardzo łatwo

$$\langle \hat{n} \rangle = \langle \alpha | \hat{n} | \alpha \rangle = |\alpha|^2, \quad (2.21)$$

co wynika bezpośrednio z definicji (2.10). Następnie możemy wyprowadzić wariancję liczby cząstek. W tym celu zauważamy, że

$$\hat{n}^2 = (\hat{a}^\dagger \hat{a})^2 = \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a}, \quad (2.22)$$

a zatem

$$\langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2 = |\alpha|^2 = \langle \hat{n} \rangle, \quad (2.23)$$

co jest charakterystyczne dla rozkładu Poissona. W rzeczy samej prawdopodobieństwo zmierzenia n fotonów w stanie koherentnym dane jest wzorem

$$p(n) = |\langle n | \alpha \rangle|^2 = \frac{\langle \hat{n} \rangle e^{-\langle \hat{n} \rangle}}{n!}, \quad (2.24)$$

co wynika bezpośrednio z równania (2.13). Stany koherentne nie są ortogonalne. Z (2.13) dostajemy

$$\langle \alpha | \beta \rangle = e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} e^{\alpha^* \beta} \quad \rightarrow \quad |\langle \alpha | \beta \rangle|^2 = e^{-|\alpha - \beta|^2}. \quad (2.25)$$

Ponadto rozpinają całą przestrzeń, albowiem, przedstawiając $\alpha = r e^{i\varphi}$ dostajemy

$$\frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle \langle \alpha| = \frac{1}{\pi} \sum_{n,m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-r^2} \frac{r^{n+m} e^{i\varphi(n-m)}}{\sqrt{n!m!}} |n\rangle \langle m|. \quad (2.26)$$

Całką po kątach daje $2\pi\delta_{n,m}$, zatem powyższe wyrażenie upraszcza się do

$$\frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle \langle\alpha| = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} r dr e^{-r^2} \frac{r^{2n}}{n!} |n\rangle \langle n|. \quad (2.27)$$

Całką po zmiennej radialnej daje $n!$ (funkcja specjalna gamma Eulera), stąd

$$\frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle \langle\alpha| = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = \hat{1}. \quad (2.28)$$

Mówimy zatem, że stany koherentne tworzą bazę nadzupełną — jest ich więcej, niż potrzeba, by rozpiąć całą przestrzeń Hilberta.

2.5 Stany ściśnięte

W poprzedniej części argumentowaliśmy, że stan koherentny, w reprezentacji położeniowej, jest przesuniętym stanem podstawowym oscylatora harmonicznego, patrz równanie (2.20). Wiemy skądinąd, że stan podstawowy oscylatora jest paczką gaussowską, która minimalizuje zasadę nieznaczości Heisenberga, dając

$$\Delta\hat{x}\Delta\hat{p} = \frac{\hbar}{2}, \quad \text{gdzie} \quad \Delta A = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}. \quad (2.29)$$

Ponieważ $\psi_\alpha(x)$ ma tę samą szerokość, co stan podstawowy, zatem oczywiście również dla tego stanu zachodzi powyższa równość (2.29). Trzymając się opisu pola elektromagnetycznego przy pomocy operatorów kreacji i anihilacji, wprowadźmy bezwymiarowe odpowiedniki operatorów położenia i pędu, zgodnie z transformacją odwrotną do (1.17), czyli

$$\hat{X}_1 = \frac{1}{2}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (2.30a)$$

$$\hat{X}_2 = \frac{1}{2i}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \quad (2.30b)$$

Operatory te spełniają regułę komutacyjną $[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = \frac{i}{2}$, zatem ze związku $\Delta\hat{X}_1\Delta\hat{X}_2 \geq \frac{1}{2}|\langle [\hat{X}_1, \hat{X}_2] \rangle|$ otrzymujemy zasadę nieznaczości postaci

$$\Delta\hat{X}_1\Delta\hat{X}_2 \geq \frac{1}{4}. \quad (2.31)$$

Łatwo sprawdzić, że stan koherentny minimalizuje tę nierówność, co jest inną formą wysłowienia związku (2.29). Zauważmy ponadto, że stan koherentny jest symetryczny, czyli jego kwantowy rozrzut jest równomiernie rozłożony pomiędzy dwie “kwadratury” \hat{X}_1 i \hat{X}_2 ,

$$\Delta\hat{X}_1 = \Delta\hat{X}_2 = \frac{1}{2}. \quad (2.32)$$

Jako że zasada nieznaczości ma postać nierówności, należy się spodziewać, że inny stan światła, przygotowany ad-hoc, nie będzie jej nasycał, lecz wręcz przeciwnie da iloczyn $\Delta\hat{X}_1\Delta\hat{X}_2 \gg \frac{1}{4}$. Pytanie, które stawiamy w tej części jest

następujące: czy da się przygotować taki stan pola elektromagnetycznego, by nadal spełnione było (2.31), lecz złamana była symetria między kwadratami, wyrażona w równaniu (2.32)? Stan taki nazywamy “stanem ściśniętym”, albowiem ma zmniejszoną wariancję jednej z kwadratur, na przykład $\Delta\hat{X}_1$ kosztem drugiej, tak by nadal spełniona była równość (2.31).

Postać stanów ściśniętych można wyprowadzić, posługując się następującą analogią. Rozważmy pojedynczą cząstkę w potencjale harmonicznym, której Hamiltonian dany jest wzorem

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2. \quad (2.33)$$

Stan podstawowy tego układu, w reprezentacji położeniowej, jest paczką gausowską o szerokości danej przez długość oscylatorową $\hat{a}_{\text{ho}} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$. Gdybyśmy teraz to tego Hamiltonianu dodali dodatkowy potencjał

$$\hat{V} = \frac{1}{2}m\Omega^2\hat{x}^2, \quad (2.34)$$

początkowa funkcja falowa zostałaby ściśnięta, albowiem zwiększyłaby się częstość pułapki. Stąd wnioskujemy, że dodanie członu $\sim \hat{x}^2$ do Hamiltonianu oscylatora harmonicznego prowadzić będzie do ściskania paczki falowej w reprezentacji położeniowej (a zatem do jej rozszerzania w reprezentacji pędowej).

Bazując na analogii pomiędzy cząstką w potencjale harmonicznym a Hamiltonianem pola elektromagnetycznego, oraz zauważając, że przy przejściu od operatorów położenia i pędu do operatorów kreacji i anihilacji mamy \hat{x}^2 staje się ich formą kwadratową, postulujemy, że Hamiltonian ściskania powinien mieć postać

$$\hat{H}_s = i\hbar(g\hat{a}^{\dagger 2} - g^*\hat{a}^2), \quad (2.35)$$

gdzie $g \in \mathbb{C}$ jest stałą. Operator ten generuje dynamikę, stąd związany z nim operator ewolucji

$$\hat{S}(\xi) = e^{-i\hat{H}t/\hbar} = e^{\frac{1}{2}\xi^*\hat{a} - \frac{1}{2}\xi\hat{a}^{\dagger 2}} \quad (2.36)$$

nazywamy operatorem ściskania. Zauważmy, że $\xi = -2g^*t = re^{i\theta}$ jest zależną od czasu wielkością zespoloną. Operator ściskania jest unitarnym, czyli

$$\hat{S}^\dagger(\xi) = \hat{S}(-\xi) = \hat{S}^{-1}(\xi). \quad (2.37)$$

Ponadto, z twierdzenia BCH, poprzez analogię do równania (2.17), otrzymujemy

$$\hat{S}^\dagger(\xi)\hat{a}\hat{S}(\xi) = \hat{a}\cosh r - \hat{a}^\dagger e^{i\theta}\sinh r \quad (2.38a)$$

$$\hat{S}^\dagger(\xi)\hat{a}^\dagger\hat{S}(\xi) = \hat{a}^\dagger\cosh r - \hat{a}e^{-i\theta}\sinh r. \quad (2.38b)$$

Do analizy tego, jaki wpływ ma operator ściskania na kwadratury, wygodnie jest wprowadzić wielkości

$$\hat{Y}_{1,2} = \hat{X}_{1,2}e^{-i\frac{\theta}{2}}. \quad (2.39)$$

Wprowadzamy teraz rodzinę stanów pola elektromagnetycznego, które odgrywają szczególną rolę w wielu działach optyki kwantowej. Są to **ściśnięte stany koherentne**, które otrzymuje się poprzez zadziałanie operatorem ściskania (2.36) na stan koherentny $|\alpha\rangle$, czyli

$$|\alpha, \xi\rangle = \hat{S}(\xi)\hat{D}(\alpha)|0\rangle. \quad (2.40)$$

Bezpośrednio z równania (2.38a) wynika, że zachodzi związek

$$\langle\alpha, \xi|\hat{a}|\alpha, \xi\rangle = \alpha \cosh r - \alpha^* e^{i\theta} \sinh r. \quad (2.41)$$

To z kolei pozwala wyznaczyć wariancje kwadratur pola, które wynoszą odpowiednio

$$\Delta\hat{Y}_1 = \frac{1}{2}e^{-r} \quad (2.42a)$$

$$\Delta\hat{Y}_2 = \frac{1}{2}e^r \quad (2.42b)$$

Zatem dla $r > 0$ pierwsza wariancja maleje kosztem drugiej, lecz iloczyn $\Delta\hat{Y}_1\Delta\hat{Y}_2 = \frac{1}{4}$ jest stały, czyli zachowana jest minimalna wartość zasady nieoznaczoności.

2.5.1 Ściskanie wielomodowe

Dla porządku przywołajmy jeszcze wyrażenie na operator ściskania w przypadku dwumodowym. Jest on postaci

$$\hat{S}(\xi) = e^{\xi^* \hat{a}_{\omega+\omega'} \hat{a}_{\omega-\omega'} - \xi \hat{a}_{\omega+\omega'}^\dagger \hat{a}_{\omega+\omega'}^\dagger}. \quad (2.43)$$

By skwantyfikować stopień ściskania, wprowadzamy operator

$$\hat{b} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_{\omega+\omega'} + e^{-i\delta} \hat{a}_{\omega-\omega'}). \quad (2.44)$$

Kwadratury pola

$$\hat{b}_1 = \frac{1}{2}(\hat{b} + \hat{b}^\dagger) \quad (2.45a)$$

$$\hat{b}_2 = \frac{1}{2i}(\hat{b} - \hat{b}^\dagger) \quad (2.45b)$$

spełniają zasadę nieoznaczoności $\Delta\hat{b}_1\Delta\hat{b}_2 \geq \frac{1}{4}$. Ewolucja czasowa tych operatorów pod wpływem (2.43) daje

$$(\Delta\hat{b}_1)^2 = \frac{1}{4} \left[e^{-2r} \cos^2 \left(\frac{\delta - \theta}{2} \right) + e^{2r} \sin^2 \left(\frac{\delta - \theta}{2} \right) \right] \quad (2.46a)$$

$$(\Delta\hat{b}_2)^2 = \frac{1}{4} \left[e^{2r} \cos^2 \left(\frac{\delta - \theta}{2} \right) + e^{-2r} \sin^2 \left(\frac{\delta - \theta}{2} \right) \right]. \quad (2.46b)$$

Dla $\delta - \theta = 0$ lub π odtwarzamy wyniki dla zagadnienia jednomodowego.

Na koniec zapiszmy wielomodowy operator ściskania, który jest naturalnym uogólnieniem wyrażenia (2.43). Mianowicie

$$\hat{S}[\xi(\omega)] = \int d\omega' e^{\xi^*(\omega') \hat{a}_{\omega+\omega'} \hat{a}_{\omega-\omega'} - \xi(\omega') \hat{a}_{\omega+\omega'}^\dagger \hat{a}_{\omega+\omega'}^\dagger}. \quad (2.47)$$

Wielomodowy stan ściśnięty jest postaci

$$|\alpha(\omega), \xi(\omega)\rangle = \hat{S}[\xi(\omega)] \hat{D}[\alpha(\omega)] |\tilde{0}\rangle, \quad (2.48)$$

gdzie $|\tilde{0}\rangle$ jest wielomodową próżnią. Na obecnym etapie nie jesteśmy w stanie stwierdzić, czy i w jakim stopniu stany ściśnięte są nieklasyczne oraz jak się je uzyskuje i jakie są ich zastosowania. Na pytania te odpowiemy kolejno w rozdziałach 3, 4 oraz 8.

Rozdział 3

Metody przestrzeni fazowej

W tym rozdziale omówione zostaną podstawowe funkcje rozkładu kwazi-prawdopodobieństwa w przestrzeni fazowej. Obiekty te, jak się przekonamy w tym i następnych rozdziałach, są użytecznymi narzędziami służącymi do liczenia średnich kwantowych złożonych obserwabli na czystych i mieszanych stanach pól elektromagnetycznych.

Zacznijmy jednak od krótkiej uwagi natury ogólnej. Mianowicie do tej pory posługiwaliśmy się stanami czystymi $|\psi\rangle$. Formalizm mechaniki kwantowej dopuszcza, by średnie kwantowe obarczone były, poza czysto kwantową niepewnością, również taką, która pochodzi z czysto statystycznego rozrzutu (a zatem danego wyłącznie przez rozkład prawdopodobieństwa, a nie zespolone amplitudy).

Innymi słowy, zamiast dotychczas stosowanej średniej obserwabli \hat{O} na stanie czystym

$$\langle \hat{O} \rangle = \langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle \quad (3.1)$$

dopuszczamy również rozkład statystyczny tego wyniku

$$\overline{\langle \hat{O} \rangle} = \sum_i p_i \langle \psi_i | \hat{O} | \psi_i \rangle, \quad (3.2)$$

gdzie p_i jest pewnym rozkładem prawdopodobieństwa. Niech $\{|n\rangle\}$ tworzą bazę zupełną. Możemy wtedy wstawić do powyższego wyrażenia rozkład jedyński

$$\overline{\langle \hat{O} \rangle} = \sum_{i,n} p_i \langle \psi_i | \hat{O} | n \rangle \langle n | \psi_i \rangle = \sum_{i,n} p_i \langle n | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \hat{O} | n \rangle. \quad (3.3)$$

Definiujemy macierz gęstości $\hat{\rho}$ jako

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i \psi_i \langle \psi_i |. \quad (3.4)$$

Wtedy powyższa średnia zapisuje się w postaci

$$\overline{\langle \hat{O} \rangle} = \text{Tr} [\hat{O} \hat{\rho}]. \quad (3.5)$$

Widzimy zatem, że stan czysty (wektor jednostkowy z przestrzeni Hilberta) został zastąpiony przez operator gęstości (Hermitowski, dodatnio określony), który jest obiektem niosącym bogatszą informację od samego $|\psi\rangle$.

3.1 P -reprezentacja Glaubera

Zauważmy, że macierz gęstości (3.4) można rozpisać w dowolnej bazie zupełnej poprzez wstawienie jedynek w tej przestrzeni

$$\hat{\rho} = \sum_{n,m} |n\rangle \langle n| \hat{\rho} |m\rangle \langle m| = \sum_{n,m} |n\rangle \langle m| \rho_{n,m}. \quad (3.6)$$

Równie dobrze, moglibyśmy wstawić jedynki pochodzące z całek operatorów rzutowych na stany koherentne, patrz równanie (2.28),

$$\hat{\rho} = \iint \frac{d^2\alpha}{\pi} \frac{d^2\beta}{\pi} |\alpha\rangle \langle \alpha| \hat{\rho} |\beta\rangle \langle \beta|. \quad (3.7)$$

R -reprezentacją stanu kwantowego $\hat{\rho}$ nazywamy wielkość

$$R(\alpha, \beta) = \langle \alpha| \hat{\rho} |\beta\rangle e^{\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)}, \quad (3.8)$$

która w połączeniu z równaniem (3.7) daje

$$\hat{\rho} = \iint \frac{d^2\alpha}{\pi} \frac{d^2\beta}{\pi} |\alpha\rangle \langle \beta| R(\alpha, \beta) e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)}. \quad (3.9)$$

Jest to zatem rozkład macierzy gęstości w elementy pozadiagonalne bazy stanów koherentnych. Wykażemy teraz, że szczególną rolę odgrywa taki rozkład, gdzie obecne są tylko elementy diagonalne (czyli postaci $|\alpha\rangle \langle \alpha|$).

W tym celu definiujemy normalne uporządkowanie jako takie ustawienie operatorów \hat{a} i \hat{a}^\dagger w operatorze będących dowolną ich funkcją, gdzie wszystkie operatory z krzyżem stoją po lewej stronie. Ma on zatem ogólną postać

$$\hat{O}_N(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) = \sum_{n,m} c_{nm} (\hat{a}^\dagger)^n \hat{a}^m. \quad (3.10)$$

Naszym zadaniem jest policzenie wartości średniej tego operatora na stanie kwantowym $\hat{\rho}$. Z definicji mamy

$$\langle \hat{O}_N(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) \rangle = \text{Tr} [\hat{O} \hat{\rho}] = \sum_{n,m} c_{nm} \text{Tr} [\hat{\rho} (\hat{a}^\dagger)^n \hat{a}^m]. \quad (3.11)$$

Wyprowadzimy teraz następujący związek

$$\delta(\alpha^* - \hat{a}^\dagger) \delta(\alpha - \hat{a}) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\beta e^{-\beta(\alpha^* - \hat{a}^\dagger)} e^{\beta^*(\alpha - \hat{a})}. \quad (3.12)$$

W ramach dowodu, obkładamy to równanie stronami stanem koherentnym $|\gamma\rangle$ i korzystamy z faktu, że jest to stan własny operatora \hat{a} . Mamy zatem

$$\delta(\alpha^* - \gamma^*) \delta(\alpha - \gamma) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\beta e^{-\beta(\alpha^* - \gamma^*)} e^{\beta^*(\alpha - \gamma)}. \quad (3.13)$$

W następnym kroku zauważamy, że $\beta = x_\beta + iy_\beta$, zaś całkowanie po płaszczyźnie zespolonej można przedstawić jako całkę podwójną po części rzeczywistej x_β i urojonej y_β . Mamy zatem

$$\frac{1}{\pi^2} \int d^2\beta e^{-\beta(\alpha^* - \gamma^*)} e^{\beta^*(\alpha - \gamma)} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dx_\beta e^{ix_\beta(x_\alpha - x_\gamma)} \int dy_\beta e^{-iy_\beta(y_\alpha - y_\gamma)}, \quad (3.14)$$

gdzie dokonaliśmy zamiany zmiennych $2x_\beta \rightarrow x_\beta$ oraz $2y_\beta \rightarrow y_\beta$. Korzystając z tożsamości

$$\frac{1}{(2\pi)} \int dx e^{ikx} = \delta(k), \quad (3.15)$$

otrzymujemy porządaną lewą stronę równania (3.13), co dowodzi (3.12). Zauważmy, że tożsamość do (3.12) jest

$$\delta(\alpha^* - \hat{a}^\dagger) \delta(\alpha - \hat{a}) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\beta e^{-i\beta(\alpha^* - \hat{a}^\dagger)} e^{i\beta^*(\alpha - \hat{a})}, \quad (3.16)$$

otrzymane przez zamianę zmiennych $\beta \rightarrow i\beta$. Wracając do równania (3.11), mamy

$$\begin{aligned} \langle \hat{O}_N(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) \rangle &= \sum_{n,m} c_{nm} \int d\alpha \int d\alpha^* \text{Tr} [\hat{\rho} \delta(\alpha^* - \hat{a}^\dagger) \delta(\alpha - \hat{a})] (\alpha^*)^n \alpha^m \\ &= \int d\alpha \int d\alpha^* O_N(\alpha, \alpha^*) P(\alpha, \alpha^*), \end{aligned} \quad (3.17)$$

gdzie

$$P(\alpha, \alpha^*) \equiv \text{Tr} [\hat{\rho} \delta(\alpha^* - \hat{a}^\dagger) \delta(\alpha - \hat{a})] \quad (3.18)$$

nazywamy P -reprezentacją Glaubera stanu kwantowego $\hat{\rho}$. Widzimy zatem, że P -reprezentacja służy do liczenia średnich dowolnych operatorów normalnie uporządkowanych. Oczywiście

$$\iint d\alpha d\alpha^* P(\alpha, \alpha^*) = 1, \quad (3.19)$$

co sugeruje, że jest to rozkład prawdopodobieństwa. Tak jednak w ogólności nie jest—istnieją stany kwantowe, dla których P nie jest dodatnio określone. Niemniej, wyrażenie (3.17) ładząco przypomina średniowanie z rozkładem prawdopodobieństwa. Stąd też waga tego wzoru, i rozkładu P w ogóle: pozwala on na zastąpienie operatorów \hat{a} i \hat{a}^\dagger w \hat{O}_N przez α i α^* . Jak będziemy argumentowali w rozdziale (4), P -reprezentacja pozwala na wyznaczenie związku między klasycznymi, pół-klasycznymi i kwantowymi stanami światła.

Zauważmy, że równanie (3.18) oznacza, że P jest rozkładem $\hat{\rho}$ w diagonalnej bazie stanów koherentnych, czyli

$$\hat{\rho} = \iint d\alpha d\alpha^* P(\alpha, \alpha^*) |\alpha\rangle \langle \alpha|. \quad (3.20)$$

By się o tym przekonać, wystarczy podstawić powyższe wyrażenie po prawej stronie równania (3.18), do daje

$$\text{Tr} [\hat{\rho} \delta(\alpha^* - \hat{a}^\dagger) \delta(\alpha - \hat{a})] = \quad (3.21)$$

$$\iint d\alpha' d\alpha'^* P(\alpha', \alpha'^*) \text{Tr} [|\alpha'\rangle \langle \alpha'| \delta(\alpha^* - \hat{a}^\dagger) \delta(\alpha - \hat{a})] = \quad (3.22)$$

$$\iint d\alpha' d\alpha'^* P(\alpha', \alpha'^*) \text{Tr} [|\alpha'\rangle \langle \alpha'| \delta(\alpha^* - \alpha'^*) \delta(\alpha - \alpha')] = \quad (3.23)$$

$$P(\alpha, \alpha^*) \text{Tr} [|\alpha\rangle \langle \alpha|] = P(\alpha, \alpha^*), \quad (3.24)$$

co należało wykazać.

Wykażemy teraz, że dla każdego $\hat{\rho}$ istnieje $P(\alpha, \alpha^*)$ zdefiniowane wzorem (3.20). Innymi słowy, wykażemy, że rozkład w bazie diagonalnej stanów koherentnych jest wystarczający, by odtworzyć każdy operator gęstości. Naturalnie, jest to konsekwencją nadzupełności zbioru stanów koherentnych. W tym celu zauważmy, że w ogólności, w bazie stanów Focka, zachodzi

$$\hat{\rho} = \sum_{n, n'} \rho_{n, n'} |n\rangle\langle n'|. \quad (3.25)$$

Z kolei wielkość $|n\rangle\langle m|$ można odtworzyć w następujący sposób

$$|n\rangle\langle n'| = \frac{\sqrt{n!n'!}}{(n+n')!} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^{n+n'} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{r^2+i(n'-n)\theta} |re^{i\theta}\rangle\langle re^{i\theta}| \Big|_{r=0}, \quad (3.26)$$

gdzie $\alpha = re^{i\theta}$. Warunek $r = 0$ możemy zapisać jako całkowanie z deltą, czyli

$$|n\rangle\langle n'| = \frac{\sqrt{n!n'!}}{(n+n')!} \int_0^\infty dr \delta(r) \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^{n+n'} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{r^2+i(n'-n)\theta} |re^{i\theta}\rangle\langle re^{i\theta}|. \quad (3.27)$$

Całkując $n + n'$ -krotnie przez części otrzymujemy

$$|n\rangle\langle n'| = \frac{\sqrt{n!n'!}}{(n+n')!} \int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi r} e^{r^2+i(n'-n)\theta} |re^{i\theta}\rangle\langle re^{i\theta}| \left(-\frac{\partial}{\partial r} \right)^{n+n'} \delta(r). \quad (3.28)$$

Stąd otrzymujemy

$$P(\alpha, \alpha^*) = P(r, \theta) = \sum_{n, n'=0}^\infty \rho_{nn'} \frac{\sqrt{n!n'!}}{(n+n')!} \times \int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi r} e^{r^2+i(n'-n)\theta} \left(-\frac{\partial}{\partial r} \right)^{n+n'} \delta(r). \quad (3.29)$$

Wyprowadzimy teraz szczególnie przydatny wzór, który pozwala w wielu przypadkach na analityczne wyprowadzenie P -reprezentacji. Zauważmy mianowicie, że obłożenie powyższego wyrażenia z dwóch stron stanami koherentnymi $|-\beta\rangle$ oraz $|\beta\rangle$ daje

$$\begin{aligned} \langle -\beta | \hat{\rho} | \beta \rangle &= \iint d\alpha d\alpha^* P(\alpha, \alpha^*) \langle -\beta | \alpha \rangle \langle \alpha | \beta \rangle \\ &= e^{-|\beta|^2} \iint d\alpha d\alpha^* \left(P(\alpha, \alpha^*) e^{-|\alpha|^2} \right) e^{-\beta^* \alpha + \alpha^* \beta}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

gdzie w ostatnim kroku skorzystaliśmy z wyrażenia na iloczyn skalarny dwóch stanów koherentnych, dany przez równanie (2.25). Wyrażając α i β przez ich część rzeczywistą i urojoną, jak w równaniu (3.14), mamy

$$\langle -\beta | \hat{\rho} | \beta \rangle e^{|\beta|^2} = \iint dx_\alpha dy_\alpha \left(P(x_\alpha, y_\alpha) e^{-x_\alpha^2 - y_\alpha^2} \right) e^{2i(y_\beta x_\alpha - x_\beta y_\alpha)}. \quad (3.31)$$

Zatem wyrażenie po lewej stronie jest dwuwymiarową transformatą Fouriera funkcji $P(x_\alpha, y_\alpha)e^{-x_\alpha^2 - y_\alpha^2}$. Możemy zatem ten związek odwrócić, dzięki czemu otrzymujemy

$$P(\alpha, \alpha^*) = \frac{e^{|\alpha|^2}}{\pi^2} \int d^2\beta \langle -\beta | \hat{\rho} | \beta \rangle e^{|\beta|^2} e^{-\beta\alpha^* + \beta^*\alpha}. \quad (3.32)$$

Skorzystamy teraz z tego wyrażenia, by wyznaczyć P w paru szczególnych przypadkach.

3.1.1 P -reprezentacja — przykłady

Stan termiczny

Na początek rozważymy stan termiczny to jest taki, którego macierz gęstości dana jest wzorem

$$\hat{\rho} = \frac{1}{\mathcal{Z}} e^{-\frac{\hat{H}}{k_B T}}, \quad (3.33)$$

gdzie $\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}$, suma statystyczna dana jest wzorem

$$\mathcal{Z} = \text{Tr} \left[e^{-\frac{\hat{H}}{k_B T}} \right] = \sum_n \langle n | e^{-\frac{\hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}}{k_B T}} | n \rangle = \sum_n e^{-\frac{\hbar\omega n}{k_B T}} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}}. \quad (3.34)$$

Zatem otrzymujemy

$$\hat{\rho} = \left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}\right) e^{-\frac{\hat{H}}{k_B T}} = \left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}\right) \sum_n e^{-\frac{\hbar\omega n}{k_B T}} |n\rangle \langle n|. \quad (3.35)$$

Zauważmy, że średnia liczba fotonów w układzie dana jest wzorem

$$\langle \hat{n} \rangle = \text{Tr} [\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho}] = \left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}\right) \sum_n n e^{-\frac{\hbar\omega n}{k_B T}} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}, \quad (3.36)$$

stąd macierz gęstości można zapisać w postaci

$$\hat{\rho} = \sum_n \frac{\langle \hat{n} \rangle^n}{(1 + \langle \hat{n} \rangle)^{n+1}} |n\rangle \langle n|. \quad (3.37)$$

W następnym kroku korzystamy z wyrażenia (3.32) i wyznaczamy

$$\langle -\beta | \hat{\rho} | \beta \rangle = \frac{e^{-|\beta|^2}}{1 + \langle \hat{n} \rangle} \sum_n \frac{(-|\beta|^2)^n}{n!} \left(\frac{\langle \hat{n} \rangle}{1 + \langle \hat{n} \rangle} \right)^n = \frac{e^{-|\beta|^2}}{1 + \langle \hat{n} \rangle} e^{-\frac{|\beta|^2}{1 + \langle \hat{n} \rangle}}. \quad (3.38)$$

Wyznaczenie P -reprezentacji sprowadza się zatem do policzenia całki gaussowskiej w równaniu (3.32), co daje

$$P(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{\pi \langle \hat{n} \rangle} e^{-\frac{|\alpha|^2}{\langle \hat{n} \rangle}}. \quad (3.39)$$

Zatem P -reprezentacja stanu termicznego jest dana funkcją Gaussa.

Stan koherentny

Gdy stan układu dany jest przez czysty stan koherentny $|\alpha_0\rangle$, mamy

$$\langle -\beta | \hat{\rho} | \beta \rangle = e^{-|\alpha_0|^2 - |\beta|^2 - \alpha_0 \beta^* - \beta \alpha_0^*}, \quad (3.40)$$

co po podstawieniu do (3.32) daje spodziewany wynik

$$P(\alpha, \alpha^*) = \delta^{(2)}(\alpha - \alpha_0). \quad (3.41)$$

Stan Focka

Na koniec rozważamy przypadek, gdy układ jest w czystym stanie Focka $|n\rangle$. Znow wyznaczamy

$$\langle -\beta | \hat{\rho} | \beta \rangle = e^{-|\beta|^2} \frac{(-1)^n |\beta|^{2n}}{n!}. \quad (3.42)$$

Podstawiamy to wyrażenie do (3.32) i dostajemy

$$\begin{aligned} P(\alpha, \alpha^*) &= \frac{e^{|\alpha|^2} (-1)^n}{n! \pi^2} \int d^2 \beta |\beta|^{2n} e^{-\beta \alpha^* + \beta^* \alpha} = \\ &= \frac{e^{|\alpha|^2}}{n! \pi^2} \frac{\partial^{2n}}{\partial \alpha^n \partial \alpha^{*n}} \int d^2 \beta e^{-\beta \alpha^* + \beta^* \alpha} = \frac{e^{|\alpha|^2}}{n!} \frac{\partial^{2n}}{\partial \alpha^n \partial \alpha^{*n}} \delta^{(2)}(\alpha). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Zatem w tym przypadku P -reprezentacja nie jest zwykłym rozkładem prawdopodobieństwa, lecz dana jest przez wysoce patologiczne pochodne dystrybucji. Wnioskujemy stąd, że stan Focka jest silnie nieklasyczny oraz że P w ogólności nie może być interpretowana jako klasyczny rozkład prawdopodobieństwa.

3.2 Q -reprezentacja

W odróżnieniu od P -reprezentacji, która służy do liczenia średnich z operatorów uporządkowanych normalnie, Q -reprezentacja, jak się przekonamy, służy do liczenia średnich z operatorów uporządkowanych anty-normalnie. Definiujemy ją, poprzez analogię do (3.18), jako

$$Q(\alpha, \alpha^*) \equiv \text{Tr} [\hat{\rho} \delta(\alpha - \hat{a}) \delta(\alpha^* - \hat{a}^\dagger)]. \quad (3.44)$$

Wstawiając rozkład jedynki na stany koherentne pomiędzy delty, otrzymujemy

$$\begin{aligned} Q(\alpha, \alpha^*) &= \frac{1}{\pi} \int d^2 \alpha' \text{Tr} [\hat{\rho} \delta(\alpha - \hat{a}) |\alpha'\rangle \langle \alpha'| \delta(\alpha^* - \hat{a}^\dagger)] = \\ &= \frac{1}{\pi} \int d^2 \alpha' \text{Tr} [\hat{\rho} \delta(\alpha - \alpha') |\alpha'\rangle \langle \alpha'| \delta(\alpha^* - \alpha'^*)] = \frac{1}{\pi} \text{Tr} [\hat{\rho} |\alpha\rangle \langle \alpha|] = \frac{1}{\pi} \langle \alpha | \hat{\rho} | \alpha \rangle. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Q -reprezentacja jest unormowana i nieujemna, co widać po podstawieniu rozkładu spektralnego $\hat{\rho}$. Przechodzimy teraz do wyznaczenia średniej operatora uporządkowanego anty-normalnie, czyli

$$\hat{O}_A(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) = \sum_{n,m} c_{nm} \hat{a}^n (\hat{a}^\dagger)^m. \quad (3.46)$$

Mamy

$$\begin{aligned}
\langle \hat{O}_A(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) \rangle &= \text{Tr} [\hat{\rho} \hat{O}_A(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)] = \sum_{n,m} c_{nm} \text{Tr} [\hat{\rho} \hat{a}^n (\hat{a}^\dagger)^m] = \\
&= \frac{1}{\pi} \sum_{n,m} c_{nm} \int d^2\alpha \text{Tr} [\hat{\rho} \hat{a}^n |\alpha\rangle \langle \alpha| (\hat{a}^\dagger)^m] = \\
&= \frac{1}{\pi} \sum_{n,m} c_{nm} \int d^2\alpha \text{Tr} [\hat{\rho} |\alpha\rangle \langle \alpha| \alpha^n \alpha^{*m}] = \int d^2\alpha \frac{1}{\pi} \langle \alpha | \hat{\rho} | \alpha \rangle \sum_{n,m} c_{nm} \alpha^n \alpha^{*m} = \\
&= \int d^2\alpha Q(\alpha, \alpha^*) O_A(\alpha, \alpha^*). \tag{3.47}
\end{aligned}$$

Wynik ten potwierdza, że Q -reprezentacja służy do wyznaczania średnich z operatorów uporządkowanych anty-normalnie. Zauważmy, że podstawiając do (3.45) wyrażenie na P z równania (3.20), znajdujemy związek między dwiema poznanymi dotychczas reprezentacjami, czyli

$$Q(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha' e^{-|\alpha - \alpha'|^2} P(\alpha', \alpha'^*). \tag{3.48}$$

3.2.1 Q -reprezentacja — przykłady

Stan termiczny

Dla stanu termicznego w postaci (3.37), otrzymujemy natychmiast

$$Q(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{\pi(1 + \bar{n})} e^{-\frac{|\alpha|^2}{1 + \bar{n}}}. \tag{3.49}$$

Łatwo sprawdzić, że wynik ten można otrzymać z (3.39) poprzez spłot (3.48).

Stan koherentny

Gdy $\hat{\rho} = |\alpha_0\rangle\langle\alpha_0|$, dostajemy natychmiast

$$Q(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{\pi} e^{-|\alpha - \alpha_0|^2}. \tag{3.50}$$

Raz jeszcze, wynik ten można otrzymać z (3.41) poprzez spłot (3.48).

Stan Focka

Jeżeli układ jest reprezentowany czystym stanem Focka, Q -reprezentacja przyjmuje szczególnie prostą formę

$$Q(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{\pi} |\langle n | \alpha \rangle|^2 = \frac{e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{2n}}{\pi n!}. \tag{3.51}$$

Stan ściśnięty

Wyprowadzenie wyrażenia na Q -reprezentację stanu ściśniętego jest znacznie trudniejsze. Zaczynamy od definicji

$$Q(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{\pi} |\langle \alpha | \beta, \xi \rangle|^2, \tag{3.52}$$

gdzie stan $|\beta, \xi\rangle$ zdefiniowany jest w równaniu (2.40). Naszym zadaniem jest zatem policzenie iloczynu skalarnego stanu koherentnego ze stanem koherentnym ściśniętym, czyli

$$\langle \alpha | \beta, \xi \rangle = \langle \alpha | \hat{S}(\xi) | \beta \rangle. \quad (3.53)$$

W tym celu wykorzystamy fakt, że stan koherentny α jest stanem własnym operatora anihilacji, co oznacza, że powyższy związek można przepisać w postaci

$$\langle \alpha | \beta, \xi \rangle = \langle \alpha | \hat{S}(\xi) | \beta \rangle = \frac{1}{\alpha^*} \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{S}(\xi) | \beta \rangle = \frac{1}{\alpha^*} \langle \alpha | \hat{S}(\xi) \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a}^\dagger \hat{S}(\xi) | \beta \rangle. \quad (3.54)$$

Operator kreacji, obłożony operatorami ściskania, zgodnie z równaniem (2.38b), wynosi

$$\hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a}^\dagger \hat{S}(\xi) = \hat{a}^\dagger \cosh r - \hat{a} e^{-i\theta} \sinh r \quad (3.55)$$

Zatem otrzymujemy

$$\langle \alpha | \beta, \xi \rangle = \frac{1}{\alpha^*} \langle \alpha | \hat{S}(\xi) \left(\hat{a}^\dagger \cosh r - \hat{a} e^{-i\theta} \sinh r \right) | \beta \rangle. \quad (3.56)$$

Zauważmy teraz, że zachodzi związek

$$\hat{a}^\dagger | \beta \rangle = \left(\frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{2} \beta^* \right) | \beta \rangle. \quad (3.57)$$

By to wykazać, zauważmy najpierw, że

$$\hat{a}^\dagger | \beta \rangle = e^{-\frac{|\beta|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n \sqrt{n+1}}{\sqrt{n!}} |n+1\rangle = e^{-\frac{|\beta|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n (n+1)}{\sqrt{(n+1)!}} |n+1\rangle. \quad (3.58)$$

Następnie liczymy pochodną stanu koherentnego po β , czyli

$$\frac{\partial}{\partial \beta} | \beta \rangle = -\frac{\beta^*}{2} | \beta \rangle + e^{-\frac{|\beta|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \beta^{n-1}}{\sqrt{n!}} |n\rangle = -\frac{\beta^*}{2} | \beta \rangle + e^{-\frac{|\beta|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1) \beta^n}{\sqrt{(n+1)!}} |n+1\rangle, \quad (3.59)$$

co w połączeniu z (3.58) dowodzi szukanego związku (3.57). Podstawiając ten wynik do (3.56), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \beta, \xi \rangle &= \frac{1}{\alpha^*} \langle \alpha | \hat{S}(\xi) \left[\left(\frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{2} \beta^* \right) \cosh r - \beta e^{-i\theta} \sinh r \right] | \beta \rangle = \\ &= \frac{1}{\alpha^*} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{2} \beta^* \right) \cosh r - \beta e^{-i\theta} \sinh r \right] \langle \alpha | \hat{S}(\xi) | \beta \rangle \\ &= \frac{1}{\alpha^*} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{2} \beta^* \right) \cosh r - \beta e^{-i\theta} \sinh r \right] \langle \alpha | \beta, \xi \rangle. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Otrzymaliśmy zatem proste równanie różniczkowe

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \langle \alpha | \beta, \xi \rangle = \left(\alpha^* \operatorname{sech} r - \frac{1}{2} \beta^* + \beta e^{-i\theta} \tanh r \right) \langle \alpha | \beta, \xi \rangle, \quad (3.61)$$

którego rozwiązanie jest postaci

$$\langle \alpha | \beta, \xi \rangle = K(\alpha, \alpha^*, \beta^*, r, \theta) e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2 + \alpha^* \beta \operatorname{sech} r + \frac{1}{2}\beta^2 e^{-i\theta} \tanh r}, \quad (3.62)$$

gdzie K jest stałą (czyli wielkością niezależną od β), którą należy wyznaczyć. Zauważmy, że nie wynika ona wyłącznie z unormowania funkcji Q , lecz pewne jej własności są konsekwencją tego, że funkcja $\langle \alpha | \beta, \xi \rangle$ jest iloczynem skalarnym. W szczególności oznacza to, że

$$\langle \alpha | \hat{S}(\xi) | \beta \rangle^* = \langle \beta | \hat{S}^\dagger(\xi) | \alpha \rangle = \langle \beta | \hat{S}(-\xi) | \alpha \rangle. \quad (3.63)$$

Otrzymujemy zatem związek

$$K(\alpha, \alpha^*, \beta^*, r, \theta) e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2 + \frac{1}{2}\beta^2 e^{-i\theta} \tanh r} = K(\beta, \beta^*, \alpha^*, r, -\theta) e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}\alpha^2 e^{i\theta} \tanh r}. \quad (3.64)$$

Stąd wnioskujemy, że

$$K(\alpha, \alpha^*, \beta^*, r, \theta) = A e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}\alpha^2 e^{-i\theta} \tanh r}, \quad (3.65)$$

gdzie A jest stałą wynikającą z normalizacji funkcji Q . Zatem poszukiwana funkcja jest postaci

$$\langle \alpha | \beta, \xi \rangle = A e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2) + \alpha^* \beta \operatorname{sech} r + \frac{1}{2}(\beta^2 e^{-i\theta} - (\alpha^*)^2 e^{-i\theta}) \tanh r}, \quad (3.66)$$

Stąd funkcja Q stanu ściśniętego jest postaci

$$Q(\alpha, \alpha^*) = \frac{|A|^2}{\pi} e^{-(|\alpha|^2 + |\beta|^2) + (\alpha^* \beta + \alpha \beta^*) \operatorname{sech} r + \frac{1}{2}[(\beta^2 - \alpha^2) e^{-i\theta} + ((\beta^*)^2 - (\alpha^*)^2) e^{i\theta}] \tanh r}. \quad (3.67)$$

- wykazać, że $A^2 = \operatorname{sech} r$
- narysować Q .

3.3 Funkcja Wignera-Weyla

Zajmiemy się teraz kolejnym bardzo ważnym kwazi-rozkładem prawdopodobieństwa, czyli funkcją Wignera-Weyla, która służy do liczenia średnich z operatorów uporządkowanych symetrycznie. Zanim jednak zdefiniujemy funkcję W , zauważmy, że obie dotychczas zdefiniowane rozkłady, czyli

$$P(\alpha, \alpha^*) = \operatorname{Tr} [\delta(\alpha^* - \hat{a}^\dagger) \delta(\alpha - \hat{a}) \hat{\rho}] \quad (3.68a)$$

$$Q(\alpha, \alpha^*) = \operatorname{Tr} [\delta(\alpha - \hat{a}) \delta(\alpha^* - \hat{a}^\dagger) \hat{\rho}], \quad (3.68b)$$

można wyrazić przy pomocy funkcji charakterystycznych. Mianowicie

$$P(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{\pi^2} \iint d^2 \beta e^{-i\beta \alpha^* - i\beta^* \alpha} C^{(n)}(\beta, \beta^*), \quad (3.69)$$

gdzie

$$C^{(n)}(\beta, \beta^*) = \operatorname{Tr} [e^{i\beta \hat{a}^\dagger} e^{i\beta^* \hat{a}} \hat{\rho}], \quad (3.70)$$

co wynika bezpośrednio z definicji funkcji δ . Analogicznie mamy

$$Q(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{\pi^2} \iint d^2\beta e^{-i\beta\alpha^* - i\beta^*\alpha} C^{(a)}(\beta, \beta^*), \quad (3.71)$$

gdzie

$$C^{(a)}(\beta, \beta^*) = \text{Tr} \left[e^{i\beta^*\hat{a}} e^{i\beta\hat{a}^\dagger} \hat{\rho} \right]. \quad (3.72)$$

Zauważmy, że obie te funkcje tworzące wyróżniają pewne szczególne uporządkowanie, to znaczy w $C^{(n)}$ operatory kreacji są po lewej stronie, zaś w $C^{(a)}$ po prawej, co w konsekwencji rzutuje na przydatność tych rozkładów do liczenia średnich z operatorów uporządkowanych w pewien konkretny sposób.

Wprowadzamy teraz taką funkcję tworzącą, która nie wyróżnia żadnego uporządkowania, traktując oba operatory tak samo. Mianowicie

$$C^{(s)}(\beta, \beta^*) = \text{Tr} \left[e^{i\beta^*\hat{a} + i\beta\hat{a}^\dagger} \hat{\rho} \right], \quad (3.73)$$

zaś stowarzyszony z tą funkcją tworzącą rozkład nazywamy funkcją Wignera-Weyla

$$W(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{\pi^2} \iint d^2\beta e^{-i\beta\alpha^* - i\beta^*\alpha} C^{(s)}(\beta, \beta^*). \quad (3.74)$$

Funkcja ta służy do liczenia średnich z operatorów uporządkowanych symetrycznie, na przykład

$$\frac{1}{2} \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger \rangle = \iint d^2\alpha W(\alpha, \alpha^*) \alpha \alpha^*. \quad (3.75)$$

W ogólności, możemy odwrócić związek między funkcją tworzącą a funkcją Wignera jako

$$C^{(s)}(\beta, \beta^*) = \iint d^2\alpha e^{i\beta\alpha^* + i\beta^*\alpha} W(\alpha, \alpha^*). \quad (3.76)$$

Zauważmy ponadto, że zachodzi

$$C^{(s)}(\beta, \beta^*) = \text{Tr} \left[e^{i\beta^*\hat{a} + i\beta\hat{a}^\dagger} \hat{\rho} \right] = e^{-\frac{|\beta|^2}{2}} \text{Tr} \left[e^{i\beta\hat{a}^\dagger} e^{i\beta^*\hat{a}} \hat{\rho} \right], \quad (3.77)$$

Widzimy zatem podobieństwo do funkcji $C^{(n)}$. Policzmy zatem przy pomocy funkcji W średnią z operatora uporządkowanego normalnie

$$\hat{O}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) = \sum_{n,m} c_{nm} (\hat{a}^\dagger)^n \hat{a}^m. \quad (3.78)$$

Zauważmy, że średnią z pojedynczych operatorów można otrzymać poprzez następujące odwzorowanie funkcji $C^{(s)}$,

$$\langle \hat{a} \rangle = \left[\frac{\partial}{\partial(i\beta^*)} + \frac{\beta}{2i} \right] C^{(s)}(\beta, \beta^*) \Big|_{\beta=\beta^*=0} \quad (3.79a)$$

$$\langle \hat{a}^\dagger \rangle = \left[\frac{\partial}{\partial(i\beta)} + \frac{\beta^*}{2i} \right] C^{(s)}(\beta, \beta^*) \Big|_{\beta=\beta^*=0}. \quad (3.79b)$$

Stąd w ogólności

$$\begin{aligned}
\langle \hat{O}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) \rangle &= \sum_{n,m} c_{nm} \left[\frac{\partial}{\partial(i\beta)} + \frac{\beta^*}{2i} \right]^n \left[\frac{\partial}{\partial(i\beta^*)} + \frac{\beta}{2i} \right]^m C^{(s)}(\beta, \beta^*) \Big|_{\beta=\beta^*=0} = \\
&= \sum_{n,m} c_{nm} \left[\frac{\partial}{\partial(i\beta)} + \frac{\beta^*}{2i} \right]^n \left[\frac{\partial}{\partial(i\beta^*)} + \frac{\beta}{2i} \right]^m \iint d^2\alpha e^{i\beta\alpha^* + i\beta^*\alpha} W(\alpha, \alpha^*) \Big|_{\beta=\beta^*=0} \\
&= \iint d^2\alpha O_S(\alpha, \alpha^*) W(\alpha, \alpha^*), \tag{3.80}
\end{aligned}$$

gdzie

$$O_S(\alpha, \alpha^*) \equiv \sum_{n,m} c_{nm} \left[\frac{\partial}{\partial(i\beta)} + \frac{\beta^*}{2i} \right]^n \left[\frac{\partial}{\partial(i\beta^*)} + \frac{\beta}{2i} \right]^m e^{i\beta\alpha^* + i\beta^*\alpha} \Big|_{\beta=\beta^*=0}. \tag{3.81}$$

Dla przykładu wykazać (strona 94):

- $\hat{O}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) = \hat{a}^\dagger \hat{a} \rightarrow O_S(\alpha, \alpha^*) = \alpha^* \alpha - \frac{1}{2}$
- $\hat{O}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) = \hat{a}^{\dagger 2} \hat{a} = \alpha^{*2} \alpha - \alpha^*$

3.4 Reprezentacje uogólnione

W kończącej sekcji tego rozdziału przedstawimy ogólny przepis na liczenie dowolnej reprezentacji stanu kwantowego. W tym celu wprowadzamy

$$\hat{\rho} = \pi \iint d^2\alpha F^{(\Omega)}(\alpha, \alpha^*) \hat{\Delta}^{(\Omega)}(\alpha - \hat{a}, \alpha^* - \hat{a}^\dagger), \tag{3.82}$$

gdzie $F^{(\Omega)}(\alpha, \alpha')$ nazywamy uogólnioną reprezentacją $\hat{\rho}$, zaś

$$\hat{\Delta}^{(\Omega)}(\alpha - \hat{a}, \alpha^* - \hat{a}^\dagger) = \frac{1}{\pi^2} \iint d^2\beta e^{\Omega(\beta, \beta^*)} e^{-\beta(\alpha^* - \hat{a}^\dagger) + \beta^*(\alpha - \hat{a})}. \tag{3.83}$$

Jak widać, postać F zależy od tego, jak wygląda $\Omega(\beta, \beta^*)$. W szczególności, gdy $\Omega(\beta, \beta^*) = \frac{|\beta|^2}{2}$, F jest Q -reprezentacją. Gdy $\Omega(\beta, \beta^*) = 0$, F jest funkcją Wignera, zaś gdy $\Omega(\beta, \beta^*) = -\frac{|\beta|^2}{2}$ dostajemy P -reprezentację Glaubera. Rozważymy teraz po kolei te trzy przypadki i wykażemy, że rzeczywiście zachodzą wspomniane powyżej związki.

Przypadek $\Omega(\beta, \beta^*) = -\frac{|\beta|^2}{2}$

W tym przypadku, na mocy twierdzenia BCH, mamy

$$\begin{aligned}
\hat{\Delta}^{(\Omega)}(\alpha - \hat{a}, \alpha^* - \hat{a}^\dagger) &= \frac{1}{\pi^2} \iint d^2\beta e^{\beta^*(\alpha - \hat{a})} e^{-\beta(\alpha^* - \hat{a}^\dagger)} \\
&= \frac{1}{\pi^2} \iint d^2\beta \int \frac{d^2\alpha'}{\pi} e^{\beta^*(\alpha - \hat{a})} |\alpha'\rangle \langle \alpha'| e^{-\beta(\alpha^* - \hat{a}^\dagger)} = \\
&= \frac{1}{\pi^2} \iint d^2\beta \int \frac{d^2\alpha'}{\pi} e^{\beta^*(\alpha - \alpha')} |\alpha'\rangle \langle \alpha'| e^{-\beta(\alpha^* - \alpha'^*)} = \frac{1}{\pi} |\alpha\rangle \langle \alpha|, \tag{3.84}
\end{aligned}$$

co po podstawieniu do (3.82) odtwarza definicję P -reprezentacji.

Przypadek $\Omega(\beta, \beta^*) = \frac{|\beta|^2}{2}$

W tym przypadku, na mocy twierdzenia BCH, mamy

$$\hat{\Delta}^{(\Omega)}(\alpha - \hat{a}, \alpha^* - \hat{a}^\dagger) = \frac{1}{\pi^2} \iint d^2\beta e^{-\beta(\alpha^* - \hat{a}^\dagger)} e^{\beta^*(\alpha - \hat{a})}. \quad (3.85)$$

Wynik podstawiamy do macierzy gęstości (3.82), zaś otrzymany operator obkładamy stanem koherentnym, dostając

$$\frac{1}{\pi} \langle \alpha' | \hat{\rho} | \alpha' \rangle = \iint d^2\alpha F^{(\Omega)}(\alpha, \alpha^*) \langle \alpha' | \hat{\Delta}^{(\Omega)}(\alpha - \hat{a}, \alpha^* - \hat{a}^\dagger) | \alpha' \rangle = F^{(\Omega)}(\alpha', \alpha'^*), \quad (3.86)$$

co z kolei odtwarza definicję Q -reprezentacji.

Przypadek $\Omega(\beta, \beta^*) = 0$

Wprowadzamy operator $\hat{\hat{\Delta}}$, który jest odwrotny do $\hat{\Delta}$ w takim sensie, że

$$\text{Tr} \left[\hat{\Delta}^{(\Omega)}(\alpha - \hat{a}, \alpha^* - \hat{a}^\dagger) \hat{\hat{\Delta}}^{(\Omega)}(\alpha' - \hat{a}, \alpha'^* - \hat{a}^\dagger) \right] = \frac{1}{\pi} \delta^{(2)}(\alpha - \alpha'). \quad (3.87)$$

Można **wykazać**, że zachodzi

$$\hat{\hat{\Delta}}^{(\Omega)}(\alpha' - \hat{a}, \alpha'^* - \hat{a}^\dagger) = \frac{1}{\pi^2} \iint d^2\beta e^{-\Omega(\beta, \beta^*)} e^{\beta(\alpha'^* - \hat{a}^\dagger) - \beta^*(\alpha' - \hat{a})}. \quad (3.88)$$

Przemnażamy teraz równanie (3.82) przez $\hat{\hat{\Delta}}$ i liczymy ślad, co daje w ogólności

$$F^{(\Omega)}(\alpha, \alpha^*) = \text{Tr} \left[\hat{\rho} \hat{\hat{\Delta}}^{(\Omega)}(\alpha - \hat{a}, \alpha^* - \hat{a}^\dagger) \right]. \quad (3.89)$$

W szczególnym przypadku $\Omega = 0$ otrzymujemy

$$F^{(0)}(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{\pi^2} \iint d^2\beta \text{Tr} \left[\hat{\rho} e^{-\beta \hat{a}^\dagger + \beta^* \hat{a}} \right] e^{\beta \alpha'^* - \beta^* \alpha'}, \quad (3.90)$$

co odtwarza wyrażenie (3.74) na funkcję Wignera po zamianie zmiennych $\beta \rightarrow -i\beta$ oraz $\beta^* \rightarrow i\beta^*$.

Kończymy na tym ogólne rozważania dotyczące opisu stanów kwantowych przy pomocy reprezentacji w przestrzeni fazowej. Przechodzimy teraz do zastosowań zdobytej dotychczas wiedzy, zaczynając od zagadnień spójności, funkcji korelacji i interferometrii światła.

Rozdział 4

Interferometria i spójność

W tym rozdziale przedstawimy zarys kwantowej teorii spójności pola elektromagnetycznego. Odtworzymy rozumowanie, które przedstawił Roy Glauber w swoich przełomowych pracach z lat 60-tych na temat teorii spójności, za które w 2005 roku wyróżniony został nagrodą Nobla [?, ?]. Zanim jednak przejdziemy do sformułowania teorii spójności oraz wprowadzimy związane z nią funkcje korelacji, opiszemy model interferometru Hanbury–Brown & Twiss, który wykorzystywany jest do mierzenia rozmiarów kątowych gwiazd.

4.1 Interferometr typu Hanbury–Brown & Twiss

Rozważmy następujące zagadnienie: w znacznej odległości od Ziemi znajdują się dwa źródła światła. Mogą to być dwie gwiazdy, a może też być tak, że dwoma źródłami są raczej dwa skrajne punkty na powierzchni jednej gwiazdy. Naszym zadaniem jest, dokonując pomiaru docierającego do Ziemi światła, określić jaka jest odległość kątowna pomiędzy dwoma źródłami. Założmy, że docierające światło składa się z dwu fal płaskich o wektorach falowych \mathbf{k} i \mathbf{k}' , odpowiadających dwóm kierunkom związanym ze źródłami. Ponadto zakładamy, że częstotści ω są takie same dla obu kierunków, co zawsze można wymusić przez odpowiednie odfiltrowanie sygnału.

Rozważany układ pomiarowy składa się z dwu lusterek, umieszczonych w punktach \mathbf{r}_1 i \mathbf{r}_2 , do których dociera sygnał z gwiazd. Następnie sygnał kierowany jest do detektora, który umieszczony jest po środku między lustrami. Mierzone na detektorze natężenie światła (przy założeniu doskonałej wydajności) wynosi

$$I = \langle |E|^2 \rangle = \left\langle |E_k(e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1} + e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_2}) + E_{k'}(e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}_1} + e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}_2})|^2 \right\rangle. \quad (4.1)$$

Założyliśmy, że fala jest spolaryzowana liniowo, zaś zależne od czasu wspólne czynniki $e^{i\omega t}$ wnoszą tylko nieistotną globalną fazę. Średniowanie w tym wyrażeniu odbywa się zarówno po możliwych fluktuacjach amplitudy pochodzących od samego źródła (które jest w tym przypadku termiczne, albowiem emisja pochodzi z powierzchni gwiazdy o ustalonej temperaturze), jak i po fluktuacjach pochodzących z zaburzeń na skutek przechodzenia światła przez atmosferę. Termiczne źródło charakteryzuje się zerową średnią amplitudą, czyli $\langle E_k \rangle = \langle E_{k'} \rangle = 0$ oraz brakiem poziadiagonalnej korelacji najniższego rzędu

$\langle E_k^* E_{k'} \rangle = 0$. Zakładając, że średnie natężenie z obu źródeł jest takie samo (założenie to jest czynione tylko dla uproszczenia rachunków, lecz nie jest konieczne dla dalszego toku rozumowania), czyli $\langle |E_k|^2 \rangle = \langle |E_{k'}|^2 \rangle = I_0$, otrzymujemy

$$I = 4I_0 \left\{ 1 + \cos \left[\frac{1}{2}(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \right] \times \cos \left[\frac{1}{2}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \right] \right\}. \quad (4.2)$$

Jeżeli założymy, że $\mathbf{k} - \mathbf{k}'$ jest równoległe do $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ oraz że $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = r_0$ a $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = k\varphi$, gdzie φ jest poszukiwanym rozmiarem kątowym, otrzymujemy

$$I = 4I_0 \left\{ 1 + \cos \left[\frac{1}{2}(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \right] \times \cos \left(\frac{\pi r_0 \varphi}{\lambda} \right) \right\}, \quad (4.3)$$

gdzie wektor falowy k łączy się z docierającą długością fali związkiem $k = 2\pi/\lambda$. Wadą tej metody mierzenia rozmiaru kąтового, jest obecność bardzo szybko zmiennego czynnika zależnego od sumy wektorów falowych. Ta szybka zmienność sprawia, że efektywnie pierwsza z funkcji trygonometrycznych uśrednia się praktycznie do zera, co sprawia, że natężenie I praktycznie nie zależy od φ .

Alternatywną metodę mierzenia rozmiarów kątowych gwiazd zaproponowali Hanbury-Brown i Twiss w pracy [?]. Ich kluczowym osiągnięciem było zauważenie, że można pozbyć się szybko oscylującego czynnika poprzez mierzenie natężeń niezależnie w punktach \mathbf{r}_1 i \mathbf{r}_2 , zamiast — jak w poprzednim schemacie — zbieranie całego sygnału do jednego punktu. Po wykonaniu pomiarów w dwu punktach, wyniki się koreluje i uśrednia. W ten sposób otrzymuje się wielkość, którą nazywamy funkcją korelacji natężeń, i która niesie informację o rozmiarze kątowym lecz pozbawiona jest szybkiej zmienności.

Natężenie mierzone w punkcie \mathbf{r}_i dane jest przez

$$I(\mathbf{r}_i) = |E_k|^2 + |E_{k'}|^2 + (E_k E_{k'}^* e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}_i} + \text{c.c.}) \quad (4.4)$$

Wyniki zebrane z dwu punktów są następnie przemnażane i uśredniane, dając

$$\langle I(\mathbf{r}_1) I(\mathbf{r}_2) \rangle = \left\langle \left[|E_k|^2 + |E_{k'}|^2 + (E_k E_{k'}^* e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}_1} + \text{c.c.}) \right] \times \left[|E_k|^2 + |E_{k'}|^2 + (E_k E_{k'}^* e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}_2} + \text{c.c.}) \right] \right\rangle. \quad (4.5)$$

Widać, że w powyższej średniej nie występują człony zależne od sumy wektorów falowych, pojawią się zaś porządkane człony typu $(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, które prowadzą do zależności $\frac{\pi r_0 \varphi}{\lambda}$ od rozmiaru kąтового φ . W następnych częściach wykazemy, że funkcje korelacji, której przykładem jest korelacja natężeń w powyższym równaniu, niosą znaczną ilość informacji o naturze stanu kwantowego. Ponieważ funkcje korelacji są bezpośrednio dostępne w doświadczeniu, ich poznanie i zrozumienie jest szczególnie istotne.

4.2 Funkcje korelacji pola elektromagnetycznego

By zrozumieć dlaczego funkcje korelacji w optyce kwantowej mają taką, a nie inną postać, należy zastanowić się, jak przebiega proces detekcji pojedynczych fotonów. W tym celu przypomnijmy, że operator pola elektrycznego ma postać

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \mathbf{e}_{\mathbf{k}, \sigma} \mathcal{E}_{\mathbf{k}, \sigma} \hat{a}_{\mathbf{k}, \sigma} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)} + \text{H.c.} \equiv \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t). \quad (4.6)$$

Detektory światła zazwyczaj wykorzystują efekt fotoelektryczny: padający na powierzchnię detektora foton jest pochłaniany, powodując jonizację atomu. Wolny elektron jest powielany, dając makroskopowy prąd elektryczny, którego zarejestrowanie utożsamiane jest z pomiarem pojedynczego fotonu. Widzimy zatem, że kluczowym składnikiem fotodetekcji jest proces anihilacji fotonu. Możemy wyznaczyć prawdopodobieństwo zmierzenia jednego fotonu w punkcie \mathbf{r} i w czasie t jako

$$w_1(\mathbf{r}, t) = |\langle f | \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | i \rangle|^2. \quad (4.7)$$

Wkład do tego wyrażania ma tylko część operatora pola o dodatniej częstotliwości. Stany $|i\rangle$ oraz $|f\rangle$ to odpowiednio początkowy i końcowy stan pola (czyli przed i po detekcji). W następnym kroku zauważamy, że stan po detekcji jest nieistotny dla zagadnienia, wkład do prawdopodobieństwa mają zatem wszystkie możliwe $|f\rangle$. Stąd dostajemy

$$w_1(\mathbf{r}, t) \rightarrow \sum_f |\langle f | \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | i \rangle|^2 = \sum_f \langle i | \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) | f \rangle \langle f | \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | i \rangle \quad (4.8)$$

Ponieważ stany $|f\rangle$ tworzą bazę zupełną, otrzymujemy wyrażenie

$$w_1(\mathbf{r}, t) = \langle i | \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | i \rangle. \quad (4.9)$$

Zatem prawdopodobieństwo zmierzenia fotonu w punkcie (\mathbf{r}, t) dane jest przez średnią z hermitowskiego operatora $\hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ na początkowym stanie pola. W sytuacji, gdy stan ten nie jest czysty, lecz mieszany, otrzymujemy

$$w_1(\mathbf{r}, t) = \text{Tr} \left[\hat{\rho} \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \right]. \quad (4.10)$$

Wprowadzamy teraz funkcję, która jest uogólnieniem powyższego wyrażenia na dwa punkty (\mathbf{r}_1, t_1) i (\mathbf{r}_2, t_2) , czyli

$$G^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t_1, t_2) = \text{Tr} \left[\hat{\rho} \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) \right]. \quad (4.11)$$

Obiekt ten nazywamy funkcją korelacji pierwszego rzędu. Zauważmy, że w ogólności $G^{(1)}$ nie jest rzeczywista, albowiem $\hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2)$ nie jest operatorem hermitowskim. Prawdopodobieństwo $w_1(\mathbf{r}, t)$ jest szczególnym przypadkiem funkcji korelacji pierwszego rzędu, gdyż

$$w_1(\mathbf{r}, t) = G^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; t, t). \quad (4.12)$$

Tok rozumowania zarysowany powyżej można rozszerzyć na przypadek pomiaru dwu fotonów. Wtedy łączne prawdopodobieństwo zmierzenia jednego fotonu w punkcie (\mathbf{r}_1, t_1) , zaś drugiego w (\mathbf{r}_2, t_2) dane będzie przez

$$w_2(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) = |\langle f | \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1) | i \rangle|^2. \quad (4.13)$$

Pozbycie się informacji o stanie końcowym daje w ogólności

$$w_2(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) = \text{Tr} \left[\hat{\rho} \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}_2, t_2) \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1) \right]. \quad (4.14)$$

Zatem funkcja korelacji drugiego rzędu dana będzie przez

$$\begin{aligned} G^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4; t_1, t_2, t_3, t_4) &= \\ &= \text{Tr} \left[\hat{\rho} \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}_2, t_2) \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}_3, t_3) \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}_4, t_4) \right]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Procedurę tę można kontynuować, licząc n -cząstkowe łączne prawdopodobieństwo detekcji n fotonów oraz związaną z nim funkcję korelacji

$$\begin{aligned} G^{(n)}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, \mathbf{r}_{n+1}, \dots, \mathbf{r}_{2n}; t_1, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, t_{2n}) &= \\ &= \text{Tr} \left[\hat{\rho} \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) \dots \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}_n, t_n) \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}_{n+1}, t_{n+1}) \dots \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}_{2n}, t_{2n}) \right]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Zauważmy, że zarówno funkcje korelacji jak i stoważyszone z nimi prawdopodobieństwa są średnimi z operatorów (hermitowskich bądź nie) uporządkowanych normalnie, to znaczy wszystkie operatory kreacji (ukryte w symbolach $\hat{\mathbf{E}}^{(-)}$) są po lewej, zaś anihilacji (ukryte w symbolach $\hat{\mathbf{E}}^{(+)}$) są po prawej stronie. Zauważmy również, że w ogólności korelacje klasycznych natężeń są czym innym niż odpowiadające im prawdopodobieństwa łączne policzone zgodnie z przepisami mechaniki kwantowej. Co prawda na poziomie jednociałowym różnicy nie ma, albowiem (4.9) można zapisać jako

$$w_1(\mathbf{r}, t) = \langle \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle \hat{I}(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad (4.17)$$

co stanowi bezpośrednią analogię do klasycznego $w_1(\mathbf{r}, t) = \langle I(\mathbf{r}, t) \rangle$.

Niemniej, już na poziomie dwuciałowym, równanie (4.14) różni się od klasycznego $\langle I(\mathbf{r}_1, t_1) I(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle$ albowiem

$$\hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}_2, t_2) \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1) \neq \hat{I}(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{I}(\mathbf{r}_2, t_2). \quad (4.18)$$

Uporządkowanie operatorów i nietrywialne reguły komutacyjne stają się istotne.

Dla porządku przywołajmy jeszcze wyrażenie na unormowane funkcje korelacji, tak zwane “małe g ”. W przypadku, gdy wszystkie zmienne położeniowe są równe, zaś czas w argumente jest t oraz $t + \tau$, funkcje te są — jak wykażemy — miarą spójności czasowej i w dwóch najniższych rzędach są postaci

$$g^{(1)}(\mathbf{r}, \tau) = \frac{\langle \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t + \tau) \rangle}{\sqrt{\langle \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \rangle \langle \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t + \tau) \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t + \tau) \rangle}} \quad (4.19a)$$

$$g^{(2)}(\mathbf{r}, \tau) = \frac{\langle \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t + \tau) \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t + \tau) \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \rangle}{\langle \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \rangle \langle \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t + \tau) \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t + \tau) \rangle}. \quad (4.19b)$$

W przypadku jednomodowym, zależne od czasu i od przestrzeni współczynniki fazowe kasują się, pozostawiając szczególnie proste wyrażenia

$$g^{(1)}(\tau) = \frac{\langle \hat{a}^\dagger(t) \hat{a}(t + \tau) \rangle}{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle} \quad (4.20a)$$

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle \hat{a}^\dagger(t) \hat{a}^\dagger(t + \tau) \hat{a}(t + \tau) \hat{a}(t) \rangle}{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle^2}. \quad (4.20b)$$

Wyznamy teraz te wielkości w dwóch przypadkach. Wykorzystamy w tym celu doświadczenie zdobyte w poprzednim rozdziale. Jako że wyznaczamy średnie z operatorów uporządkowanych normalnie, do ich policzenia wykorzystamy P -reprezentację stanu kwantowego. Na pierwszy ogień pójdzie stan termiczny, dla którego (patrz równanie (3.39))

$$P(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{\pi \langle \hat{n} \rangle} e^{-\frac{|\alpha|^2}{\langle \hat{n} \rangle}}. \quad (4.21)$$

Wtedy mamy

$$g^{(2)}(0) = \frac{\iint d^2\alpha P(\alpha, \alpha^*) |\alpha|^4}{(\iint d^2\alpha P(\alpha, \alpha^*) |\alpha|^2)^2} = 2. \quad (4.22)$$

Z kolei dla stanu koherentnego $|\alpha\rangle_0$, dla którego

$$P(\alpha, \alpha^*) = \delta^{(2)}(\alpha - \alpha_0) \quad (4.23)$$

otrzymujemy

$$g^{(2)}(0) = \frac{\iint d^2\alpha P(\alpha, \alpha^*) |\alpha|^4}{(\iint d^2\alpha P(\alpha, \alpha^*) |\alpha|^2)^2} = 1. \quad (4.24)$$

Pokażemy teraz, w jaki sposób spójność pierwszego rzędu łączy się z widzialnością prążków interferencyjnych w doświadczeniu Younga.

4.3 Spójność pierwszego rzędu i doświadczenie Younga

Interferometr Younga składa się ze źródła, które oświetla dwie szczeliny znajdujące się w położeniach \mathbf{r}_1 oraz \mathbf{r}_2 . Za szczelinami znajduje się ekran, na którym w punkcie \mathbf{r} powstaje obraz szczelin. Pole elektryczne, które dociera do tego punktu można wyrazić jako superpozycję pól z punktów \mathbf{r}_1 i \mathbf{r}_2 w czasach odpowiednio $t_1 = |\mathbf{r}_1|/c$ i $t_2 = |\mathbf{r}_2|/c$ wcześniejszych. Mamy zatem, zakładając liniową polaryzację źródła,

$$\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = K_1 \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t - t_1) + K_2 \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t - t_2), \quad (4.25)$$

gdzie K_1 i K_2 są współczynnikami dyfrakcyjnymi mówiącymi o tym, że *de facto* fala wychodząca ze szczeliny jest falą kulistą. Wyznamy teraz natężenie pola w tym punkcie. Mamy

$$\begin{aligned} \langle \hat{I}(\mathbf{r}, t) \rangle &= \langle \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \rangle \\ &= |K_1|^2 \langle \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t - t_1) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t - t_1) \rangle \\ &+ |K_2|^2 \langle \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_2, t - t_2) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t - t_2) \rangle \\ &+ 2\text{Re} \left[K_1^* K_2 \langle \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t - t_1) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t - t_2) \rangle \right]. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Wynik ten można wyrazić przez funkcję korelacji pierwszego rzędu (4.11). Mianowicie

$$\begin{aligned} \langle \hat{I}(\mathbf{r}, t) \rangle &= |K_1|^2 G^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, t - t_1, t - t_1) + |K_2|^2 G^{(1)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, t - t_2, t - t_2) \\ &\quad + 2\text{Re} \left[K_1^* K_2 G^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t - t_1, t - t_2) \right]. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Zakładając, że pole jest stacjonarne, otrzymujemy

$$\langle \hat{I}(\mathbf{r}, t) \rangle = |K_1|^2 G^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, 0) + |K_2|^2 G^{(1)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, 0) + 2\text{Re} \left[K_1^* K_2 G^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) \right], \quad (4.28)$$

gdzie $\tau = t_1 - t_2$. Przyjmując

$$\langle \hat{I}^{(i)}(\mathbf{r}) \rangle = |K_i|^2 G^{(1)}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_i, 0) \quad (4.29)$$

otrzymujemy

$$\langle \hat{I}(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle \hat{I}^{(1)}(\mathbf{r}) \rangle + \langle \hat{I}^{(2)}(\mathbf{r}) \rangle + 2\sqrt{\langle \hat{I}^{(1)}(\mathbf{r}) \rangle \langle \hat{I}^{(2)}(\mathbf{r}) \rangle} \text{Re} \left[g^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) \right], \quad (4.30)$$

gdzie “małe g” dane jest przez

$$g^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) = \frac{G^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)}{\sqrt{G^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \tau) G^{(1)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, \tau)}}. \quad (4.31)$$

Wyrażenie natężenia przez unormowaną funkcję korelacji, tak jak w (4.30), uwypukla znaczenie tej wielkości. Ponieważ wszelkie możliwe oscylacje natężenia związane są właśnie z członem proporcjonalnym do $g^{(1)}$, to funkcja ta jest miarą widzialności prążków. Zapisując

$$g^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) = |g^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau)| e^{i\theta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau)}, \quad (4.32)$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \langle \hat{I}(\mathbf{r}, t) \rangle &= \langle \hat{I}^{(1)}(\mathbf{r}) \rangle + \langle \hat{I}^{(2)}(\mathbf{r}) \rangle \\ &\quad + 2\sqrt{\langle \hat{I}^{(1)}(\mathbf{r}) \rangle \langle \hat{I}^{(2)}(\mathbf{r}) \rangle} |g^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau)| \cos(\theta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau)). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Widzialność prążków zdefiniowana jest jako

$$\nu = \frac{\langle \hat{I}(\mathbf{r}, t) \rangle_{\max} - \langle \hat{I}(\mathbf{r}, t) \rangle_{\min}}{\langle \hat{I}(\mathbf{r}, t) \rangle_{\max} + \langle \hat{I}(\mathbf{r}, t) \rangle_{\min}} = 2 \frac{\sqrt{\langle \hat{I}^{(1)}(\mathbf{r}) \rangle \langle \hat{I}^{(2)}(\mathbf{r}) \rangle}}{\langle \hat{I}^{(1)}(\mathbf{r}) \rangle + \langle \hat{I}^{(2)}(\mathbf{r}) \rangle} |g^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau)|. \quad (4.34)$$

W przypadku, gdy natężenia są równe dostajemy po prostu

$$\nu = |g^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau)|. \quad (4.35)$$

Stąd widać, że $g^{(1)}$ jest miarą koherencji pierwszego rzędu. Ponieważ na mocy nierówności Cauchy-Schwarza $0 \leq |g^{(1)}| \leq 1$, najbardziej spójne jest światło koherentne, które nasycza górną granicę. Jest to kolejne uzasadnienie nazwy “stan koherentny” — jest to taki, który wykazuje najwyższą spójność pierwszego rzędu.

4.4 Spójność drugiego rzędu

Zauważmy, że informacja zawarta w $g^{(1)}$ jest ograniczona. Ten sam wynik na funkcję spójności pierwszego rzędu uzyskuje się biorąc światło termiczne jak i koherentne. Oznacza to, że by zyskać szerszą wiedzę o własnościach pola, należy rozważyć funkcje korelacji wyższego rzędu. W tym rozdziale pokażemy, w jaki sposób informacje o $g^{(2)}$ można pozyskać z doświadczenia typu Hanbury–Brown & Twiss.

Przypomnijmy, że doświadczenie HBT polega na detekcji natężenia światła na dwóch detektorach, znajdujących się w punktach \mathbf{r}_1 oraz \mathbf{r}_2 , w chwili czasu t . Prawdopodobieństwo łączne zmierzenia sygnału na obu detektorach, jest, jak argumentowaliśmy, związane z funkcją korelacji drugiego rzędu

$$G^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t) = \text{Tr} \left[\hat{\rho} \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t) \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}_2, t) \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t) \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t) \right]. \quad (4.36)$$

Zakładamy, że światło docierające do detektorów jest sumą dwóch modów, zaś każdy z nich reprezentowany jest przez falę płaską. Mamy zatem (przyjmując ponadto polaryzację liniową światła)

$$\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_{\mathbf{k}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \hat{a}_{\mathbf{k}'} e^{-i\omega_{\mathbf{k}'}t + i\mathbf{k}'\mathbf{r}} \right). \quad (4.37)$$

Stąd po podstawieniu do (4.36), dostajemy łącznie szesnaście członów składających się na funkcję korelacji drugiego rzędu. Jeżeli stan pola jest taki, że oba mody są niezależne (na przykład promieniowanie pochodzące z dwóch gwiazd), a ponadto wszelkie nieparzyste średnie znikają, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mathbf{k}}^{-4} G^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t) &= \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}} \rangle + \langle \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'} \hat{a}_{\mathbf{k}'} \rangle + \\ &+ \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}'} \rangle \left(1 + e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)} \right) + \langle \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'} \hat{a}_{\mathbf{k}} \rangle \left(1 + e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)} \right). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Wyrażenie to upraszcza się, jeżeli źródła są statystycznie takie same, czyli $\langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \rangle = \langle \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'} \rangle = \langle \hat{n} \rangle$ oraz $\langle (\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}})^2 \rangle = \langle (\hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'})^2 \rangle = \langle \hat{n}^2 \rangle$. Wtedy otrzymujemy

$$G^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t) = 2\varepsilon_{\mathbf{k}}^4 \left[\langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle + \langle \hat{n} \rangle (1 + \cos[(\mathbf{k} - \mathbf{k}')(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2))] \right]. \quad (4.39)$$

Dla termicznego źródła światła mamy $\langle \hat{n}^2 \rangle = 2\langle \hat{n} \rangle^2 + \langle \hat{n} \rangle$, gdzie $\langle \hat{n} \rangle = (e^{\frac{\hbar\omega}{k_b T}} - 1)^{-1}$, dostajemy zatem

$$G^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t) = 2\langle \hat{n} \rangle^2 \varepsilon_{\mathbf{k}}^4 \left[3 + \cos[(\mathbf{k} - \mathbf{k}')(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)] \right]. \quad (4.40)$$

Zatem funkcja korelacji wykazuje oscylacje pozwalające na zmierzenie odległości kątowej, mimo że źródła są niezależne.

4.5 Detekcja homodynowa

Przedstawimy teraz powszechnie używaną metodę wykrywania ściskania stanu pola elektromagnetycznego. Metoda ta, oparta na pomiarze wariancji liczby

fotonów na detektorze, przedstawia powszechnie używany w optyce schemat detekcji homodynowej.

W schemacie tym, oprócz jednomodowego pola kwantowego opisywanego operatorem anihilacji \hat{a} , wprowadzamy pole pomocnicze \hat{b} . Oba pola mają tę samą częstość, tak by wszystkie wyniki nie zależały od czasu. Sygnał z obu pól pada na idealną (czyli bezstratną) płytkę światłodziącą o amplitudowym współczynniku odbicia r i przejścia t , czyli

$$r^2 + t^2 \equiv R + T = 1. \quad (4.41)$$

Oznaczmy przez \hat{c} i \hat{d} mody światła po przejściu przez płytkę. Unitarna transformacja kanoniczna łącząca mody wejściowe z wyjściowymi jest postaci

$$\hat{c} = t\hat{a} + ir\hat{b} \quad (4.42)$$

$$\hat{d} = ir\hat{a} + t\hat{b}. \quad (4.43)$$

Kluczowe są operatory liczby fotonów w modach wyjściowych. Mamy mianowicie

$$\hat{n}_c = \hat{c}^\dagger \hat{c} = T\hat{a}^\dagger \hat{a} + (1-T)\hat{b}^\dagger \hat{b} + i\sqrt{T(1-T)}(\hat{a}^\dagger \hat{b} - \hat{b}^\dagger \hat{a}) \quad (4.44a)$$

$$\hat{n}_d = \hat{d}^\dagger \hat{d} = (1-T)\hat{a}^\dagger \hat{a} + T\hat{b}^\dagger \hat{b} - i\sqrt{T(1-T)}(\hat{a}^\dagger \hat{b} - \hat{b}^\dagger \hat{a}). \quad (4.44b)$$

Wyrażenia te są punktem startowym dla dalszej analizy.

4.5.1 Zwykła detekcja homodynowa

Przyjmijmy

$$T \gg R, \quad (4.45)$$

czyli dominującym efektem na płytce jest przepuszczanie sygnału. Ponadto zakładamy, że stan światła w modzie \hat{b} jest stanem koherentnym $|\beta\rangle$. Mówimy, że badany mod światła \hat{a} sprzęga się z lokalnym oscylatorem. Wyznamy średnią liczbę fotonów w porcie c . Mamy

$$\langle \hat{n}_c \rangle = T \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle + (1-T)|\beta|^2 - 2\sqrt{T(1-T)}|\beta| \left\langle \hat{X} \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) \right\rangle, \quad (4.46)$$

gdzie

$$\hat{X}(\varphi) = \frac{1}{2} (\hat{a}e^{-i\varphi} + \hat{a}^\dagger e^{i\varphi}). \quad (4.47)$$

Widzimy zatem, że pomiar liczby fotonów na porcie c dostarcza informacji o średniej kwadraturze, zaś jej orientację (czyli ewentualny kierunek ściskania) można dobrać kontrolując φ — fazę lokalnego oscylatora. Załóżmy dodatkowo, że $|\beta|^2$ — natężenie stanu koherentnego — dominuje nad liczbą fotonów w modzie a , tak że mimo (4.45), spełnione jest

$$T \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle \ll (1-T)|\beta|^2. \quad (4.48)$$

W takim przypadku otrzymujemy przybliżone wyrażenie na średnią liczbę fotonów

$$\langle \hat{n}_c \rangle \simeq (1-T)|\beta|^2 - 2\sqrt{T(1-T)}|\beta| \left\langle \hat{X} \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) \right\rangle, \quad (4.49)$$

By wykryć ściskanie, musimy odwołać się do drugiego momentu operatora. Korzystając z warunków (4.45) i (4.48) otrzymujemy przybliżone wyrażenie

$$\langle (\Delta \hat{n}_c)^2 \rangle \equiv \langle \hat{n}_c^2 \rangle - \langle \hat{n}_c \rangle^2 \simeq (1-T)|\beta|^2 \left((1-T) + 4T \left\langle (\Delta \hat{X} \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right))^2 \right\rangle \right). \quad (4.50)$$

Zatem pomiar wariancji kwadratury przebiega następująco. Na początku wyłącza się sygnał płynący z modu a i mierzy się na detektorze c szum śrutowy pochodzący od lokalnego oscylatora. Następnie mierzy się fluktuacje liczby fotonów na c , a od wyniku odejmuje się szum śrutowy. W ten sposób dostaje się informacje o ewentualnym ściskaniu kwadratury.

4.5.2 Zbalansowana detekcja homodynowa

W tym schemacie pomiar odbywa się na obu portach c i d , zaś sygnał z dwu portów jest odejmowany. Korzystając z równań (4.44) i zakładając $T \equiv 1$, otrzymujemy

$$\hat{n} = \hat{n}_c - \hat{n}_d = -i(\hat{a}^\dagger \hat{b} - \hat{b}^\dagger \hat{a}). \quad (4.51)$$

Zatem bez żadnych przybliżeń mamy

$$\langle \hat{n} \rangle = -2|\beta| \left\langle \hat{X} \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) \right\rangle. \quad (4.52)$$

Zakładając zaś, że natężenie β jest bardzo duże, otrzymujemy

$$\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle \simeq 4|\beta|^2 \left\langle (\Delta \hat{X} \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right))^2 \right\rangle, \quad (4.53)$$

zatem pozbyliśmy się kłopotliwego wkładu od szumu śrutowego.

4.5.3 Pomiar fazy — interferometr Macha-Zehndera

Załóżmy teraz, że na jednym z ramion, na przykład \hat{b} nadrukowywana jest faza θ . Mamy wtedy związek między wejściowymi a wyjściowymi modami postaci (**przeliczyć na wykładzie**)

$$\hat{c} = \frac{1}{2} \left[(1 - e^{i\theta}) \hat{a} + i(1 + e^{i\theta}) \hat{b} \right] \quad (4.54a)$$

$$\hat{d} = \frac{1}{2} \left[i(1 + e^{i\theta}) \hat{a} - (1 - e^{i\theta}) \hat{b} \right]. \quad (4.54b)$$

Operator liczby fotonów daje

$$\hat{J}_z(\theta) = \hat{J}_z \cos \theta - \hat{J}_x \sin \theta. \quad (4.55)$$

Jeżeli faza jest estymowana z różnicy populacji, proste wyrażenie na propagację błędu daje

$$\Delta\theta = \frac{\sqrt{\langle (\Delta \hat{J}_z(\theta))^2 \rangle}}{\left| \frac{\partial \hat{J}_z(\theta)}{\partial \theta} \right|}. \quad (4.56)$$

Zakładamy, że na jednym z portów wejściowych jest stan koherentny o amplitudzie $\beta = \sqrt{n_b}e^{i\varphi}$, na drugim próżnia. Licząc wokół $\theta = \varphi$, dostajemy

$$\Delta\theta = \frac{1}{\sqrt{n_b}}, \quad (4.57)$$

czyli granicę szumu śrutowego. (**Pokazać**), że jeżeli zamiast próżni weźmiemy ściśniętą próżnię $|0\xi\rangle$, gdzie $\xi = re^{i\phi}$, to dla $n_b \gg 1$ otrzymujemy

$$\Delta\theta = \frac{e^{-r}}{\sqrt{n_b}}. \quad (4.58)$$

Zatem nieklasyczność stanu ściśniętego jest zasobem dla polepszenia precyzji ponad granicę szumu śrutowego.

4.6 Kryteria nieklasyczności dla $G^{(2)}$

4.6.1 Pole dwumodowe

W tej części pokażemy, w jaki sposób pomiary funkcji korelacji drugiego rzędu niosą informację o nieklasyczności stanu kwantowego. Zaczniemy od analizy następującego układu dwumodowego. Niech światło składające się z dwóch fal płaskich o wektorach falowych \mathbf{k}_1 i \mathbf{k}_2 pada z dwóch stron na płytkę światłodzielną. Wektory, które ulegają odbiciu oznaczamy będziemy przez $\tilde{\mathbf{k}}_1$ i $\tilde{\mathbf{k}}_2$. Następnie impulsy są zbierane w dwóch punktach \mathbf{r}_a i \mathbf{r}_b , gdzie na detektorach następuje pomiar natężeń.

- Klasycznie fluktuujące światło

Założmy na początku, że światło docierające do detektorów jest klasycznym, fluktuującym polem. Mierzona funkcja korelacji drugiego rzędu będzie postaci

$$G^{(2)}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) = \langle |E(\mathbf{r}_a)|^2 |E(\mathbf{r}_b)|^2 \rangle, \quad (4.59)$$

gdzie amplitudy pola mierzone w dwu punktach są postaci

$$E(\mathbf{r}_a) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \left(i\alpha_1 e^{i\tilde{\mathbf{k}}_1 \mathbf{r}_a} + \alpha_2 e^{i\mathbf{k}_2 \mathbf{r}_a} \right) \quad (4.60a)$$

$$E(\mathbf{r}_b) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \left(\alpha_1 e^{i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}_b} + i\alpha_2 e^{i\tilde{\mathbf{k}}_2 \mathbf{r}_b} \right). \quad (4.60b)$$

Założmy ponadto, że fluktuacje pola mają charakter termiczny, co oznacza, że przeżywają tylko średnie typu $\langle |E(\mathbf{r}_i)|^2 \rangle$ bądź $\langle |E(\mathbf{r}_i)|^2 |E(\mathbf{r}_j)|^2 \rangle$. Wtedy funkcję (4.59) możemy przepisać w postaci

$$G^{(2)}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) = \frac{1}{4} \left(\langle (I_1 + I_2)^2 \rangle - 2 \langle I_1 I_2 \rangle \cos((\mathbf{k}_2 - \tilde{\mathbf{k}}_1)\mathbf{r}_a - (\tilde{\mathbf{k}}_2 - \mathbf{k}_1)\mathbf{r}_b) \right), \quad (4.61)$$

gdzie $I_1 = \varepsilon^2 |\alpha_i|^2$. Kładąc $(\mathbf{k}_2 - \tilde{\mathbf{k}}_1)\mathbf{r}_a = \frac{2\pi}{L}x_a$ oraz $(\tilde{\mathbf{k}}_2 - \mathbf{k}_1)\mathbf{r}_b = \frac{2\pi}{L}x_b$, otrzymujemy

$$G^{(2)}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) = \frac{1}{4} \left(\langle (I_1 + I_2)^2 \rangle - 2 \langle I_1 I_2 \rangle \cos\left(\frac{2\pi}{L}(x_a - x_b)\right) \right). \quad (4.62)$$

Zatem funkcja korelacji drugiego rzędu ma prążki interferencyjne. Ich widzialność wynosi

$$\nu = \frac{G_{\max}^{(2)} - G_{\min}^{(2)}}{G_{\max}^{(2)} + G_{\min}^{(2)}} = \frac{2 \langle I_1 I_2 \rangle}{\langle I_1^2 \rangle + \langle I_2^2 \rangle + 2 \langle I_1 I_2 \rangle} \leq \frac{1}{2}, \quad (4.63)$$

gdyż $\langle I_1^2 \rangle + \langle I_2^2 \rangle \geq 2 \langle I_1 I_2 \rangle$. Zatem otrzymaliśmy ograniczenie na widzialność prążków interferencyjnych dla klasycznych pól.

• Światło kwantowe

Z drugiej strony, rozważmy przypadek, gdy pola są kwantowe, czyli zastępujemy (4.60) przez

$$\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a) = \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \left(i\hat{a}_1 e^{i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}_a} + \hat{a}_2 e^{i\mathbf{k}_2 \mathbf{r}_a} \right) \quad (4.64a)$$

$$\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_b) = \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \left(\hat{a}_1 e^{i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}_b} + i\hat{a}_2 e^{i\mathbf{k}_2 \mathbf{r}_b} \right). \quad (4.64b)$$

Policzmy funkcję korelacji drugiego rzędu dla stanu Focka $|1_{\mathbf{k}_1}, 1_{\mathbf{k}_2}\rangle$. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} G^{(2)}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) &= \langle 1_{\mathbf{k}_1}, 1_{\mathbf{k}_2} | \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_a) \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_b) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_b) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a) | 1_{\mathbf{k}_1}, 1_{\mathbf{k}_2} \rangle = \\ &= \frac{\epsilon^4}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi}{L} (x_a - x_b) \right) \right). \end{aligned} \quad (4.65)$$

Funkcja ta ma widzialność prążków

$$\nu = \frac{G_{\max}^{(2)} - G_{\min}^{(2)}}{G_{\max}^{(2)} + G_{\min}^{(2)}} = 1. \quad (4.66)$$

Zatem istnieją pola kwantowe, które łamią klasyczną granicę $\nu \leq \frac{1}{2}$. Zatem łamanie tego ograniczenia jest kryterium kwantowości pola elektromagnetycznego.

4.6.2 Nierówność Cauchy-Schwarza

Wprowadzimy teraz kolejne kryterium na nieklasyczność, oparte na własnościach funkcji korelacji drugiego rzędu. Korzysta ono z powszechnie znanej nierówności Cauchy'ego-Schwarza.

Zaczynamy od przypomnienia, że P -reprezentacja wielomodowego stanu kwantowego ma postać

$$\hat{\rho} = \int d\vec{\alpha} \int d\vec{\alpha}^* |\vec{\alpha}\rangle \langle \vec{\alpha}| P(\vec{\alpha}, \vec{\alpha}^*), \quad (4.67)$$

gdzie $|\vec{\alpha}\rangle = \bigotimes_i |\alpha_i\rangle$ jest wielomodowym stanem koherentnym. Policzmy funkcję korelacji drugiego rzędu na tym stanie. Mamy

$$G^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t_1, t_2) = \text{Tr} \left[\hat{\rho} \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}_2, t_2) \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1) \right], \quad (4.68)$$

gdzie — przypomnijmy — wielomodowe pole elektromagnetyczne dane jest

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \mathbf{e}_{\mathbf{k}, \sigma} \mathcal{E}_{\mathbf{k}, \sigma} \hat{a}_{\mathbf{k}, \sigma} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)} + \text{H.c.} \equiv \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t). \quad (4.69)$$

Ponieważ funkcja korelacji jest skonstytuowana tak, że jest średnią z operatora uporządkowanego normalnie, od razu dostajemy

$$G^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t_1, t_2) = \int d\vec{\alpha} \int d\vec{\alpha}^* P(\vec{\alpha}, \vec{\alpha}^*) I_{\vec{\alpha}}(\mathbf{r}_1, t_1) I_{\vec{\alpha}}(\mathbf{r}_2, t_2), \quad (4.70)$$

gdzie natężenie pola elektromagnetycznego dane jest wzorem

$$I_{\vec{\alpha}}(\mathbf{r}_i, t_i) = \left| \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \mathbf{e}_{\mathbf{k}, \sigma} \mathcal{E}_{\mathbf{k}, \sigma} \alpha_{\mathbf{k}, \sigma} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i - \omega_{\mathbf{k}} t_i)} \right|^2. \quad (4.71)$$

Zauważmy, że jeżeli P -reprezentacja jest dodatnio określona, wyrażenie odwzajemnia klasyczną funkcję korelacji drugiego rzędu

$$G^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t_1, t_2) = \langle I_{\vec{\alpha}}(\mathbf{r}_1, t_1) I_{\vec{\alpha}}(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle_{\vec{\alpha}}. \quad (4.72)$$

W tym wypadku zastosujemy całkową nierówność Cauchy'ego-Schwarza, która dla rzeczywistych funkcji $f(x)$ i $g(x)$ ma postać

$$\left(\int dx f(x) g(x) \right)^2 \leq \int dx f^2(x) \int dx g^2(x). \quad (4.73)$$

Przyjmując $f = \sqrt{P(\vec{\alpha}, \vec{\alpha}^*)} I_{\vec{\alpha}}(\mathbf{r}_1, t_1)$ oraz $g = \sqrt{P(\vec{\alpha}, \vec{\alpha}^*)} I_{\vec{\alpha}}(\mathbf{r}_2, t_2)$ dostajemy nierówność ograniczającą funkcję korelacji drugiego rzędu dla pól klasycznych (czyli takich, które mają dodatnio określone P):

$$G^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t_1, t_2) \leq \sqrt{G^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1; t_1, t_1) G^{(2)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2; t_2, t_2)}. \quad (4.74)$$

W szczególności, dla pomiarów na jednym detektorze ($\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$) w dwóch chwilach czasu t_1 i $t_1 + \tau$, oraz zakładając, że pole jest stacjonarne, dostajemy

$$g^{(2)}(\tau) \leq g^{(2)}(0). \quad (4.75)$$

Oznacza to, że dla pól klasycznych, prawdopodobieństwo detekcji dwóch fotonów w tej samej chwili czasu jest większe, niż w dwóch różnych chwilach. Zjawisko to nazywamy grupowaniem fotonów i może mieć ono różny stopień: dla stanu koherentnego $g^{(2)}(\tau) = g^{(2)}(0) = 1$ (czyli rozkład jest równomierny), zaś dla stanu termicznego $g^{(2)}(\tau) = 1$, oraz $g^{(2)}(0) = 2$ (wyraźne grupowanie). Każdy stan, dla którego (4.75) nie jest spełnione, jest stanem kwantowym.

4.6.3 Kryterium pochodzące z wariancji

Kolejna nierówność pochodzi z obserwacji, że w ogólności mamy

$$\langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2 \geq 0. \quad (4.76)$$

Zatem dla klasycznych pól, dla których

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle I^2 \rangle}{\langle I \rangle^2} \quad (4.77)$$

zachodzi nierówność

$$g^{(2)}(0) \geq 1. \quad (4.78)$$

Założmy, że pole kwantowe jest jednomodowe i w stanie Focka $|n\rangle$. Wtedy

$$g^{(2)}(0) = \frac{n(n-1)}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}. \quad (4.79)$$

Zatem nierówność (4.78) można złamać dla pól kwantowych, jest ona zatem kryterium kwanotowości.

Rozdział 5

Oddziaływanie światła z materią — półklasycznie

W tym rozdziale omówimy podstawy teorii oddziaływania klasycznego pola elektromagnetycznego z atomem. Jest to pierwszy krok na drodze do skonstruowania kompletnej teorii oddziaływania światła z materią. Teoria taka, by mogła uwzględniać subtelne zjawiska kwantowe, musi posługiwać się kwantowym opisem pola elektromagnetycznego. Taki kompletny model przedstawimy w kolejnym rozdziale.

5.1 Hamiltonian oddziaływania

Hamiltonian opisujący oddziaływanie pola elektromagnetycznego o potencjale skalarnym $U(\mathbf{r}, t)$ i wektorowym $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ z pojedynczym elektronem o ładunku e ma znaną postać tak zwanego “minimalnego sprzężenia” (**wyprowadzić**), czyli

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t))^2 + eU(\mathbf{r}, t) + \hat{V}(\mathbf{r}). \quad (5.1)$$

Wyprowadzimy teraz ten Hamiltonian zakładając niezmienniczość pola elektromagnetycznego ze względu na cechowanie. Następnie uprościmy jego postać tak, by można było otrzymać przybliżone wyniki analityczne.

5.1.1 Niezmienniczość ze względu na cechowanie a Hamiltonian minimalnego sprzężenia

Rozważmy swobodne równanie Schrödingera dla cząstki o masie m postaci

$$i\hbar\partial_t\psi = -\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}\psi. \quad (5.2)$$

Równanie to oczywiście jest niezmiennicze ze względu na nadruk globalnej fazy, czyli niezależnej od \mathbf{r} . Niemniej ulega ono transformacji o ile faza jest lokalna, czyli

$$\psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \psi(\mathbf{r}, t)e^{i\chi(\mathbf{r}, t)}. \quad (5.3)$$

By równanie Schrödingera pozostawało niezmiennicze ze względu na lokalne cechowanie, musi mieć ono postać

$$i\hbar\partial_t\psi = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\nabla - i\frac{e}{\hbar}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right]^2 + eU(\mathbf{r}, t) \right\} \psi, \quad (5.4)$$

gdzie pole wektorowe i skalarne transformuje się zgodnie z

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{\hbar}{e}\nabla\chi(\mathbf{r}, t) \quad (5.5a)$$

$$U(\mathbf{r}, t) \rightarrow U(\mathbf{r}, t) - \frac{\hbar}{e}\partial_t\chi(\mathbf{r}, t). \quad (5.5b)$$

Możemy teraz utożsamić pole skalarne i wektorowe z potencjałem skalarnym i wektorowym pola elektromagnetycznego, albowiem transformacja (5.5) zapewnia niezmienniczość pól \mathbf{E} i \mathbf{B} zdefiniowanych jako

$$\mathbf{E} = -\nabla U - \partial_t\mathbf{A} \quad (5.6a)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (5.6b)$$

ze względu na zmianę cechowania. Hamiltonian (5.1) jest punktem startowym wszystkich naszych rozważań w tym rozdziale.

5.1.2 Przybliżenie dipolowe i Hamiltonian $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$

Od tej pory wybieramy cechowanie, gdzie $U \equiv 0$ oraz $\nabla\mathbf{A} = 0$. Ponadto zauważmy, że rozmiar paczki falowej elektronu w atomie wodoru (przynajmniej w niezbyt wysokich stanach energetycznych) jest rzędu $1\text{Å} = 10^{-10}\text{m}$. Długość fali pola elektromagnetycznego, w którym "zanurzony" jest atom jest rzędu 10^{-7} - 10^{-6}m . Oznacza to, że na obszarze, na którym znajduje się elektron, można przyjąć, że pole elektromagnetyczne jest stałe, i o ile stosuje się przybliżenie fali płaskiej, mamy

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \simeq \mathbf{A}(t)e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_0}, \quad (5.7)$$

gdzie \mathbf{r}_0 jest średnim położeniem elektronu. Równanie Schrödingera dla elektronu przyjmuje zatem postać

$$i\hbar\partial_t\psi = \left[\frac{1}{2m} (\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t))^2 + \hat{V}(\mathbf{r}) \right] \psi. \quad (5.8)$$

Dokonyjemy następnie transformacji cechowania

$$\psi(\mathbf{r}, t) = e^{i\frac{e}{\hbar}\mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t)\cdot\mathbf{r}}\phi(\mathbf{r}, t). \quad (5.9)$$

Podstawiamy to wyrażenie do (5.8) i otrzymujemy nowe równanie na funkcję falową elektronu $\phi(\mathbf{r}, t)$ postaci

$$i\hbar\partial_t\phi = \left[\hat{H}_0 - e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t) \right] \phi, \quad (5.10)$$

gdzie $\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + \hat{V}(\mathbf{r})$ oraz $\mathbf{E} = -\partial_t\mathbf{A}$.

Hamiltonian $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}$

Inną formą Hamiltonianu minimalnego sprzężenia w przybliżeniu dipolowym jest tak zwana postać $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}$. Pochodzi ona z bezpośredniego podniesienia do kwadratu pierwszego członu w Hamiltonie (5.8). Przy założeniu, że człon proporcjonalny do \mathbf{A}^2 może być zaniedbany, dostajemy równanie na funkcję ψ postaci

$$i\hbar\partial_t\psi = \left[\hat{H}_0 - \frac{e}{m}\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t) \right] \phi. \quad (5.11)$$

W ogólności można wykazać, że rozwiązania dwóch równań (5.10) i (5.11) dają takie same wyniki *fizyczne*, lecz jest to zagadnienie nietrywialne, które nie będzie tu dyskutowane.

5.2 Oddziaływanie atomu dwupoziomowego z monochromatyczną falą

Założmy, że cała dynamika atomu rozgrywa się pomiędzy dwoma stanami własnymi \hat{H}_0 , czyli $|a\rangle$ i $|b\rangle$. Hamiltonian \hat{H}_0 ma zatem w tej bazie postać

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega_a |a\rangle\langle a| + \hbar\omega_b |b\rangle\langle b|. \quad (5.12)$$

Zakładamy ponadto, że zewnętrzne pole elektryczne jest spolaryzowane liniowo wzdłuż osi x . Wtedy

$$\hat{H}_1 = -e\hat{x}E(t) = -(\wp_{ab}|a\rangle\langle b| + \wp_{ba}|b\rangle\langle a|), \quad (5.13)$$

gdzie $\wp_{ij} = e\langle i|\hat{x}|j\rangle$ jest elementem macierzowym operatora momentu dipolowego. Przyjmijmy ponadto, że zależność pola elektrycznego od czasu jest harmoniczną, czyli

$$E(t) = \mathcal{E} \cos \nu t. \quad (5.14)$$

Stan czysty atomu rozpisany w bazie stanów własnych \hat{H}_0 jest postaci

$$|\psi(t)\rangle = C_a(t)|a\rangle + C_b(t)|b\rangle \quad (5.15)$$

i naszym zadaniem jest wyznaczenie amplitud $C_i(t)$. Równanie Schrödingera $i\hbar\partial_t|\psi(t)\rangle = (\hat{H}_0 + \hat{H}_1)|\psi(t)\rangle$ daje układ sprzężonych równań

$$\dot{C}_a = -i\omega_a C_a + i\Omega_R e^{-i\phi} \cos \nu t C_b \quad (5.16a)$$

$$\dot{C}_b = -i\omega_b C_b + i\Omega_R e^{i\phi} \cos \nu t C_a, \quad (5.16b)$$

gdzie $\wp_{ba} = \wp_{ab}^* = |\wp_{ab}|e^{-\phi}$, zaś częstość Rabiego dana jest wzorem

$$\Omega_R = \frac{|\wp_{ab}|\mathcal{E}}{\hbar}. \quad (5.17)$$

W kolejnym kroku dokonujemy zamiany zmiennych, która pozwoli nam pozbyć się członów swobodnych, czyli $c_{a/b} = C_{a/b}e^{i\omega_{a/b}t}$. Równania na nowe zmienne ma postać

$$\dot{c}_a = i\Omega_R e^{-i\phi} \cos \nu t e^{i\omega t} c_b \quad (5.18a)$$

$$\dot{c}_b = i\Omega_R e^{i\phi} \cos \nu t e^{-i\omega t} c_a, \quad (5.18b)$$

gdzie $\omega = \omega_a - \omega_b$. Następnie stosujemy przybliżenie wirującej fali, czyli zakładamy, że z iloczynu $\cos \nu t e^{i\omega t}$ tylko człon proporcjonalny do różnicy częstości, czyli $e^{i(\omega-\nu)t}$ ma istotny wkład. Drugi człon, proporcjonalny do $e^{i(\omega+\nu)t}$ nie ma większego znaczenia dla dynamiki, albowiem prowadzi on do tak szybkiej zmienności w czasie, że na realistycznych skalach czasu jego wpływ uśrednia się do zera. W ramach tego przybliżenia mamy

$$\dot{c}_a = i \frac{\Omega_R}{2} e^{-i\phi} e^{i(\omega-\nu)t} c_b \quad (5.19a)$$

$$\dot{c}_b = i \frac{\Omega_R}{2} e^{i\phi} e^{-i(\omega-\nu)t} c_a. \quad (5.19b)$$

Rozwiązanie tego układu równań jest postaci

$$c_a(t) = \left(a_1 e^{i\frac{\Omega t}{2}} + a_2 e^{-i\frac{\Omega t}{2}} \right) e^{i\frac{\Delta t}{2}} \quad (5.20a)$$

$$c_b(t) = \left(b_1 e^{i\frac{\Omega t}{2}} + b_2 e^{-i\frac{\Omega t}{2}} \right) e^{-i\frac{\Delta t}{2}}, \quad (5.20b)$$

gdzie odstrojenie danej jest przez $\Delta = \omega - \nu$ oraz odstrojona częstość Rabiego wynosi

$$\Omega = \sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}. \quad (5.21)$$

Stałe a_i, b_i wiążą się z warunkami początkowymi relacjami algebraicznymi

$$a_1 = \frac{1}{2\Omega} [(\Omega - \Delta)c_a(0) + \Omega_R e^{-i\phi} c_b(0)] \quad (5.22a)$$

$$a_2 = \frac{1}{2\Omega} [(\Omega + \Delta)c_a(0) - \Omega_R e^{-i\phi} c_b(0)] \quad (5.22b)$$

$$b_1 = \frac{1}{2\Omega} [(\Omega + \Delta)c_b(0) + \Omega_R e^{i\phi} c_a(0)] \quad (5.22c)$$

$$b_2 = \frac{1}{2\Omega} [(\Omega - \Delta)c_b(0) - \Omega_R e^{i\phi} c_a(0)]. \quad (5.22d)$$

Podstawiając to wyrażenie do rozwiązania (5.23) otrzymujemy

$$c_a(t) = \left\{ c_a(0) \left[\cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) - i\frac{\Delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right] + i\frac{\Omega_R}{\Omega} e^{-i\phi} c_b(0) \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right\} e^{i\frac{\Delta t}{2}} \quad (5.23a)$$

$$c_b(t) = \left\{ c_b(0) \left[\cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + i\frac{\Delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right] + i\frac{\Omega_R}{\Omega} e^{i\phi} c_a(0) \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right\} e^{-i\frac{\Delta t}{2}} \quad (5.23b)$$

Warto zauważyć, że różnica obsadzeń oscyluje w czasie

$$|c_a(t)|^2 - |c_b(t)|^2 = \frac{\Delta^2 - \Omega_R^2}{\Omega^2} \sin^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right), \quad (5.24)$$

zaś wyindukowany w skutek oddziaływania moment dipolowy wynosi

$$\begin{aligned} P(t) &= e\langle \psi(t) | \hat{x} | \psi(t) \rangle = C_a^* C_b^* \wp_{ab} + \text{c.c.} \\ &= 2\text{Re} \left[i\frac{\Omega_R}{\Omega} \wp_{ab} \left[\cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + i\frac{\Delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right] \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) e^{i\phi} e^{i\nu t} \right]. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Wyprowadzimy teraz ponownie wyrażenia (5.23) w obrazie oddziaływania.

5.2.1 Obraz oddziaływania

Wprowadzimy teraz metodę rozwiązywania równania Schrödingera poprzez obraz oddziaływania. Metoda ta opiera się na rozdzielaniu Hamiltonianu na część swobodną i tę związaną z oddziaływaniem, czyli

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I. \quad (5.26)$$

W obrazie oddziaływania wprowadza się stan, w którym “automatycznie” zawarta jest swobodna ewolucja, czyli

$$|\psi_I(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t} |\psi(t)\rangle = \hat{U}_0^\dagger(t) |\psi(t)\rangle. \quad (5.27)$$

Motywacją do wprowadzenia takiego wektora jest szczególna prostota równania ewolucji, jakie spełnia stan $|\psi_I(t)\rangle$, mianowicie

$$i\hbar\partial_t |\psi_I(t)\rangle = \hat{V}(t) |\psi_I(t)\rangle, \quad (5.28)$$

gdzie operator energii potencjalnej w obrazie oddziaływania zależy od czasu i ma postać

$$\hat{V}(t) = \hat{U}_0^\dagger(t) \hat{H}_I \hat{U}_0(t). \quad (5.29)$$

Ponieważ $\hat{V}(t)$ zależy od czasu, odcałkowanie równania Schrödingera jest bardziej złożone i daje operator ewolucji w postaci

$$\hat{U}_I(t) = \mathcal{T} \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t d\tau \hat{V}(\tau) \right), \quad (5.30)$$

gdzie \mathcal{T} symbolizuje uporządkowanie czasowe. Rozważmy teraz Hamiltonian oddziaływania jednodobowego światła z atomem dwupoziomowym. Hamiltonian swobodny jest dany przez równanie (5.12). Stąd operator ewolucji jest postaci

$$\hat{U}_0(t) = e^{-i\omega_a t} |a\rangle\langle a| + e^{-i\omega_b t} |b\rangle\langle b|. \quad (5.31)$$

Obkładamy tym operatorem Hamiltonian oddziaływania dany przez równanie (5.13). Bezpośredni rachunek daje

$$\hat{V}(t) = -\hbar\Omega_R \cos \nu t \times \hat{U}_0^\dagger(t) \left(e^{-i\phi} |a\rangle\langle b| + e^{i\phi} |b\rangle\langle a| \right) \hat{U}_0(t) \quad (5.32)$$

$$= -\frac{\hbar\Omega_R}{2} \left[e^{-i\phi} |a\rangle\langle b| e^{i\omega t} + e^{i\phi} |b\rangle\langle a| e^{-i\omega t} \right]. \quad (5.33)$$

Konsekwentnie, stosujemy przybliżenie wirującej fali i pozbywamy się członów, które szybko oscylują (suma częstości). Stąd (dla uproszczenia w rezonansie)

$$\hat{V}(t) = -\frac{\hbar\Omega_R}{2} \left(e^{-i\phi} |a\rangle\langle b| + e^{i\phi} |b\rangle\langle a| \right). \quad (5.34)$$

W następnym kroku należy policzyć eksponens od tego operatora. Zauważając, że dla parzystych i nieparzystych potęg mamy

$$\hat{V}^{2n} = \left(\frac{\hbar\Omega_R}{2} \right)^{2n} (|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|)^n = \left(\frac{\hbar\Omega_R}{2} \right)^{2n} \hat{1} \quad (5.35a)$$

$$\hat{V}^{2n+1} = -\left(\frac{\hbar\Omega_R}{2} \right)^{2n+1} \left(e^{-i\phi} |a\rangle\langle b| + e^{i\phi} |b\rangle\langle a| \right). \quad (5.35b)$$

Stąd operator ewolucji ma postać

$$\hat{U}_I(t) = \cos\left(\frac{\hbar\Omega_R}{2}\right) \hat{1} + i \sin\left(\frac{\hbar\Omega_R}{2}\right) (e^{-i\phi}|a\rangle\langle b| + e^{i\phi}|b\rangle\langle a|), \quad (5.36)$$

co odtwarza wynik (5.23).

Rozdział 6

Oddziaływanie światła z materią — kwantowo

W tym rozdziale przedstawimy zarys teorii oddziaływania kwantowego pola elektromagnetycznego z atomem dwupoziomowym. Punktem startowym naszych rozważań jest poznany już Hamiltonian w przybliżeniu dipolowym, który, po uwzględnieniu stopni swobody związanych z polem elektromagnetycznym, ma postać

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_F - e\mathbf{r}\hat{\mathbf{E}}, \quad (6.1)$$

gdzie \hat{H}_A jest Hamiltonianem swobodnego atomu, \hat{H}_F jest Hamiltonianem swobodnego pola, zaś człon $-e\mathbf{r}\hat{\mathbf{E}}$ opisuje oddziaływanie atomu z polem kwantowym (stąd daszek nad \mathbf{E}). Przypomnijmy, że Hamiltonian swobodnego pola jest postaci

$$\hat{H}_F = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \hbar\nu_{\mathbf{k}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right). \quad (6.2)$$

Hamiltonian swobodnego atomu można przedstawić w postaci

$$\hat{H}_A = \sum_{i=a,b} \hbar\omega_i |i\rangle\langle i|. \quad (6.3)$$

By wyznaczyć Hamiltonian oddziaływania, przypomnijmy, że operator pola elektrycznego wynosi

$$\hat{\mathbf{E}} = \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}} (\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger). \quad (6.4)$$

Element macierzowy operatora momentu dipolowego w bazie stanów własnych Hamiltonianu swobodnego ma postać

$$e\mathbf{r} = \sum_{ij} e |i\rangle\langle i| \mathbf{r} |j\rangle\langle j| = \sum_{ij} \wp_{ij} \hat{\sigma}_{ij}, \quad (6.5)$$

gdzie $\hat{\sigma}_{ij} = |i\rangle\langle j|$. Zatem pełen Hamiltonian (6.1) ma postać

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \hbar\nu_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \sum_i \hbar\omega_i \hat{\sigma}_{ii} + \hbar \sum_{ij} \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}^{ij} \hat{\sigma}_{ij} (\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger), \quad (6.6)$$

gdzie wprowadziliśmy stałą sprzężenia

$$g_{\mathbf{k}}^{ij} = -\frac{\mathcal{P}_{ij}\epsilon_{\mathbf{k}}\epsilon_{\mathbf{k}}}{\hbar}. \quad (6.7)$$

Dla atomu dwupoziomowego, zakładając, że element macierzowy momentu dipolowego jest rzeczywisty mamy $g_{\mathbf{k}}^{ab} = g_{\mathbf{k}}^{ba} = g_{\mathbf{k}}$. Powyższy hamiltonian upraszcza się wtedy do postaci

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k},\sigma} \hbar\nu_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2}\hbar\omega\hat{\sigma}_z + \hbar\sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)(\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger}), \quad (6.8)$$

gdzie $\omega = \omega_a - \omega_b$, oraz pominięliśmy stały człon proporcjonalny do sumy energii. Zauważmy ponadto, że spośród czterech członów tworzących Hamiltonian oddziaływania, tylko te proporcjonalne do $\hat{\sigma}_+\hat{a}_{\mathbf{k}}$ i $\hat{\sigma}_-\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger}$ są rezonansowe. Pozostałe dwa oscylują z częstością w przybliżeniu równą $2\hbar\omega$, można je zatem z dobrą dokładnością pominąć, co daje

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k},\sigma} \hbar\nu_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2}\hbar\omega\hat{\sigma}_z + \hbar\sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}(\hat{\sigma}_+\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{\sigma}_-\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger}). \quad (6.9)$$

Wyrażenie to jest punktem startowym dla dalszych rozważań.

6.1 Oddziaływanie atomu dwupoziomowego z polem jednomodowym

Oddziaływanie jednomodowego pola z atomem dwupoziomowym jest zatem dane przez

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1, \quad (6.10)$$

gdzie

$$\hat{H}_0 = \hbar\nu\hat{a}^{\dagger}\hat{a} + \frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z \quad (6.11a)$$

$$\hat{H}_1 = \hbar g(\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{a}^{\dagger}\hat{\sigma}_-). \quad (6.11b)$$

W obrazie oddziaływania mamy

$$\hat{V} = e^{i\frac{t}{\hbar}\hat{H}_0}\hat{H}_1e^{-i\frac{t}{\hbar}\hat{H}_0} = \hbar g(\hat{\sigma}_+\hat{a}e^{i\Delta t} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^{\dagger}e^{-i\Delta t}), \quad (6.12)$$

gdzie $\Delta = \omega - \nu$. Równanie ruchu jest postaci

$$i\hbar\partial_t|\psi\rangle = \hat{V}|\psi\rangle. \quad (6.13)$$

Stan atomu i światła jest postaci

$$|\psi\rangle = \sum_n (c_{a,n}|a,n\rangle + c_{b,n}|b,n\rangle), \quad (6.14)$$

gdzie $|a/b,n\rangle = |a/b\rangle \otimes |n\rangle$. Podstawiając ten rozkład do równania (6.13), dostajemy

$$\dot{c}_{a,n} = -ig\sqrt{n+1}e^{i\Delta t}c_{b,n+1} \quad (6.15a)$$

$$\dot{c}_{b,n+1} = -ig\sqrt{n+1}e^{i\Delta t}c_{a,n}. \quad (6.15b)$$

Ogólne rozwiązanie tego układu równań jest postaci

$$c_{a,n}(t) = \left\{ c_{a,n}(0) \left[\cos\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) - i \frac{\Delta}{\Omega_n} \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) \right] - 2i \frac{g\sqrt{n+1}}{\Omega_n} c_{b,n+1}(0) \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) \right\} e^{i\frac{\Delta t}{2}} \quad (6.16a)$$

$$c_{b,n+1}(t) = \left\{ c_{b,n+1}(0) \left[\cos\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) + i \frac{\Delta}{\Omega_n} \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) \right] - 2i \frac{g\sqrt{n+1}}{\Omega_n} c_{a,n}(0) \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) \right\} e^{-i\frac{\Delta t}{2}}, \quad (6.16b)$$

gdzie $\Omega_n = \sqrt{\Delta^2 + 4g^2(n+1)}$. Wynik ten daje pełną informację o oddziaływającym układzie atom dwupoziomowy — światło. W szczególności, gdy początkowo atom jest w stanie wzbudzonym ($c_{b,n}(0) = 0$), powyższe wzory upraszczają się do

$$c_{a,n}(t) = c_n(0) \left[\cos\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) - i \frac{\Delta}{\Omega_n} \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) \right] e^{i\frac{\Delta t}{2}} \quad (6.17a)$$

$$c_{b,n+1}(t) = -2i c_n(0) \frac{g\sqrt{n+1}}{\Omega_n} \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) e^{-i\frac{\Delta t}{2}}. \quad (6.17b)$$

Prawdopodobieństwo zmierzenia n fotonów dane jest przez

$$p(n) = |c_{a,n}(t)|^2 + |c_{b,n}(t)|^2 = p_n \left[\cos^2\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) + \left(\frac{\Delta}{\Omega_n}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) \right] + p_{n-1} \frac{4g^2 n}{\Omega_{n-1}^2} \sin^2\left(\frac{\Omega_{n-1} t}{2}\right), \quad (6.18)$$

gdzie $p_n = |c_n(0)|^2$.

• **opowiedzieć o stanie koherentnym we wnętrzu → nasza praca**

Ważną wielkością jest różnica obsadzeń, czyli różnica prawdopodobieństw znalezienia atomu w stanie wzbudzonym i podstawowym. Wynosi ona

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (|c_{a,n}(t)|^2 - |c_{b,n}(t)|^2) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \left[\left(\frac{\Delta}{\Omega_n}\right)^2 + \frac{4g^2(n+1)}{\Omega_n^2} \cos\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) \right]. \quad (6.19)$$

Zauważmy, że nawet jeżeli początkowo światło znajdowało się w stanie próżni $p_n = \delta_{n,0}$, otrzymujemy

$$W(t) = \frac{1}{\Delta^2 + 4g^2} \left\{ \Delta^2 + 4g^2 \cos[(\Delta^2 + 4g^2)^{\frac{1}{2}} t] \right\}. \quad (6.20)$$

Jest to wynik znacząco różny od tego, który otrzymalibyśmy w przybliżeniu półklasycznym. W tamtym przypadku przy zerowym natężeniu fali pobudzającej nie ma oscylacji obsadzenia atomowego. W tym przypadku, fluktuacje próżni elektromagnetycznej napędzają oscylacje Rabięgo nawet przy braku makroskopowego pola.

6.1.1 “Collapse and revival”

Gdy układ pompowany jest światłem koherentnym o dużym natężeniu ($\langle n \rangle \gg 1$), okres oscylacji Rabiego dany jest mniej więcej przez

$$t_R \sim \frac{1}{\Omega_{\langle n \rangle}} = \frac{1}{\sqrt{\Delta^2 + 4g^2 \langle n \rangle}}. \quad (6.21)$$

Rozkład Poissona ma mniej więcej szerokość $\sqrt{\langle n \rangle}$ zatem po czasie takim, że mniej więcej

$$t_c(\Omega_{\langle n \rangle + \sqrt{\langle n \rangle}} - \Omega_{\langle n \rangle - \sqrt{\langle n \rangle}}) \sim 1 \quad (6.22)$$

różne wkłady do W z równania (6.19) się defazują i następuje kolaps (zanikanie) oscylacji. Dla dużych $\langle n \rangle$ daje to w dominującym rzędzie

$$t_c \sim \frac{1}{\Omega_{\langle n \rangle + \sqrt{\langle n \rangle}} - \Omega_{\langle n \rangle - \sqrt{\langle n \rangle}}} \simeq \frac{1}{2g} \left(1 + \frac{\Delta^2}{4g^2 \langle n \rangle} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.23)$$

Odradzanie się oscylacji (revival) nastąpi, gdy sąsiadujące wkłady są w fazie, czyli

$$t_R(\Omega_{\langle n \rangle} - \Omega_{\langle n \rangle - 1}) \sim 2\pi m, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (6.24)$$

Dla dużych obsadzeń daje to

$$t_R \sim \frac{2\pi m \langle n \rangle}{g} \left(1 + \frac{\Delta^2}{4g^2 \langle n \rangle} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.25)$$

6.1.2 Rozwiązanie przez równanie Heisenberga

Przedstawimy teraz alternatywną metodę rozwiązania powyższego zagadnienia — poprzez równanie Heisenberga. Korzystając z równania Heisenberga $i\hbar\dot{A} = [\hat{A}, \hat{H}]$ mamy dla Hamiltonianu (6.10)

$$\dot{\hat{a}} = -i\nu\hat{a} - ig\hat{\sigma}_- \quad (6.26a)$$

$$\dot{\hat{\sigma}}_- = -i\omega\hat{\sigma}_- + ig\hat{\sigma}_z\hat{a} \quad (6.26b)$$

$$\dot{\hat{\sigma}}_z = 2ig(\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_- - \hat{a}\hat{\sigma}_+). \quad (6.26c)$$

W celu uproszczenia rachunków wprowadzamy dwa operatory, które komutują z Hamiltonianem, są zatem stałymi (operatorowymi) ruchu

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- \quad (6.27a)$$

$$\hat{C} = \frac{1}{2}\Delta\hat{\sigma}_z + g(\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-). \quad (6.27b)$$

Następnie, różniczkując równanie (6.26b) po czasie otrzymujemy

$$\ddot{\hat{\sigma}}_- = -i\omega\dot{\hat{\sigma}}_- + ig(\dot{\hat{\sigma}}_z\hat{a} + \hat{\sigma}_z\dot{\hat{a}}) = \quad (6.28)$$

$$-i\omega\dot{\hat{\sigma}}_- - 2g^2(\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-\hat{a} - \hat{\sigma}_+\hat{a}^2) + \nu g\sigma_z\hat{a} - g^2\hat{\sigma}_z. \quad (6.29)$$

Naszym zadaniem jest domknięcie tego równania, tak by występował w nim tylko operator $\hat{\sigma}_-$ i jego pochodne. W tym celu skorzystamy z następujących związków

$$g^2(\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-\hat{a} - \sigma_+\hat{a}^2) = -i\left(\frac{\Delta}{2} + \hat{C}\right)\dot{\hat{\sigma}}_+ \left(\nu\hat{C} - \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{2}\omega\Delta\right)\hat{\sigma}_- \quad (6.30a)$$

$$g\hat{\sigma}_z\hat{a} = -i\dot{\hat{\sigma}}_- + \omega\hat{\sigma}_-. \quad (6.30b)$$

Stąd otrzymujemy zamknięte równanie

$$\ddot{\hat{\sigma}}_- + 2i(\nu - \hat{C})\dot{\hat{\sigma}}_- + (2\nu\hat{C} - \nu^2 + g^2)\hat{\sigma}_- = 0. \quad (6.31)$$

Analogicznie można wyprowadzić równanie drugiego stopnia na \hat{a} , otrzymując

$$\ddot{\hat{a}} + 2i(\nu - \hat{C})\dot{\hat{a}} + (2\nu\hat{C} - \nu^2 + g^2)\hat{a} = 0. \quad (6.32)$$

Są to równania różniczkowe drugiego rzędu ze stałymi współczynnikami i mają one rozwiązania w postaci oscylatorowej

$$\hat{\sigma}_-(t) = e^{i(\hat{C}-\nu)t} \left[\left(\cos(\hat{\kappa}t) + i\hat{C}\frac{\sin(\hat{\kappa}t)}{\hat{\kappa}} \right) \hat{\sigma}_-(0) - ig\frac{\sin(\hat{\kappa}t)}{\hat{\kappa}}\hat{a}(0) \right] \quad (6.33a)$$

$$\hat{a}(t) = e^{i(\hat{C}-\nu)t} \left[\left(\cos(\hat{\kappa}t) - i\hat{C}\frac{\sin(\hat{\kappa}t)}{\hat{\kappa}} \right) \hat{a}(0) - ig\frac{\sin(\hat{\kappa}t)}{\hat{\kappa}}\hat{\sigma}_-(0) \right], \quad (6.33b)$$

gdzie $\hat{\kappa} = \left[\frac{\Delta^2}{4} + g^2(\hat{N} + 1) \right]^{\frac{1}{2}}$ jest stałym operatorem, zatem w podprzestrzeni o ustalonym N można go traktować jako liczbę. Z rozwiązania tego można wywnioskować wszystkie istotne średnie. W szczególności wyznaczyć można różnicę obsadzeń (inwersję) korzystając z wyrażenia

$$W(t) = \langle \hat{\sigma}_z(t) \rangle = 2 \langle \hat{\sigma}_+(t)\hat{\sigma}_-(t) \rangle - 1 \quad (6.34)$$

i porównać z wynikiem (6.19).

6.1.3 Rozwiązanie przez operator ewolucji

Na końcu przedstawimy metodę rozwiązania zagadnienia oddziaływania atomu dwupoziomowego z jednomodowym polem elektromagnetycznym przez operator ewolucji. W tym celu, dla uproszczenia, założymy, że odstrojenie jest zerowe, czyli $\Delta = 0$. W takim przypadku operator ewolucji jest postaci

$$\hat{U}(t) = e^{-i\frac{t}{\hbar}\hat{V}}, \quad (6.35)$$

gdzie \hat{V} z równania (6.12) dla $\Delta = 0$ nie zależy od czasu i wynosi

$$\hat{V} = \hbar g (\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger). \quad (6.36)$$

Policzenie eksponentu od tego operatora sprowadza się do wyznaczenia parzystych i nieparzystych potęg argumentu, które są postaci

$$(\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger)^{2l} = (\hat{a}\hat{a}^\dagger)^l |a\rangle\langle a| + (\hat{a}^\dagger\hat{a})^l |b\rangle\langle b| \quad (6.37a)$$

$$(\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger)^{2l+1} = (\hat{a}\hat{a}^\dagger)^l \hat{a} |a\rangle\langle b| + \hat{a}^\dagger (\hat{a}\hat{a}^\dagger)^l |b\rangle\langle a|. \quad (6.37b)$$

Wyrażenia te dają operator ewolucji postaci

$$\begin{aligned} \hat{U}(t) = & \cos(gt\sqrt{\hat{a}^\dagger\hat{a}+1})|a\rangle\langle a| + \cos(gt\sqrt{\hat{a}^\dagger\hat{a}})|b\rangle\langle b| \\ & - i\frac{\sin(gt\sqrt{\hat{a}^\dagger\hat{a}+1})}{\sqrt{\hat{a}^\dagger\hat{a}+1}}\hat{a}|a\rangle\langle b| - i\hat{a}^\dagger\frac{\sin(gt\sqrt{\hat{a}^\dagger\hat{a}+1})}{\sqrt{\hat{a}^\dagger\hat{a}+1}}|b\rangle\langle a|. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Następnie założmy, że początkowo atom jest w stanie podstawowym, czyli

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(0) |a, n\rangle. \quad (6.39)$$

Działając na ten stan operatorem (6.38) dostajemy

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t) |\psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(0) [\cos(gt\sqrt{n+1}) |a, n\rangle - i \sin(gt\sqrt{n+1}) |b, n+1\rangle]. \quad (6.40)$$

Wynik ten w pełni pokrywa się z wyrażeniami (6.17) dla $\Delta = 0$.

6.2 Emisja spontaniczna

W tej części wykażemy, że atom dwupoziomowy, który początkowo znajduje się w stanie wzbudzonym, na skutek oddziaływania z wielomodowym polem elektromagnetycznym w stanie próżni, podlega procesowi relaksacji — to jest przechodzi do stanu podstawowego, czemu towarzyszy emisja kwantu promieniowania elektromagnetycznego o częstości równej różnicy energii między poziomami atomu.

W tym celu musimy wzbogacić nasz opis, to jest przywrócić wielomodową strukturę pola elektromagnetycznego. Przechodząc od razu do obrazu oddziaływania, zapisujemy potencjał oddziaływania pola z atomem, który jest postaci

$$\hat{V} = \hbar \sum_{\mathbf{k}} \left[g_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}_0) \hat{\sigma}_+ \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{i(\omega - \nu_{\mathbf{k}})t} + g_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}_0) \hat{\sigma}_- \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i(\omega - \nu_{\mathbf{k}})t} \right], \quad (6.41)$$

gdzie podkreśliliśmy przestrzenną zależność pola elektromagnetycznego, wyznaczonego w \mathbf{r}_0 , czyli w miejscu, gdzie znajduje się atom, $g_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}_0) = g_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_0}$. Zakładamy następnie, że stan początkowy układu to: atom w stanie podstawowym oraz pole w stanie próżni. Poszukujemy zatem rozwiązania postaci

$$|\psi(t)\rangle = c_a(t) |a, 0\rangle + \sum_{\mathbf{k}} c_{b,\mathbf{k}}(t) |b, 1_{\mathbf{k}}\rangle, \quad (6.42)$$

z warunkiem początkowym $c_a(0) = 1$ and $c_{b,\mathbf{k}} = 0$. Ponieważ potencjał zależy od czasu (odstrojenia są niezerowe), wygodniej jest pracować korzystając z jawnego równania Schrödingera, czyli

$$\partial_t |\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} \hat{V} |\psi(t)\rangle. \quad (6.43)$$

Podstawiając wyrażenie na stan (6.42) otrzymujemy układ sprzężonych równań

$$\dot{c}_a(t) = -i \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}_0) e^{i(\omega - \nu_{\mathbf{k}})t} c_{b,\mathbf{k}}(t), \quad (6.44a)$$

$$\dot{c}_{b,\mathbf{k}}(t) = -i g_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}_0) e^{-i(\omega - \nu_{\mathbf{k}})t} c_a(t). \quad (6.44b)$$

Formalne całkowanie po czasie drugiego z tych równań daje

$$c_{b,\mathbf{k}}(t) = -ig_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}_0) \int_0^t dt' e^{-i(\omega-\nu_{\mathbf{k}})t'} c_a(t'). \quad (6.45)$$

Następnie podstawiamy to rozwiązanie do równania (6.44a) i otrzymujemy zamknięte wyrażenie

$$\dot{c}_a(t) = -i \sum_{\mathbf{k}} |g_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}_0)|^2 \int_0^t dt' e^{i(\omega-\nu_{\mathbf{k}})(t-t')} c_a(t'). \quad (6.46)$$

Póki co jest to wyrażenie ściśle, które będziemy teraz przybliżać tak, by dostać analityczne wyrażenie. Przede wszystkim, przybliżymy sumowanie po modach przez całkę, to jest

$$\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow 2 \frac{V}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{\infty} k^2 dk, \quad (6.47)$$

gdzie V jest objętością kwantyzacji, zaś dwójka wynika z sumowania po obu polaryzacjach. Przyjmując za θ kąt pomiędzy wektorem momentu dipolowego oraz wektorem polaryzacji pola, otrzymujemy wyrażenie na stałą sprzężenia

$$|g_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}_0)|^2 = \frac{\nu_k}{2\hbar\epsilon_0 V} \wp_{ab}^2 \cos^2 \theta. \quad (6.48)$$

Podstawiamy to wyrażenie do (6.46), wykonujemy całki po kątach i otrzymujemy

$$\dot{c}_a(t) = -\frac{4\wp_{ab}^2}{(2\pi)^2 6\epsilon_0 \hbar c^3} \int_0^{\infty} d\nu_k \nu_k^3 \int_0^t dt' e^{i(\omega-\nu_k)(t-t')} c_a(t'). \quad (6.49)$$

Następnie zauważmy, że częstość światła, czyli ν_k , jest zbliżona do częstości atomowej. Oznacza to, że możemy przyjąć $\nu_k^3 \text{simeq} \omega^3$, jako że funkcja ta zmienia się powoli względem oscylujących funkcji wykładniczych. Z kolei całka po częstościach da

$$\int_0^{\infty} d\nu_k e^{i(\omega-\nu_k)(t-t')} c_a(t') = 2\pi e^{i\omega(t-t')} \delta(t-t'), \quad (6.50)$$

co daje

$$\dot{c}_a(t) = -\frac{\Gamma}{2} c_a(t), \quad (6.51)$$

gdzie

$$\Gamma = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\omega^3 \wp_{ab}^2}{3\hbar c^3} \quad (6.52)$$

jest współczynnikiem emisji spontanicznej. Rozwiązanie tego prostego równania różniczkowego to

$$\rho_{aa}(t) = |c_a(t)|^2 = e^{-\Gamma t}, \quad (6.53)$$

a zatem charakterystyczny zanik eksponencjalny.

6.2.1 Stan światła

Wyznamy teraz stan światła powstały na skutek procesu emisji spontanicznej. W tym celu, podstawiamy do równania (6.42) wyrażenie na $c_a(t)$ oraz na $c_{b,\mathbf{k}}(t)$, które otrzymujemy z odcałkowania równania (6.45) z przybliżonym rozwiązaniem (6.51). Mamy zatem

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{\Gamma}{2}t} |a, 0\rangle + |b\rangle \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_0} \left[\frac{1 - e^{i(\omega - \nu_k)t - \frac{\Gamma}{2}t}}{(\nu_k - \omega) + i\frac{\Gamma}{2}} \right] |1_{\mathbf{k}}\rangle. \quad (6.54)$$

Dla odpowiednio długich czasów człony postaci $e^{-\Gamma/2t}$ zanikają eksponencjalnie. Możemy wtedy przyjąć, że możemy zatem interpretować stan

$$|\gamma_0\rangle = \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_0} \left[\frac{1}{(\nu_k - \omega) + i\frac{\Gamma}{2}} \right] |1_{\mathbf{k}}\rangle, \quad (6.55)$$

jako jednofotonowy stan światła powstały na skutek emisji kwantu promieniowania w ramach procesu emisji spontanicznej.

Obliczymy teraz gęstość pola elektromagnetycznego, czyli diagonalną część funkcji korelacji pierwszego rzędu. Z definicji, mamy

$$\begin{aligned} G^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; t, t) &= \langle \psi | \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | \psi \rangle = \langle \gamma_0 | \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | \gamma_0 \rangle \\ &= \langle \gamma_0 | \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) | 0 \rangle \langle 0 | \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | \gamma_0 \rangle. \end{aligned} \quad (6.56)$$

W ostatniej linii wstawiliśmy rozkład jedynek, z którego wkład do sumy będzie miał tylko stan próżni (bo $|\gamma_0\rangle$ jest stanem jednofotonowym). Możemy zatem nadać wielkości

$$\Psi_{\gamma}(\mathbf{r}, t) = \langle 0 | \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | \gamma_0 \rangle \quad (6.57)$$

interpretację funkcji falowej fotonu. Wstawiając definicję $\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ otrzymujemy

$$\langle 0 | \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | \gamma_0 \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V}} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \langle 0 | (\nu_{k'})^{\frac{1}{2}} \hat{a}_{\mathbf{k}'} e^{-i\nu_{k'}t + i\mathbf{k}'\mathbf{r}} g_{\mathbf{k}} \frac{e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_0}}{(\nu_k - \omega) + i\frac{\Gamma}{2}} | 1_{\mathbf{k}} \rangle. \quad (6.58)$$

Obłożenie operatora anihilacji z jednej strony próżnią, z drugiej zaś stanem jednofotonowym, daje $\delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$, co z kolei pozwala wykonać jedną z sum, dając

$$\langle 0 | \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | \gamma_0 \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V}} \sum_{\mathbf{k}} (\nu_k)^{\frac{1}{2}} e^{-i\nu_k t + i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)} g_{\mathbf{k}} \frac{1}{(\nu_k - \omega) + i\frac{\Gamma}{2}}. \quad (6.59)$$

Raz jeszcze zastępujemy sumę całką. Ponadto przyjmujemy, że wektor $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ wyznacza oś z oraz że wektor momentu dipolowego tworzy kąt η z osią z i leży w płaszczyźnie x - z . Otrzymujemy zatem

$$\langle 0 | \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | \gamma_0 \rangle = \frac{ic\mathcal{P}_{ab} \sin \eta}{8\pi^2 \epsilon_0 \Delta r} \int_0^{\infty} dk k^2 (e^{ik\Delta r} - e^{-ik\Delta r}) \frac{e^{-i\nu_k t}}{(\nu_k - \omega) + i\frac{\Gamma}{2}}, \quad (6.60)$$

gdzie $\Delta r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$. Zauważmy, że człon proporcjonalny do $e^{-i(k\Delta r + \nu_k t)}$ reprezentuje falę padającą, jest zatem dla nas nieistotny. Zakładając, że k^2 zmienia się powoli względem oscylacji pozostałych członów, możemy wyciągnąć to wyrażenie przez całkę, zastępując przez ω^2/c^2 . Wyznaczenie “funkcji falowej” fotonu sporadza się do policzenia całki postaci

$$I = \int_0^\infty d\nu_k e^{i\nu_k \Delta r/c} \frac{e^{-i\nu_k t}}{(\nu_k - \omega) + i\frac{\Gamma}{2}}. \quad (6.61)$$

Całkę tę wykonujemy poprzez całkowanie w przestrzeni zespolonej po konturze pokazanym na rysunku 6.3 na stronie 210 (S&Z). W rezultacie otrzymujemy (**policzyć!**)

$$\langle 0 | \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | \gamma_0 \rangle = \frac{\mathcal{E}_0}{\Delta r} \Theta(t - \Delta r/c) e^{-i(t - \Delta r/c)(\omega - \Gamma/2)}, \quad (6.62)$$

gdzie

$$\mathcal{E}_0 = -\frac{\omega^2 \varphi_{ab} \sin \eta}{4\pi \epsilon_0 c^2 \Delta r}. \quad (6.63)$$

Zauważmy, że funkcja schodkowa jest manifestacją skończonej prędkości propagacji impulsu elektromagnetycznego.

6.3 Kaskady dwufotonowe

W tej części opiszemy proces, w którym atom *trzyposzomowy* spontanicznie przechodzi do stanu podstawowego $|c\rangle$ z drugiego stanu wzbudzonego $|a\rangle$, poprzez pośredni stan wzbudzony $|b\rangle$. W tym procesie powstaje tak zwana kaskada fotonowa, albowiem emitowane są dwa fotony — ten związany z przejściem $a \rightarrow b$ oraz $b \rightarrow c$. Hamiltonian oddziaływania wielomodowego pola elektromagnetycznego z takim układem, w obrazie oddziaływania, będzie miał postać

$$\hat{V} = \hbar \sum_{\mathbf{k}} \left[g_{a,\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}_0) \hat{\sigma}_+^{(1)} \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{i(\omega_{ab} - \nu_{\mathbf{k}})t} + g_{a,\mathbf{k}}(\mathbf{r}_0) \hat{\sigma}_-^{(1)} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i(\omega_{ab} - \nu_{\mathbf{k}})t} \right] + \quad (6.64)$$

$$+ \hbar \sum_{\mathbf{q}} \left[g_{b,\mathbf{q}}^*(\mathbf{r}_0) \hat{\sigma}_+^{(2)} \hat{a}_{\mathbf{q}} e^{i(\omega_{bc} - \nu_{\mathbf{q}})t} + g_{b,\mathbf{q}}(\mathbf{r}_0) \hat{\sigma}_-^{(2)} \hat{a}_{\mathbf{q}}^\dagger e^{-i(\omega_{bc} - \nu_{\mathbf{q}})t} \right]. \quad (6.65)$$

Stan układu, który początkowo składa się z atomu w drugim stanie wzbudzonym i próżni elektromagnetycznej, będzie postaci

$$|\psi(t)\rangle = c_a(t) |a, 0\rangle + \sum_{\mathbf{k}} c_{b,\mathbf{k}}(t) |b, \mathbf{1}_{\mathbf{k}}\rangle + \sum_{\mathbf{k}} c_{c,\mathbf{k},\mathbf{q}}(t) |c, \mathbf{1}_{\mathbf{k}}, \mathbf{1}_{\mathbf{q}}\rangle. \quad (6.66)$$

Raz jeszcze wypisujemy równania ruchu i otrzymujemy

$$\dot{c}_a(t) = -i \sum_{\mathbf{k}} g_{a,\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}_0) e^{i(\omega_{ab} - \nu_{\mathbf{k}})t} c_{b,\mathbf{k}}(t), \quad (6.67a)$$

$$\dot{c}_{b,\mathbf{k}}(t) = -i g_{a,\mathbf{k}}(\mathbf{r}_0) e^{-i(\omega_{ab} - \nu_{\mathbf{k}})t} c_a(t) - i \sum_{\mathbf{q}} g_{b,\mathbf{q}}^*(\mathbf{r}_0) e^{i(\omega_{bc} - \nu_{\mathbf{q}})t} c_{c,\mathbf{k},\mathbf{q}}(t), \quad (6.67b)$$

$$\dot{c}_{c,\mathbf{k},\mathbf{q}}(t) = -i g_{b,\mathbf{q}}(\mathbf{r}_0) e^{-i(\omega_{bc} - \nu_{\mathbf{q}})t} c_{b,\mathbf{k}}(t). \quad (6.67c)$$

Poprzez analogię do poprzedniej części, zauważamy, że w przybliżeniu Weisskopfa-Wignera znowu otrzymamy

$$-i \sum_{\mathbf{k}} g_{a,\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}_0) e^{i(\omega_{ab} - \nu_{\mathbf{k}})t} c_{b,\mathbf{k}}(t) = -\frac{\Gamma_a}{2} c_a \quad (6.68)$$

$$-i \sum_{\mathbf{q}} g_{b,\mathbf{q}}^*(\mathbf{r}_0) e^{i(\omega_{bc} - \nu_{\mathbf{q}})t} c_{c,\mathbf{k},\mathbf{q}}(t) = -\frac{\Gamma_b}{2} c_{b,\mathbf{k}}. \quad (6.69)$$

Podstawiając te wyrażenia oraz rozwiązanie na c_a do równań (6.70), otrzymujemy następujące wyrażenia

$$\dot{c}_a(t) = -\frac{\Gamma_a}{2} c_a, \quad (6.70a)$$

$$\dot{c}_{b,\mathbf{k}}(t) = -i g_{a,\mathbf{k}}(\mathbf{r}_0) e^{-i(\omega_{ab} - \nu_{\mathbf{k}})t - \frac{\Gamma_a}{2}t} - \frac{\Gamma_b}{2} c_{b,\mathbf{k}}, \quad (6.70b)$$

$$\dot{c}_{c,\mathbf{k},\mathbf{q}}(t) = -i g_{b,\mathbf{q}}(\mathbf{r}_0) e^{-i(\omega_{bc} - \nu_{\mathbf{q}})t} c_{b,\mathbf{k}}(t). \quad (6.70c)$$

Bezpośrednie odcałkowanie niejednorodnego równania (6.70b) daje

$$c_{b,\mathbf{k}}(t) = -i g_{a,\mathbf{k}}(\mathbf{r}_0) \int_0^t dt' e^{-i(\omega_{ab} - \nu_{\mathbf{k}})t' - \frac{\Gamma_a}{2}t' - \frac{\Gamma_b}{2}(t-t')} = \quad (6.71)$$

$$= -i g_{a,\mathbf{k}}(\mathbf{r}_0) \frac{e^{i(\nu_{\mathbf{k}} - \omega_{ab})t - \frac{\Gamma_a}{2}t} - e^{-\frac{\Gamma_b}{2}t}}{i(\nu_{\mathbf{k}} - \omega_{ab}) - \frac{1}{2}(\Gamma_a - \Gamma_b)}. \quad (6.72)$$

To wyrażenie podstawiamy do (6.70c) - otrzymujemy następujące rozwiązanie dla długich czasów

$$c_{c,\mathbf{k},\mathbf{q}}(\infty) = -\frac{g_{a,\mathbf{k}} g_{b,\mathbf{q}} e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{q})\mathbf{r}_0}}{(i(\nu_{\mathbf{k}} + \nu_{\mathbf{q}} - \omega_{ac}) - \frac{1}{2}\Gamma_a)(i(\nu_{\mathbf{q}} - \omega_{bc}) - \frac{1}{2}\Gamma_b)}. \quad (6.73)$$

Widzimy zatem, że dla odpowiednio długich czasów (względem odwrotności stałych tłumienia) stan światła jest stanem dwufotonowym postaci

$$|\gamma, \phi\rangle = -\sum_{\mathbf{k},\mathbf{q}} \frac{g_{a,\mathbf{k}} g_{b,\mathbf{q}} e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{q})\mathbf{r}_0}}{(i(\nu_{\mathbf{k}} + \nu_{\mathbf{q}} - \omega_{ac}) - \frac{1}{2}\Gamma_a)(i(\nu_{\mathbf{q}} - \omega_{bc}) - \frac{1}{2}\Gamma_b)} |1_{\mathbf{k}}, 1_{\mathbf{q}}\rangle. \quad (6.74)$$

Rozdział 7

Tłumienie — metoda Heisenberga-Langevina

W tym rozdziale omówimy metodę uwzględniania strat fotonów z jednego modu na skutek sprzęgania się do nieskończonego zbioru modów (zwanymi rezerwuarem). Metoda ta pozwoli nam opisać dynamikę atomu we wnęce rezonansowej oddziałującego z jednomodowym polem elektromagnetycznym w obecności strat fotonów. Ponadto, wyprowadzone równanie Langevina przydatne będzie do opisu nieliniowego procesu parametrycznego we wnęce rezonansowej w Rozdziale 8.

7.1 Tłumienie przez sprzężenie z rezerwuarem oscylatorów

Rozważmy jednomodowe pole elektromagnetyczne o częstotliwości ν , które sprzęga się z wielomodowym polem oscylatorów (na przykład innych modów pola elektromagnetycznego, fononów, itp.) o mało oddalonych częstotliwościach ν_k . Hamiltonian takiego układu będzie postaci $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$, gdzie część swobodna i oddziaływanie są postaci

$$\hat{H}_0 = \hbar\nu\hat{a}^\dagger\hat{a} + \sum_{\mathbf{k}} \hbar\nu_k\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger\hat{b}_{\mathbf{k}} \quad (7.1a)$$

$$\hat{H}_1 = \hbar \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}(\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger\hat{a} + \hat{b}_{\mathbf{k}}\hat{a}^\dagger). \quad (7.1b)$$

Zauważmy, że już na tym etapie zastosowaliśmy przybliżenie wolno rotującej fali. Wypisujemy teraz równania ruchu dla operatorów \hat{a} i $\hat{b}_{\mathbf{k}}$, które są postaci

$$\dot{\hat{a}} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{a}] = -i\nu\hat{a} - i \sum_{\mathbf{k}} \nu_k g_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}} \quad (7.2a)$$

$$\dot{\hat{b}}_{\mathbf{k}} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{b}_{\mathbf{k}}] = -i\nu_k\hat{b}_{\mathbf{k}} - ig_{\mathbf{k}}\hat{a}. \quad (7.2b)$$

Naszym celem jest wypisanie zamkniętego równania na mod \hat{a} . W tym celu zauważamy, że można formalnie odcałkować równanie (7.2b), otrzymując

$$\hat{b}_{\mathbf{k}} = \hat{b}_{\mathbf{k}}(0)e^{-i\nu_{\mathbf{k}}t} - ig_{\mathbf{k}} \int_0^t dt' \hat{a}(t')e^{-i\nu_{\mathbf{k}}(t-t')}. \quad (7.3)$$

Wynik ten podstawiamy do równania (7.2a) otrzymując formalne równanie na \hat{a} postaci

$$\dot{\hat{a}} = -i\nu\hat{a} - \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}^2 \int_0^t dt' \hat{a}(t')e^{-i\nu_{\mathbf{k}}(t-t')} + \hat{f}_a(t), \quad (7.4)$$

gdzie operator \hat{f}_a nazywamy operatorem szumu, albowiem pochodzi on wyłącznie od zewnętrznego pola i wynosi

$$\hat{f}_a(t) = -i \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}}(0)e^{-i\nu_{\mathbf{k}}t}. \quad (7.5)$$

Przechodzimy następnie do układu obracającego się z częstością ν , czyli wprowadzamy

$$\hat{\hat{a}} = \hat{a}e^{i\nu t}, \quad (7.6)$$

który spełnia bozonowe relacje komutacyjne, a ponadto, na mocy (7.4), spełnia równanie ruchu

$$\dot{\hat{\hat{a}}} = - \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}^2 \int_0^t dt' \hat{\hat{a}}(t')e^{-i(\nu_{\mathbf{k}}-\nu)(t-t')} + \hat{\hat{F}}_a(t), \quad (7.7)$$

gdzie

$$\hat{\hat{F}}_a(t) = -i \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}}(0)e^{-i(\nu_{\mathbf{k}}-\nu)t}. \quad (7.8)$$

Raz jeszcze, korzystając z doświadczenia nabytego w poprzednim rozdziale, możemy — w przybliżeniu Weisskopfa-Wignera — wyznaczyć sumę w równaniu (7.9). Zastępując sumę po wektorach falowych przez całkę, oraz zakładając, że $g_{\mathbf{k}}$ wolno się zmienia względem oscylacji funkcji wykładniczych, znowu dostajemy wyrażenie proporcjonalne do $\delta(t-t')$. Daje to

$$\sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}^2 \int_0^t dt' \hat{\hat{a}}(t')e^{-i(\nu_{\mathbf{k}}-\nu)(t-t')} \simeq \frac{1}{2} \mathcal{C} \hat{\hat{a}}(t). \quad (7.9)$$

Stała tłumienia wyraża się wzorem

$$\mathcal{C} = 2\pi g_{\nu/c} V \frac{\nu^2}{\pi^2 c^3} \equiv 2\pi g^2(\nu) D(\nu), \quad (7.10)$$

gdzie V jest objętością kwantyzacji. W ramach tego przybliżenia, równanie ewolucji pola jest postaci

$$\dot{\hat{\hat{a}}} = -\frac{1}{2} \mathcal{C} \hat{\hat{a}} + \hat{\hat{F}}_a(t). \quad (7.11)$$

Zatem dynamika pola składa się z dwóch procesów — dysypacji (tłumienia), związanego ze stałą \mathcal{C} oraz fluktuacji zadanych przez operator $\hat{F}_a^\dagger(t)$. Jest to przykład słuszności twierdzenia dysypacyjno-fluktuacyjnego.

Założmy, że rezerwuuar znajduje się w równowadze termicznej, co oznacza, że spełnione są następujące związki

$$\langle \hat{b}_{\mathbf{k}}(0) \rangle = \langle \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger(0) \rangle = 0, \quad (7.12a)$$

$$\langle \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger(0) \hat{b}_{\mathbf{k}'}(0) \rangle = \bar{n}_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}, \quad (7.12b)$$

$$\langle \hat{b}_{\mathbf{k}}(0) \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger(0) \rangle = (\bar{n}_{\mathbf{k}} + 1) \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}, \quad (7.12c)$$

$$\langle \hat{b}_{\mathbf{k}'}(0) \hat{b}_{\mathbf{k}}(0) \rangle = \langle \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger(0) \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger(0) \rangle = 0. \quad (7.12d)$$

Korzystając z tych wyrażeń można wykazać, że

- Wartość średnia siły fluktuującej jest zero, czyli

$$\langle \hat{F}_a^\dagger(t) \rangle = \langle \hat{F}_a^\dagger(t) \rangle = 0. \quad (7.13)$$

- Korelacja dwuczasiowa siły fluktuującej wynosi

$$\begin{aligned} \langle \hat{F}_a^\dagger(t) \hat{F}_a^\dagger(t') \rangle &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} g_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}'} \langle \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}'} \rangle e^{i(\nu_{\mathbf{k}} - \nu_{\mathbf{k}'})t - i(\nu_{\mathbf{k}'} - \nu_{\mathbf{k}})t'} \\ &= \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}^2 \bar{n}_{\mathbf{k}} e^{i(\nu_{\mathbf{k}} - \nu_{\mathbf{k}})(t-t')} \simeq \int_0^\infty d\nu_k D(\nu_k) g^2(\nu_k) \bar{n}(\nu_k) e^{i(\nu_k - \nu_k)(t-t')}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Raz jeszcze możemy przyjąć, że funkcje D , g i \bar{n} wolno się zmieniają w porównaniu z tempem oscylacji funkcji wykładniczej, co oznacza, że można je wyciągnąć przed całkę, tę zaś wykonać, otrzymując

$$\langle \hat{F}_a^\dagger(t) \hat{F}_a^\dagger(t') \rangle \simeq \mathcal{C} \bar{n}_{\text{th}} \delta(t - t'), \quad (7.15)$$

gdzie stała \mathcal{C} dana jest równaniem (7.10). Wprowadzając

$$2 \langle D_{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \rangle = \mathcal{C} \bar{n}_{\text{th}}, \quad (7.16)$$

otrzymujemy następujący związek

$$\langle \hat{F}_a^\dagger(t) \hat{F}_a^\dagger(t') \rangle \simeq 2 \langle D_{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \rangle \delta(t - t'). \quad (7.17)$$

Analogicznie można wykazać, że zachodzi

$$\langle \hat{F}_a(t) \hat{F}_a^\dagger(t') \rangle = \mathcal{C} * (\bar{n}_{\text{th}} + 1) \delta(t - t'), \quad (7.18a)$$

$$\langle \hat{F}_a^\dagger(t) \hat{F}_a^\dagger(t') \rangle = \langle \hat{F}_a(t) \hat{F}_a(t') \rangle = 0. \quad (7.18b)$$

Oznacza to, że można wprowadzić następujące wielkości

$$2 \langle D_{\hat{a} \hat{a}^\dagger} \rangle = \mathcal{C} (\bar{n}_{\text{th}} + 1) \quad (7.19a)$$

$$, \langle D_{\hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger} \rangle = \langle D_{\hat{a} \hat{a}} \rangle = 0. \quad (7.19b)$$

• Następnie wyprowadzamy korelację między siłą fluktuującą a operatorem pola elektromagnetycznego, czyli $\langle \hat{F}_a^\dagger(t) \hat{a}(t) \rangle_R$, gdzie indeks R dodaliśmy, by podkreślić, że średniowanie jest wykonane po stopniach swobody związanych z rezerwuarem. W tym celu zauważamy, że formalne rozwiązanie równania (7.11) jest postaci

$$\hat{a}(t) = \hat{a}(0)e^{-\frac{1}{2}Ct} + \int_0^t dt' e^{-\frac{1}{2}C(t-t')} \hat{F}_a(t'). \quad (7.20)$$

Mamy stąd

$$\langle \hat{F}_a^\dagger(t) \hat{a}(t) \rangle_R = \langle \hat{F}_a^\dagger(t) \rangle_R \hat{a}(0)e^{-\frac{1}{2}Ct} + \int_0^t dt' e^{-\frac{1}{2}C(t-t')} \langle \hat{F}_a^\dagger(t) \hat{F}_a(t') \rangle_R. \quad (7.21)$$

Korzystając ze związków (7.13) oraz (7.17), otrzymujemy

$$\langle \hat{F}_a^\dagger(t) \hat{a}(t) \rangle_R = \langle D_{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \rangle_R \quad (7.22)$$

oraz tak samo dla $\langle \hat{a}^\dagger(t) \hat{F}_a(t) \rangle_R$.

7.1.1 Dynamika korelacji pola

Korzystając z powyższych wyników wyprowadzimy teraz równania ruchu, jakie spełniają funkcje korelacji pola elektromagnetycznego. Przede wszystkim, zauważmy, że na mocy równań (7.11) oraz (7.13), spełnione jest

$$\partial_t \langle \hat{a}(t) \rangle_R = \frac{1}{2}C \langle \hat{a}(t) \rangle_R. \quad (7.23)$$

Zatem średnia operatora (po zewnętrznych stopniach swobody) jest tłumiona w czasie. Analogicznie możemy wyprowadzić wyrażenie na średnią operatora liczby cząstek (również po rezerwarze)

$$\partial_t \langle \hat{a}^\dagger(t) \hat{a}(t) \rangle_R = \langle \partial_t \hat{a}^\dagger(t) \hat{a}(t) \rangle_R + \langle \hat{a}^\dagger(t) \partial_t \hat{a}(t) \rangle_R \quad (7.24)$$

Pochodne czasowe operatorów dane są przez (7.11), mamy zatem

$$\partial_t \langle \hat{a}^\dagger(t) \hat{a}(t) \rangle_R = -C \langle \hat{a}^\dagger(t) \hat{a}(t) \rangle_R + \langle \hat{F}_a^\dagger(t) \hat{a}(t) \rangle_R + \langle \hat{a}^\dagger(t) \hat{F}_a(t) \rangle_R. \quad (7.25)$$

Średnie te możemy policzyć korzystając z wyników z poprzedniej sekcji i otrzymujemy

$$\partial_t \langle \hat{a}^\dagger(t) \hat{a}(t) \rangle_R = -C \langle \hat{a}^\dagger(t) \hat{a}(t) \rangle_R + C\bar{n}_{\text{th}}. \quad (7.26)$$

Zatem $\langle \hat{a}^\dagger(t) \hat{a}(t) \rangle_R$ osiąga stan stacjonarny \bar{n}_{th} . Analogicznie, pokazać można, że

$$\partial_t \langle \hat{a}(t) \hat{a}^\dagger(t) \rangle_R = -C \langle \hat{a}(t) \hat{a}^\dagger(t) \rangle_R + C(\bar{n}_{\text{th}} + 1). \quad (7.27)$$

Odejmując od siebie powyższe równania, widzimy, że komutator operatora liczby fotonów, uśredniony po stopniach swobody rezerwuaru, pozostaje jednością. Analogiczne rachunki dają wyrażenie na funkcję korelacji wyższego rzędu dla operatorów \hat{a} oraz \hat{a}^\dagger , czyli

$$\begin{aligned} \partial_t \langle (\hat{a}^\dagger(t))^m (\hat{a}(t))^n \rangle_R &= -\frac{\mathcal{C}}{2}(n+m) \langle (\hat{a}^\dagger(t))^m (\hat{a}(t))^n \rangle_R + \\ &+ \mathcal{C}n\bar{n}_{\text{th}} \langle (\hat{a}^\dagger(t))^{m-1} (\hat{a}(t))^{n-1} \rangle_R \end{aligned} \quad (7.28a)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \langle (\hat{a}^\dagger(t))^m (\hat{a}(t))^n \rangle_R &= \left[i\nu(m-n) - \frac{\mathcal{C}}{2}(n+m) \right] \langle (\hat{a}^\dagger(t))^m (\hat{a}(t))^n \rangle_R + \\ &+ \mathcal{C}n\bar{n}_{\text{th}} \langle (\hat{a}^\dagger(t))^{m-1} (\hat{a}(t))^{n-1} \rangle_R. \end{aligned} \quad (7.28b)$$

Zauważmy następnie, że dla wnęki o dobroci Q , zdefiniowanej tak, że $\mathcal{C} \equiv \frac{\nu}{Q}$ mamy

$$\dot{\hat{a}} = -\frac{\nu}{2Q}\hat{a} + \hat{F}_a(t), \quad (7.29)$$

co odcałkowane dla czasów $\tau > 0$ daje

$$\hat{a}(t_i + \tau) = \hat{a}(t_i)e^{-\frac{\nu}{2Q}\tau} + \int_{t_i}^{\tau} dt' e^{-\frac{\nu}{2Q}(t_i + \tau - t')} \hat{F}_a(t'). \quad (7.30)$$

Jako że w chwili początkowej t_i pole jest odsprzęgnięte od rezerwuaru, mamy $\langle \hat{a}^\dagger(t_i) \hat{F}_a(t') \rangle_R = \langle \hat{a}^\dagger(t_i) \rangle_R \langle \hat{F}_a(t') \rangle_R$. Wynika stąd, że

$$\langle \hat{a}^\dagger(t_i) \hat{a}(t_i + \tau) \rangle_R = \langle \hat{a}^\dagger(t_i) \hat{a}(t_i) \rangle_R e^{-\frac{\nu}{2Q}\tau}. \quad (7.31)$$

Dwuczasowa funkcja korelacji zanika zatem z czasem. Na koniec, wyznaczmy spektrum pola. W tym celu, zauważmy, że funkcja korelacji dla operatorów wyjściowych jest postaci

$$\langle \hat{a}^\dagger(t_i) \hat{a}(t_i + \tau) \rangle_R = \langle \hat{a}^\dagger(t_i) \hat{a}(t_i) \rangle_R e^{-\frac{\nu}{2Q}\tau - i\nu\tau} = \langle n \rangle e^{-\frac{\nu}{2Q}\tau - i\nu\tau}. \quad (7.32)$$

Transformata Fouriera tego wyrażenia jest postaci

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \text{Re} \left[\int_0^\infty d\omega e^{i\omega\tau} \langle \hat{a}^\dagger(t_i) \hat{a}(t_i + \tau) \rangle_R \right] = \frac{\langle n \rangle}{\pi} \frac{\nu/2Q}{(\omega - \nu)^2 + (\nu/2Q)^2}. \quad (7.33)$$

Spektrum ma zatem postać funkcji Lorentza.

7.1.2 Twierdzenie fluktuacyjno-dysypacyjne i związek Einsteina

Zauważmy, że związek

$$\langle \hat{F}_a^\dagger(t) \hat{F}_a(t') \rangle = \mathcal{C} \bar{n}_{\text{th}} \delta(t - t'), \quad (7.34)$$

Można odwrócić poprzez wykonanie całki po czasie, co daje

$$\mathcal{C} = \frac{1}{\bar{n}_{\text{th}}} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \langle \hat{F}_a^\dagger(t) \hat{F}_a(t') \rangle. \quad (7.35)$$

Jest to wyrażony relacją matematyczną związek między tłumieniem (dysypacją) a fluktuacjami. Widzimy, że obecność niezerowej siły fluktuującej implikuje niezerowe tłumienie. Ponadto zauważmy, że z równania (7.22) mamy

$$2 \langle D_{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \rangle_R = \langle \hat{F}_a^\dagger(t) \hat{a}(t) \rangle_R + \langle \hat{a}^\dagger(t) \hat{F}_a(t) \rangle_R. \quad (7.36)$$

Możemy to przepisać w następującej postaci

$$2 \langle D_{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \rangle_R = \partial_t \langle \hat{a}^\dagger(t) \hat{a}(t) \rangle_R - \left\langle \left[\partial_t \hat{a}^\dagger(t) - \hat{F}_a^\dagger(t) \right] \hat{a}(t) \right\rangle_R - \left\langle \hat{a}^\dagger(t) \left[\partial_t \hat{a}(t) - \hat{F}_a(t) \right] \right\rangle_R, \quad (7.37)$$

co jest wyprowadzonym początkowo przez Einsteina wyrażeniem na stałą tłumienia.

7.2 Atom we wnętrzu z tłumieniem

W tej części pokażemy, jak zagadnienie tłumienia znajduje zastosowanie do opisu atomu dwupoziomowego oddziałującego z pojedynczym modem pola elektromagnetycznego we wnętrzu oraz kontinuum modów rezonansowych. Hamiltonian takiego układu składa się z części swobodnych oraz z członów odpowiedzialnych odpowiednio za oddziaływanie atomu (A) z polem wnęki (F) oraz pola z rezerwuarem (R). Mamy zatem

$$\hat{H} = \hat{H}_F + \hat{H}_A + \hat{H}_{AF} + \hat{H}_R + \hat{H}_{FR}, \quad (7.38)$$

gdzie kolejne człony mają postać

$$\hat{H}_F = \hbar \nu \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (7.39a)$$

$$\hat{H}_A = \frac{1}{2} \hbar \nu \hat{\sigma}_z \quad (7.39b)$$

$$\hat{H}_R = \sum_{\mathbf{k}} \hbar \nu_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} \quad (7.39c)$$

$$\hat{H}_{AF} = \hbar g (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger) \quad (7.39d)$$

$$\hat{H}_{RF} = \hbar \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} (\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a} + \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{a}^\dagger). \quad (7.39e)$$

Opis zagadnienia polega na znalezieniu rozwiązania na wszystkie wielkości operatorowe, które pojawiają się w powyższych Hamiltonianach. Niemniej, przybliżony opis można uzyskać poprzez podanie podstawowych zmiennych, to jest średniej liczby fotonów we wnętrzu $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$ oraz średniej inwersji obsadzeń $\langle \hat{\sigma}_z \rangle$. Równania Heisenberga dla tych wielkości są postaci

$$\frac{d \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle}{dt} = ig \langle \hat{\sigma}_+ \hat{a} - \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger \rangle - \mathcal{C} \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle + \mathcal{C} \bar{n}_{\text{th}}, \quad (7.40)$$

$$\frac{d \langle \hat{\sigma}_z \rangle}{dt} = -2ig \langle \hat{\sigma}_+ \hat{a} - \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger \rangle. \quad (7.41)$$

Widzimy zatem, że równania te nie są zamknięte, albowiem by znaleźć dynamikę dwóch poszukiwanych wielkości, należało by znać również zmienność

$\langle \hat{\sigma}_+ \hat{a} - \hat{\sigma}_i \hat{a}^\dagger \rangle$. Jak można się przekonać, wypisanie równania na tę wielkość z kolei, daje zależność od następnych, coraz bardziej skomplikowanych wielkości. Mówimy, że hierarchia równań jest nieskończona. Niemniej, dla uproszczenia rozważmy układ, w którym atom jest początkowo w stanie wzbudzonym, pole jest w stanie próżni $|0\rangle$, zaś rezerwar jest w zerowej temperaturze $\hat{n}_{\text{th}} = 0$. Należy się spodziewać, że układ będzie ewoluował w taki sposób, że będzie zachodzić zjawisko emisji spontanicznej, zatem pole elektromagnetyczne będzie co najwyżej jednofotonowe. W takim przypadku hierarchia równań jest skończona, albowiem wyższe momenty, takie jak $\langle (\hat{a}^\dagger)^2 \hat{\sigma}_z \hat{a}^2 \rangle$ będą tożsamościowo równe zero. Układ równań się zamyka i jest postaci

$$\frac{d\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle}{dt} = gA_1 - \mathcal{C} \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle, \quad (7.42)$$

$$\frac{d\langle \hat{\sigma}_z \rangle}{dt} = -2gA_1, \quad (7.43)$$

$$\frac{dA_1}{dt} = g \langle \hat{\sigma}_z \rangle + 2gA_2 + g - \frac{\mathcal{C}}{2}A_1, \quad (7.44)$$

$$\frac{dA_2}{dt} = -gA_1 - \mathcal{C}A_2, \quad (7.45)$$

gdzie $A_1 = i \langle \hat{\sigma}_+ \hat{a} - \hat{\sigma}_i \hat{a}^\dagger \rangle$ oraz $A_2 = \langle \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_z \hat{a} \rangle$. Ten układ równań można rozwiązać, na przykład przez eksponens od macierzy, transformatę Fouriera albo Laplace'a, i otrzymuje się (warunki początkowe $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle_0 = A_1(0) = A_2(0) = 0$, $\langle \hat{\sigma}_z \rangle_0 = 1$)

$$\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle_t = -\frac{8g^2 e^{-\frac{\mathcal{C}t}{2}}}{\mathcal{C}^2 - 16g^2} \left\{ 1 - \cosh \left[\sqrt{\mathcal{C}^2 - 16g^2} \frac{t}{2} \right] \right\} \quad (7.46)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{\sigma}_z \rangle_t = & -1 + \frac{4e^{-\frac{\mathcal{C}t}{2}}}{\mathcal{C}^2 - 16g^2} \left\{ -4g^2 + \right. \\ & + \left[\frac{\mathcal{C}^2}{4} - 2g^2 + \frac{\mathcal{C}}{4} \sqrt{\mathcal{C}^2 - 16g^2} \right] e^{\sqrt{\mathcal{C}^2 - 16g^2} \frac{t}{2}} + \\ & \left. + \left[\frac{\mathcal{C}^2}{4} - 2g^2 - \frac{\mathcal{C}}{4} \sqrt{\mathcal{C}^2 - 16g^2} \right] e^{-\sqrt{\mathcal{C}^2 - 16g^2} \frac{t}{2}} \right\}. \quad (7.47) \end{aligned}$$

Prawdopodobieństwo znalezienia atomu w stanie wzbudzonym, czyli $P_a(t) = \frac{1}{2}(1 + \langle \hat{\sigma}_z \rangle_t)$ wykazuje charakterystyczne tłumione oscylacje Rabiego (rysunek 9.2, strona 288 S&Z). Głębszą analizę można przeprowadzić, rozważając dwa przypadki graniczne parametru $\epsilon = \frac{\mathcal{C}}{4g}$.

- $\epsilon \ll 1$ Otrzymujemy wtedy

$$\langle \hat{\sigma}_z \rangle_t = -1 + e^{-\frac{\mathcal{C}t}{2}} [1 + \cos(2gt)] \quad (7.48)$$

$$P_a(t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{\mathcal{C}t}{2}} [1 + \cos(2gt)], \quad (7.49)$$

czyli tłumione oscylacje Rabiego z częstością $2g$.

- $\epsilon \gg 1$ Otrzymujemy wtedy

$$\langle \hat{\sigma}_z \rangle_t = -1 + 2e^{-\frac{4g^2 t}{\mathcal{C}}} \quad (7.50)$$

$$P_a(t) = e^{-\frac{4g^2 t}{\mathcal{C}}}, \quad (7.51)$$

czyli natychmiastowe tłumienie, bez oscylacji.

Rozdział 8

Parametryczny podział częstotści

W tym rozdziale opiszemy nieliniowy proces, w ramach którego powstaje ściśnięty, a zatem nieklasyczny stan światła. Przykładem takiego procesu jest zjawisko parametrycznego podziału częstotści, które zachodzi w trakcie propagacji wiązki klasycznego światła w kryształach nieliniowych — to jest takim, w którym mogą zachodzić zjawiska podziału częstotści bądź generacji wyższych harmonicznych.

8.1 Parametryczny podział częstotści w kryształach nieliniowych

Rozważmy wiązkę światła o częstotści ν_p (indeks p pochodzi od angielskiego “pump”), która przechodząc przez nieliniowy ośrodek podlega podziałowi na dwie wiązki o częstotści ν_s (“signal”) oraz ν_i (“idler”), tak że spełniona jest zasada zachowania energii

$$\nu_p = \nu_s + \nu_i. \quad (8.1)$$

W obrazie oddziaływania, Hamiltonian procesu podziału częstotści będzie postaci

$$\hat{V} = \hbar\kappa(\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_s^\dagger \hat{b} + \hat{a}_i \hat{a}_s \hat{b}^\dagger), \quad (8.2)$$

gdzie \hat{b} opisuje mod pompy, zaś κ jest stałą sprzężenia o wymiarze częstotści. Rozważymy teraz przypadek zdegenerowany, to jest taki, gdy częstotści ν_s i ν_i są równe. W tym przypadku nie ma możliwości rozróżnienia modów związanych z tymi dwiema wiązkami, co oznacza, że powyższy Hamiltonian upraszcza się do

$$\hat{V} = \hbar\kappa(\hat{a}^{\dagger 2} \hat{b} + \hat{a}^2 \hat{b}^\dagger). \quad (8.3)$$

Ponadto, założyć można, że pompa jest na tyle silna, że w jej opisie zaniedbać można wszelkie kwantowe fluktuacje. Oznacza to, że zastępujemy operator \hat{b}

przez c-liczbową wielkość, czyli

$$\hat{b} \rightarrow \beta_p e^{-i\phi}, \quad (8.4)$$

gdzie β_p i ϕ są odpowiednio amplitudą i fazą wiązki pompującej. W dalszej części dyskusji zakładamy, że w trakcie produkcji fotonów w modzie \hat{a} , pompa nie ulega zmianie. Jest to przybliżenie zgrubne, albowiem łamie one zasady zachowania. Niemniej jeżeli wiązka pompująca składa się z bilionów fotonów, produkcja ich niewielkiej liczby nie powinna mieć większego wpływu na pompę. Należy się spodziewać, że przybliżenie to jest słuszne, o ile spełniony jest zestaw założeń

$$\kappa t \rightarrow 0, \quad \beta_p \rightarrow 0, \quad \kappa t \beta_p = \text{const}. \quad (8.5)$$

W takim przypadku, równania Heisenberga na operatory kreacji i anihilacji są postaci

$$\dot{\hat{a}} = -i\Omega_p \hat{a}^\dagger e^{-i\phi} \quad (8.6a)$$

$$\dot{\hat{a}}^\dagger = i\Omega_p \hat{a} e^{i\phi}. \quad (8.6b)$$

Rozwiązania tego równania mają postać

$$\hat{a}(t) = \hat{a}_0 \cosh(\Omega_p t) - i\hat{a}_0^\dagger \sinh(\Omega_p t) e^{-i\phi} \quad (8.7a)$$

$$\hat{a}^\dagger(t) = \hat{a}_0^\dagger \cosh(\Omega_p t) + i\hat{a}_0 \sinh(\Omega_p t) e^{i\phi}, \quad (8.7b)$$

gdzie $\Omega_p = 2\kappa\beta_p$. Widzimy zatem, że odtwarzamy równania (2.38), stąd wnioskujemy, że parametryczny podział częstości jest źródłem stanów ściśniętych, a zatem nieklasycznych stanów światła. W szczególności kwadratury pola elektromagnetycznego

$$\hat{X}_1 = \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{2} \quad (8.8a)$$

$$\hat{X}_2 = \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{2i} \quad (8.8b)$$

będą fluktuowały w taki sposób, że

$$\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle = \frac{1}{4} e^{-2u} \quad (8.9a)$$

$$\langle (\Delta \hat{X}_2)^2 \rangle = \frac{1}{4} e^{2u}, \quad (8.9b)$$

gdzie $u = \Omega_p t$.

8.2 Ściskanie we wnęce rezonansowej

Załóżmy teraz, że nieliniowy ośrodek umieszczony został we wnętrzu wnęki rezonansowej. Proste równania (8.6) należy wzbogacić o możliwość tłumienia ze stałą \mathcal{C} . Będą one zatem postaci

$$\dot{\hat{a}} = -\Omega_p \hat{a}^\dagger - \frac{\mathcal{C}}{2} \hat{a} + \hat{F}(t) \quad (8.10a)$$

$$\dot{\hat{a}}^\dagger = -\Omega_p \hat{a} - \frac{\mathcal{C}}{2} \hat{a}^\dagger + \hat{F}^\dagger(t), \quad (8.10b)$$

gdzie dla uproszczenia założyliśmy, że faza pompy wynosi $\frac{\pi}{2}$. Przypomnijmy, że \hat{F} , na mocy twierdzenia fluktuacyjno-dyssypacyjnego, reprezentuje siłę fluktuującą (patrz szczegółowa dyskusja w rozdziale 7). Co do tej siły, założymy jak poprzednio, że zachodzi zbiór związków

$$\langle \hat{F}(t) \rangle = \langle \hat{F}(t)\hat{F}(t') \rangle = \langle \hat{F}^\dagger(t)\hat{F}(t') \rangle = \langle \hat{F}^\dagger(t)\hat{F}^\dagger(t') \rangle = 0 \quad (8.11a)$$

$$\langle \hat{F}(t)\hat{F}^\dagger(t') \rangle = C\delta(t-t'). \quad (8.11b)$$

Wyprowadzimy teraz równania na podstawowe momenty tego układu, to jest na $\langle \hat{a} \rangle$, $\langle \hat{a}^\dagger \rangle$ oraz $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$. Zauważmy, że dwa najniższe momenty spełniają zamknięty układ równań różniczkowych

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{a} \rangle = -\Omega_p \langle \hat{a}^\dagger \rangle - \frac{C}{2} \langle \hat{a} \rangle \quad (8.12a)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{a}^\dagger \rangle = -\Omega_p \langle \hat{a} \rangle - \frac{C}{2} \langle \hat{a}^\dagger \rangle. \quad (8.12b)$$

Rozwiązanie tego prostego układu jest postaci

$$\langle \hat{a} \rangle_t = [\langle \hat{a} \rangle_0 \cosh(\Omega_p t) - \langle \hat{a}^\dagger \rangle_0 \sinh(\Omega_p t)] e^{-\frac{Ct}{2}} \quad (8.13a)$$

$$\langle \hat{a}^\dagger \rangle_t = [\langle \hat{a}^\dagger \rangle_0 \cosh(\Omega_p t) - \langle \hat{a} \rangle_0 \sinh(\Omega_p t)] e^{-\frac{Ct}{2}}. \quad (8.13b)$$

Widać zatem, że poniżej wartości progowej pompowania, czyli gdy $\Omega_p < \frac{C}{2}$, wartość stacjonarna tych dwóch momentów wynosi zero. Wprowadzamy teraz następujące funkcje czasu

$$A_1 = \langle \hat{a}^2 \rangle, \quad (8.14a)$$

$$A_2 = \langle \hat{a} \hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle, \quad (8.14b)$$

$$A_3 = \langle \hat{a}^{\dagger 2} \rangle. \quad (8.14c)$$

Spełniają one układ równań

$$\dot{A}_1 = -\Omega_p A_2 - C A_1 + \langle \{ \hat{a}, \hat{F} \} \rangle, \quad (8.15a)$$

$$\dot{A}_2 = -2\Omega_p A_3 - 2\Omega_p A_1 - C A_2 + \langle \{ \hat{a}, \hat{F}^\dagger \} + \{ \hat{a}^\dagger, \hat{F} \} \rangle \quad (8.15b)$$

$$\dot{A}_3 = -\Omega_p A_2 - C A_3 + \langle \{ \hat{a}^\dagger, \hat{F}^\dagger \} \rangle, \quad (8.15c)$$

gdzie $\{ \hat{u}, \hat{v} \} \equiv \hat{u}\hat{v} + \hat{v}\hat{u}$ jest antykomutatorem. Widać, że domknięcie tego układu równań wymaga znajomości średniej operatorów z siłą wymuszającą. W tym celu przepisujemy równania (8.10) w postaci macierzowej, to jest

$$\partial_t \hat{\mathcal{A}} = -\hat{\mathcal{M}} \hat{\mathcal{A}} + \hat{\mathcal{F}}., \quad (8.16)$$

gdzie

$$\hat{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{a}^\dagger \end{pmatrix}, \hat{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} \frac{C}{2} & \Omega_p \\ \Omega_p & \frac{C}{2} \end{pmatrix}, \hat{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} \hat{F} \\ \hat{F}^\dagger \end{pmatrix}. \quad (8.17)$$

Formalne rozwiązanie tego równania jest postaci

$$\hat{\mathcal{A}}(t) = e^{-\hat{\mathcal{M}}t} \hat{\mathcal{A}}(0) + \int_0^t dt' e^{-\hat{\mathcal{M}}(t-t')} \hat{\mathcal{F}}(t'). \quad (8.18)$$

Mnożymy to rozwiązanie stronami tensorowo przez wektor $\hat{\mathcal{F}}$ i liczymy wartość średnią. Korzystając ze związków (8.11) oraz z faktu, że chwili początkowej rezerwuwar i wnęka są niezależne, otrzymujemy

$$\langle \hat{\mathcal{F}}^\dagger(t) \hat{\mathcal{A}}(t) \rangle \equiv \begin{pmatrix} \langle \hat{F}^\dagger \hat{a} \rangle & \langle \hat{F} \hat{a} \rangle \\ \langle \hat{F}^\dagger \hat{a}^\dagger \rangle & \langle \hat{F} \hat{a}^\dagger \rangle \end{pmatrix} = \frac{\mathcal{C}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.19)$$

Oznacza to, że w równaniach (8.15) jedyne niezerowe korelacje pola z rezerwuwarem są postaci $\langle \hat{F} \hat{a}^\dagger \rangle = \langle \hat{a} \hat{F}^\dagger \rangle = \frac{\mathcal{C}}{2}$. To znacząco upraszcza równania (8.15), które przyjmują postać

$$\dot{A}_1 = -\Omega_p A_2 - \mathcal{C} A_1, \quad (8.20a)$$

$$\dot{A}_2 = -2\Omega_p A_3 - 2\Omega_p A_1 - \mathcal{C} A_2 + \mathcal{C}, \quad (8.20b)$$

$$\dot{A}_3 = -\Omega_p A_2 - \mathcal{C} A_3. \quad (8.20c)$$

Jest to zamknięty układ równań różniczkowych, który ma analityczne rozwiązanie. W szczególności, możemy znaleźć rozwiązania w stanie stacjonarnym (ss), czyli dla długich czasów. Są one postaci

$$A_1 = \langle \hat{a}^2 \rangle_{ss} = \frac{-\mathcal{C}\Omega_p}{4 \left[\left(\frac{\mathcal{C}}{2}\right)^2 - \Omega_p^2 \right]} \quad (8.21a)$$

$$A_2 = \langle \hat{a} \hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle_{ss} = \frac{\mathcal{C}^2}{4 \left[\left(\frac{\mathcal{C}}{2}\right)^2 - \Omega_p^2 \right]}, \quad (8.21b)$$

$$A_3 = \langle \hat{a}^{\dagger 2} \rangle_{ss} = \frac{-\mathcal{C}\Omega_p}{4 \left[\left(\frac{\mathcal{C}}{2}\right)^2 - \Omega_p^2 \right]}. \quad (8.21c)$$

By wyznaczyć ściskanie pola wnęki, wprowadzamy raz jeszcze operatory kwadratur

$$\hat{X}_1 = \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{2} \quad (8.22a)$$

$$\hat{X}_2 = \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{2i}. \quad (8.22b)$$

Ich fluktuacje w stanie stacjonarnym są postaci

$$\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle_{ss} = \frac{1}{8} \frac{\mathcal{C}}{\frac{\mathcal{C}}{2} + \Omega_p} \quad (8.23a)$$

$$\langle (\Delta \hat{X}_2)^2 \rangle_{ss} = \frac{1}{8} \frac{\mathcal{C}}{\frac{\mathcal{C}}{2} - \Omega_p}. \quad (8.23b)$$

Widać zatem, że dla wartości progowej ($\Omega_p = \frac{\mathcal{C}}{2}$), otrzymujemy

$$\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle_{ss} = \frac{1}{8}, \quad (8.24)$$

czyli raptem dwukrotnie lepiej niż dla stanu próżni.

8.2.1 Ściskanie pola wyciekającego z wnęki

Wykażemy teraz, że wynik ten znacząco się poprawia, gdy rozważa się pole wyciekające z wnęki przez niedoskonałe lustro. W tym celu zauważmy, że półklasyczny model pompowania pola we wnęce z zewnątrz ma postać

$$E_{\text{cav}}(t) = \sqrt{R}E_{\text{cav}}(t - 2L/c) + \sqrt{T}E_{\text{in}}(t), \quad (8.25)$$

gdzie L jest długością wnęki. Zakładając, że amplituda pola we wnęce nie zmienia się bardzo szybko, oraz że $R \simeq 1$, otrzymujemy równanie różniczkowe postaci

$$\frac{dE_{\text{cav}}}{dt} = -\frac{C}{2}E_{\text{cav}} + \frac{c\sqrt{T}}{2L}E_{\text{in}}. \quad (8.26)$$

Równanie to jest bardzo podobne do (8.10), co sugeruje, że operator siły fluktuującej Langevina można identyfikować z polem próżni znajdującym się na zewnątrz. Rzeczywiście, gdy zapiszemy część pola o dodatniej częstotliwości w postaci

$$E_{\text{in}}^{(+)}(t) = \left(\frac{\hbar\nu_0}{4\pi\epsilon_0 cA}\right)^{\frac{1}{2}} \int \hat{b}_{\text{in}}(\nu) e^{-i(\nu-\nu_0)t} d\nu, \quad (8.27)$$

odtworzamy właściwości operatora \hat{F} z równań (8.11). Podstawiając powyższy rozkład do równania (8.26), otrzymujemy

$$\frac{d\hat{a}}{dt} = -\frac{C}{2}\hat{a} + \sqrt{\frac{C}{2\pi}} \int \hat{b}_{\text{in}}(\nu) e^{-i(\nu-\nu_0)t} d\nu, \quad (8.28)$$

gdzie założyliśmy, że pole wewnątrz wnęki jest jednomodowe, czyli $\hat{E}_{\text{cav}}^{(+)} = \sqrt{\frac{\hbar\nu_0}{4\epsilon_0 AL}}\hat{a}$ oraz że dla prawie idealnych lusterek, gdy $T \simeq 0$, mamy $\sqrt{T} = \sqrt{1-R} \simeq 1 - R = T$. Widzimy zatem, że odtwarzamy (8.10) z $\Omega_p = 0$ oraz

$$\hat{F}(t) = \sqrt{\frac{C}{2\pi}} \int \hat{b}_{\text{in}}(\nu) e^{-i(\nu-\nu_0)t} d\nu. \quad (8.29)$$

Zauważmy następnie, że pole wychodzące jest kombinacją pola wypływającego z wnęki (ze współczynnikiem \sqrt{T}) oraz odbitego pola wchodzącego (ze współczynnikiem \sqrt{R}), czyli

$$E_{\text{out}}(t) = -\sqrt{R}E_{\text{in}}(t) + \sqrt{T}E_{\text{cav}}(t). \quad (8.30)$$

Ponieważ pola wchodzące i to we wnęce są de facto skorelowane, jak wskazuje równanie (8.19), istnieje możliwość wytworzenia takiego pola “out”, by dostać znacznie lepsze ściskanie niż we wnęce. Zapiszmy zatem odpowiednik równania (8.30) dla części pola \hat{E} o dodatniej częstotliwości ν , czyli

$$\hat{b}_{\text{out}}(\nu) = -\sqrt{R}\hat{b}_{\text{in}}(\nu) + \sqrt{2\pi C}\hat{a}(\nu), \quad (8.31)$$

gdzie wprowadziliśmy transformatę Fouriera pola wnęki, czyli

$$\hat{a}(t) = \int \hat{a}(\nu) e^{-i(\nu-\nu_0)t} d\nu. \quad (8.32)$$

Naszym celem jest teraz wyznaczenie wyrażenia na składową pola we wnęki o zadanej częstotliwości, czyli $\hat{a}(\nu)$. Korzystając z równania (8.18) i zakładając, że czas jest na tyle długi, że pierwszy człon, proporcjonalny do początkowego pola, zdołał już zaniknąć, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\hat{a}(t) &= \frac{1}{2} \int_0^t \left[e^{-\left(\frac{\mathcal{C}}{2} - \Omega_p\right)(t-t')} + e^{-\left(\frac{\mathcal{C}}{2} + \Omega_p\right)(t-t')} \right] \hat{F}(t') dt' + \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^t \left[e^{-\left(\frac{\mathcal{C}}{2} - \Omega_p\right)(t-t')} - e^{-\left(\frac{\mathcal{C}}{2} + \Omega_p\right)(t-t')} \right] \hat{F}^\dagger(t') dt'.\end{aligned}\quad (8.33)$$

Podstawiając za \hat{F} wyrażenie (8.29), możemy wykonać całki po czasie, co daje

$$\begin{aligned}\hat{a}(t) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mathcal{C}}{2\pi}} \int d\nu \times \\ &\quad \times \left\{ \left[\frac{e^{-i(\nu-\nu_0)t} - e^{-\left(\frac{\mathcal{C}}{2} - \Omega_p\right)t}}{\frac{\mathcal{C}}{2} - \Omega_p - i(\nu - \nu_0)} + \frac{e^{-i(\nu-\nu_0)t} - e^{-\left(\frac{\mathcal{C}}{2} + \Omega_p\right)t}}{\frac{\mathcal{C}}{2} + \Omega_p - i(\nu - \nu_0)} \right] \hat{b}_{\text{in}}(\nu) \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{e^{i(\nu-\nu_0)t} - e^{-\left(\frac{\mathcal{C}}{2} - \Omega_p\right)t}}{\frac{\mathcal{C}}{2} - \Omega_p + i(\nu - \nu_0)} - \frac{e^{i(\nu-\nu_0)t} - e^{-\left(\frac{\mathcal{C}}{2} + \Omega_p\right)t}}{\frac{\mathcal{C}}{2} + \Omega_p + i(\nu - \nu_0)} \right] \hat{b}_{\text{in}}^\dagger(\nu) \right\}.\end{aligned}\quad (8.34)$$

Dla odpowiednio długich czasów, człony eksponencjalne zanikają. Zmieniając zmienne w drugiej całce $\nu \rightarrow 2\nu_0 - \nu$, dostajemy wyrażenie

$$\begin{aligned}\hat{a}(t) &= \sqrt{\frac{\mathcal{C}}{2\pi}} \int d\nu \times \\ &\quad \times \left\{ e^{-i(\nu-\nu_0)t} \right\}.\end{aligned}\quad (8.35)$$

Stąd natychmiast dostajemy $\hat{a}(\nu)$ (jako człon podcałkowy), i wstawiamy to wyrażenie do (8.31), co daje

$$\hat{b}_{\text{out}}(\nu) = -\sqrt{R} \hat{b}_{\text{in}}(\nu) + \mathcal{C} \frac{\left[\frac{\mathcal{C}}{2} - i(\nu - \nu_0)\right] \hat{b}_{\text{in}}(\nu) - \Omega_p \hat{b}_{\text{in}}^\dagger(2\nu_0 - \nu)}{\left[\frac{\mathcal{C}}{2} - \Omega_p - i(\nu - \nu_0)\right]^2 - \Omega_p^2}.\quad (8.36)$$

Wyznamy następnie następującą kwadraturę (zakładając $R \simeq 1$)

$$\hat{b}_{\text{out}}(\nu) + \hat{b}_{\text{out}}(2\nu_0 - \nu) = \left[\frac{\mathcal{C}}{\frac{\mathcal{C}}{2} - i(\nu - \nu_0) + \Omega_p} - 1 \right] [\hat{b}_{\text{in}}(\nu) + \hat{b}_{\text{in}}^\dagger(2\nu_0 - \nu)]\quad (8.37)$$

Zauważmy teraz, że w centralnej częstotliwości ν_0 równanie to wiąże

$$\hat{X}_{1\text{out}}(\nu_0) = \frac{1}{2} [\hat{b}_{\text{out}}(\nu_0) + \hat{b}_{\text{out}}(\nu_0)]\quad (8.38a)$$

$$\hat{X}_{1\text{in}}(\nu_0) = \frac{1}{2} [\hat{b}_{\text{in}}(\nu_0) + \hat{b}_{\text{in}}(\nu_0)].\quad (8.38b)$$

Stosunek fluktuacji tych dwóch kwadratur dany jest przez

$$\frac{\langle (\Delta \hat{X}_{1\text{out}}(\nu_0))^2 \rangle}{\langle (\Delta \hat{X}_{1\text{in}}(\nu_0))^2 \rangle} = \left(\frac{\frac{\mathcal{C}}{2} - \Omega_p}{\frac{\mathcal{C}}{2} + \Omega_p} \right)^2.\quad (8.39)$$

Otrzymujemy zatem poszukiwany końcowy wynik: w okolicy wartości progowej pompowania ($\Omega_p \simeq \frac{c}{2}$) można w zasadzie otrzymać doskonałe ściśkanie kwadratury wyjściowej, niezależne od tego, co było na wejściu!

8.3 Mieszanie czterech fal

W tej części omówimy kolejny istotny proces prowadzący do powstania ściśniętego światła — jest nim mieszanie czterech fal. W tym celu rozważmy nieliniowy ośrodek, opisywany poprzez współczynnik podatności dielektrycznej $\chi^{(3)}$. Na ośrodek ten padają dwie przeciwbieżne fale płaskie E_2 i $E_{2'}$ i oddziałują w nim z dwiema słabymi falami E_1 i E_3 , przy czym 1 i 3 też są przeciwbieżne oraz wszystkie impulsy mają tę samą częstość ν . Fale te są zatem postaci

$$E_j(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \mathcal{E}_j(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{k}_j \mathbf{r} - \nu t)}, \quad (8.40)$$

gdzie $j = 1, 2, 2', 3$ oraz zachodzą związki

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3 = 0, \quad \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_{2'} = 0. \quad (8.41)$$

Wykażemy teraz, że w obecności wiązek pompujących E_2 i $E_{2'}$ powstaje nowa wiązka w układzie: E_3 , która jest wiązką sprzężoną do E_1 . Proces ten nazywamy *mieszaniem czterech fal*.

W tym celu zaczniemy od równania falowego dla całego pola elektromagnetycznego $E = E_1 + E_2 + E_{2'} + E_3$, które w ogólności jest postaci

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, \quad (8.42)$$

gdzie P jest polaryzacją, która sprzęga ze sobą fale. W przypadku nieliniowości trzeciego rzędu (tzw. nieliniowości Kerra), polaryzacja łączy się z polem E poprzez

$$P = \chi^{(3)} E^3. \quad (8.43)$$

ewentualnie przemyśleć model klasyczny

8.3.1 Ściskanie w procesie mieszania czterech fal

Rozważmy nieliniowy ośrodek, w którym oddziałują cztery mody pola elektromagnetycznego o częstości ν . Załóżmy ponadto, że wektory falowe modów dopasowane są parami, tak jak w równaniu (8.41). Hamiltonian opisujący oddziaływanie nieliniowe trzeciego rzędu, będzie, w dominujących członach, postaci

$$\hat{H} = g(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_3^\dagger \hat{a}_2 \hat{a}_{2'} + \hat{a}_1 \hat{a}_3 \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_{2'}^\dagger). \quad (8.44)$$

Zakładając, że fale padające są silne, także można zastosować przybliżenie półklasyczne, dostajemy przybliżony Hamiltonian postaci

$$\hat{H} = \omega(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_3^\dagger + \hat{a}_1 \hat{a}_3). \quad (8.45)$$

Wynikają stąd proste równania ruchu postaci

$$\frac{d}{dt}\hat{a}_1 = -i\omega\hat{a}_3^\dagger \quad (8.46a)$$

$$\frac{d}{dt}\hat{a}_3 = -i\omega\hat{a}_1^\dagger. \quad (8.46b)$$

Ich rozwiązanie wynosi

$$\hat{a}_1(t) = \cosh(\omega t)\hat{a}_1(0) - i \sinh(\omega t)\hat{a}_3^\dagger(0) \quad (8.47a)$$

$$\hat{a}_3(t) = \cosh(\omega t)\hat{a}_3(0) - i \sinh(\omega t)\hat{a}_1^\dagger(0). \quad (8.47b)$$

Widzimy zatem, że rozwiązania te są tej samej postaci co równania (2.38), zatem kwantowy proces mieszania czterech fal prowadzi do powstania stanów ściśniętych. Kwadratury, w których należy poszukiwać w sposób następujący. Konstruujemy operator $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_1(t) + \hat{a}_3(t))$. Zauważamy, że operator ten spełnia ściśnięcia są postaci

$$\hat{a}(t) = \cosh(\omega t)\hat{a}(0) - i \sinh(\omega t)\hat{a}^\dagger(0) \quad (8.48a)$$

$$\hat{a}^\dagger(t) = \cosh(\omega t)\hat{a}^\dagger(0) + i \sinh(\omega t)\hat{a}(0). \quad (8.48b)$$

Dalsza procedura jest analogiczna do rozważanej dotychczas, twórzmy mianowicie kwadratury

$$\hat{X}_1(t) = \frac{1}{2}(\hat{a}(t) + \hat{a}^\dagger(t)) \quad (8.49a)$$

$$\hat{X}_2(t) = \frac{1}{2i}(\hat{a}(t) - \hat{a}^\dagger(t)). \quad (8.49b)$$

Wyznaczamy fluktuacje tych kwadratur na stanie próżni i dostajemy

$$\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle = \frac{1}{4}e^{-2u} \quad (8.50a)$$

$$\langle (\Delta \hat{X}_2)^2 \rangle = \frac{1}{4}e^{2u}, \quad (8.50b)$$

gdzie $u = \omega t$.

Rozdział 9

Paradoks EPR, nierówności Bella, nielokalność

Bibliografia

- [1] BROWN, R. H., AND TWISS, R. Q. Correlation between photons in two coherent beams of light. *Nature* 177, 4497 (1956), 27.
- [2] GLAUBER, R. J. Coherent and incoherent states of the radiation field. *Phys. Rev.* 131 (Sep 1963), 2766–2788.
- [3] SUDARSHAN, E. C. G. Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams. *Phys. Rev. Lett.* 10 (Apr 1963), 277–279.