

SERIA 1

ROZWIĄZANIA

MECHANIKA KWANTOWA ‘26

Zadanie 1

Treść: Doświadczenie Rutherforda wykazało, że cząstki α zderzające się ze złotą folią rozpraszają się głównie do tyłu, co sugeruje oddziaływanie z bardzo silnie rozpraszającym centrum o dodatnim ładunku. Zakładając, że proces zderzenia zachodzi wzdłuż prostej, wykaż że zasady zachowania pędu i energii dopuszczają rozpraszanie do tyłu. Przyjmij, że cząstki α mają masę m i prędkość początkową v i końcową v' , zaś atomy złota mają masę $M \gg m$.

Rozwiązanie: Zasady zachowania energii i pędu dają

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{m(v')^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} \quad (1a)$$

$$mv = mv' + mu, \quad (1b)$$

gdzie u jest prędkością atomu złota po zderzeniu. Wyliczamy u z dolnego równania i dostajemy równanie kwadratowe na v' z dwoma rozwiązaniami

$$v'_1 = v, \quad v'_2 = \frac{m - M}{m + M}v. \quad (2)$$

Pierwsze odrzucamy, gdyż opisuje ono przypadek braku oddziaływania. Drugie daje prędkość cząstki α po rozproszeniu, która ma przeciwny zwrot to v o ile $M > m$ (co jest spełnione).

Możemy również wyznaczyć minimalną odległość, na jaką zbliżyła się cząstka α do centrum rozpraszania. Zasada zachowania energii daje nam

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{\kappa(Ze)2e}{r_{min}}, \quad \kappa = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}. \quad (3)$$

Stąd

$$r_{min} = \frac{4Z\kappa e^2}{mv^2}. \quad (4)$$

Biorąc z danych doświadczalnych $v \simeq 2 \times 10^7 \text{ m/s}$ otrzymujemy $r_{min} \simeq 3Z \times 10^{-16} \text{ m}$, co jest znacznie mniejsze od rozmiarów atomu. Widać zatem, że rozpraszanie zachodzi “gdzieś w środku”.

Zadanie 2

Treść: Klasyczna elektrodynamika uczy, że elektron poruszający się z przyspieszeniem $\vec{a}$ wytraca energię w tempie

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{\kappa e^2}{c^3} |\vec{a}|^2. \quad (5)$$

Zakładając, że okres obrotu w ruchu orbitalnym elektronu w atomie wodoru jest znacznie krótszy od czasu τ , po jakim elektron, zaczynający swój ruch w odległości a_0 od środka, spadnie na centrum, wyznacz τ .

Rozwiązanie:

Zaczynamy od zapisania wyrażenia na energię elektronu, czyli

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{\kappa e^2}{r}. \quad (6)$$

Zakładając, że elektron porusza się po okręgu (o wolno zmiennym promieniu r), przyspieszenie radialne a , związane z prędkością liniową (co do wartości) poprzez: $a = v^2/r$ wynosi

$$ma = \frac{\kappa e^2}{r^2} \Rightarrow v^2 = \frac{\kappa e^2}{mr}. \quad (7)$$

Podstawiamy to wyrażenie do równania (6) i otrzymujemy

$$E = -\frac{\kappa e^2}{2r}. \quad (8)$$

Następnie wyznaczamy pochodną tego wyrażenia po czasie, by móc skorzystać ze związku (5)

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\kappa e^2}{2r^2} \frac{dr}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{\kappa e^2}{c^3} a^2 = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^2} \left(\frac{\kappa e^2}{mr^2} \right)^2. \quad (9)$$

Otrzymujemy zatem równanie różniczkowe

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{4}{3} \frac{\kappa^2 e^4}{m^2 r^2 c^3}, \quad (10)$$

które całkujemy poprzez rozdzielenie zmiennych z warunkiem początkowym $r(0) = a_0$ i końcowym $r(\tau) = 0$, co daje

$$\tau = \frac{m^2 c^3}{4 \kappa^2 e^4} a_0^3. \quad (11)$$

Podstawiamy wartości dla elektronu i otrzymujemy $\tau \simeq 10^{-10}$ s. Z kolei przybliżony okres obrotu (na początku) wynosi

$$T = 2\pi \frac{a_0}{v} = 2\pi a_0 \sqrt{\frac{ma_0}{\kappa e^2}} \simeq 4 \times 10^{-16} \text{s}. \quad (12)$$

Widać zatem, że w każdym razie początkowo przybliżenie $\tau \gg T$ jest spełnione.

Zadanie 3

Treść: Znajdź energie atomu wodoru w modelu Bohra (czyli przy założeniu, że moment pędu jest skwantowany).

Rozwiązanie: Bohr założył, że elektron porusza się po orbitach kołowych dla których spełniony jest warunek kwantyzacji momentu pędu

$$L = mvr = n\hbar, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (13)$$

Znów korzystamy z wyrażenia na energię elektronu w polu coulombowskim

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{\kappa e^2}{r} \quad (14)$$

oraz na równowagę siły odśrodkowej i coulombowskiej

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{\kappa e^2}{r^2}. \quad (15)$$

Stąd otrzymujemy wyrażenie na energię

$$E_n = -\frac{\kappa^2 e^4 m}{2n^2 \hbar^2} = -\frac{1}{2} \alpha^2 m c^2 \frac{1}{n^2}. \quad (16)$$

Zadanie 4

Treść: Wykorzystując warunek kwantyzacji Bohra-Sommerfelda znajdź energie własne jednowymiarowego oscylatora harmonicznego.

Rozwiązanie: Warunek kwantyzacji zaproponowany przez Bohra, został potem uogólniony do postaci

$$\oint_E dq p(q) = nh, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad (17)$$

zachodzący dla ruchu okresowego, gdzie symbol z kółkiem oznacza całkowanie po położeniach zmieniających się w ramach całego jednego okresu oscylacji przy ustalonej energii E . Dla jednowymiarowego potencjału harmonicznego

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2. \quad (18)$$

Stąd otrzymujemy

$$p = \sqrt{2mE \left(1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2E}\right)}. \quad (19)$$

Ruch odbywa się między $-q_0$ a q_0 , gdzie

$$q_0 = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}. \quad (20)$$

Zatem warunek (17) daje nam

$$2 \int_{-q_0}^{q_0} dq \sqrt{2mE \left(1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2E}\right)} = nh. \quad (21)$$

Proste podstawienie trygonometryczne prowadzi do

$$\frac{2\pi E}{\omega} = nh \quad (22)$$

zatem

$$E_n = n\hbar\omega. \quad (23)$$

Zauważamy złowieszczy brak $1/2$.

Zadanie 5

Treść: Wykorzystując ten sam warunek (czyli kwantyzacji Bohra-Sommerfelda) znajdź energie własne atomu wodoru. Wynik porównaj z przewidywaniami modelu Bohra.

Rozwiązanie: Dla cząstki poruszającej się z prędkością v po okręgu o promieniu r wyrażenia na energię (6) i równowagę sił (15) dają

$$p = \sqrt{2m|E|}. \quad (24)$$

Stąd całkowanie po zamkniętej trajektorii, czyli po okręgu o długości $2\pi r$ daje

$$2\pi r \sqrt{2m|E|} = nh. \quad (25)$$

Korzystając z wyrażenia na r

$$r = \frac{\kappa e^2}{2|E|} \quad (26)$$

otrzymujemy, tak jak poprzednio, czyli w przypadku modelu Bohra

$$E_n = -\frac{1}{2}\alpha^2 mc^2 \frac{1}{n^2}. \quad (27)$$

Stąd promień n -tej orbity wynosi

$$r = a_0 n^2, \quad (28)$$

gdzie

$$a_0 = \frac{\hbar}{\alpha m c} \simeq 0.5 \times 10^{-10} m. \quad (29)$$

Okres obrotu wynosi

$$T_n = 2\pi \frac{r_n}{p_n/m} = 2\pi \frac{n^3}{\alpha} \frac{a_0}{c}. \quad (30)$$

Dla $n = 1$ dostajemy, tak jak poprzednio $T_1 \simeq 1.5 \times 10^{-16} \text{s}$.