

## SERIA 10

### MECHANIKA KWANTOWA '26

#### Zadanie 1

Rozważamy cząstkę o spinie  $S = 1$ , która żyje w trójwymiarowej przestrzeni Hilberta rozpiętej przez stany  $|m\rangle$  spełniające  $\hat{S}_z|m\rangle = \hbar m|m\rangle$  oraz  $\hat{S}^2|m\rangle = 2\hbar^2|m\rangle$ . Niech Hamiltonian cząstki bez zaburzenia ma postać

$$H_0^{ij} = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{-1} \end{pmatrix}, \quad E_1 > E_0 > E_{-1}. \quad (1)$$

Układ poddany jest zaburzeniu pochodzącemu od pola magnetycznego obracającego się w płaszczyźnie  $x - y$ . Hamiltonian zaburzenia wyraża się przez

$$\hat{V}(t) = \gamma \left( \cos \omega t \hat{S}_x + \cos \omega t \hat{S}_y \right). \quad (2)$$

a) Przedstaw stan w postaci

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{m=-1}^1 c_m(t) e^{-iE_m t/\hbar} |m\rangle \quad (3)$$

i wyznacz układ równań różniczkowych na  $c_m$  opisujących ścisłą ewolucję stanu.

b) Wyznacz perturbatywne rozwinięcie  $c_m(t)$  w potęgach  $\gamma$  postulując

$$c_m(t) = \sum_{p=0}^{\infty} c_m^{(p)}(t) \gamma^p. \quad (4)$$

Zakładając że w  $t = 0$  układ znajduje się w stanie  $|-1\rangle$ , odpowiedz na pytanie: czy w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń może zajść przejście do  $|+1\rangle$ ? Odpowiedź uzasadnij.

#### Zadanie 2

Rozważmy dwie cząstki o spinie  $1/2$  każda i o przeciwnych ładunkach  $\pm q$  oddziałujące z zewnętrznym polem magnetycznym skierowanym wzdłuż osi  $z$ , które adiabaticznie jest włączane / wyłączane na odcinku  $t \in ]-\infty, \infty[$ . Niech Hamiltonian tego pola ma postać

$$\hat{H}(t) = \frac{\mu B(t)}{\hbar} \left( \hat{S}_{1,z} - \hat{S}_{2,z} \right), \quad \mu = \frac{gq\hbar}{2mc}. \quad (5)$$

Początkowo układ znajduje się w stanie trypletowym  $|10\rangle$ .

a) Wyznacz bez przybliżeń stan układu dla  $t \rightarrow \infty$ . Bez dokonywania szczegółowych obliczeń uzasadnij, dlaczego prawdopodobieństwa przejścia do stanów  $|1 \pm 1\rangle$  znikają. Wyznacz prawdopodobieństwo przejścia do  $|00\rangle$  i pokaż, że zależy ono tylko od całki

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt B(t). \quad (6)$$

b) Wyznacz prawdopodobieństwo przejścia do  $|00\rangle$  w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń. Porównując z pełnym rozwiązaniem, przedstaw warunki stosowalności przybliżenia do pierwszego rzędu.

### Zadanie 3

Elektron w atomie wodoru znajduje się początkowo w stanie 1s i poddany jest zaburzeniu postaci

$$\hat{V} = e\mathcal{E}_0 z e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (7)$$

- a) Wyznacz w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń prawdopodobieństwo przejścia do stanów  $n = 2$ .
- b) Wyznacz w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń prawdopodobieństwo przejścia do 2p dla  $t \gg \tau$ .

### Zadanie 4

Elektron o masie  $m$  i ładunku  $-e$  znajduje się w stanie podstawowym potencjału harmonicznego o częstości  $\omega_0$ . Poddany jest zaburzeniu pochodzącemu od gwałtownie włączonego i wyłączzonego pola elektrycznego,

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0[\theta(t) - \theta(t - \tau)]. \quad (8)$$

Jaki jest dominujący wkład do prawdopodobieństwa znalezienia elektronu w pierwszym i drugim stanie wzbudzonym dla  $t \gg \tau$ .