SERIA 9

MECHANIKA KWANTOWA '26

Zadanie 1

Rozważ cząstkę o ładunku q w jednowymiarowym potencjale oscylatora harmonicznego, będącą pod wpływem jednorodnego pola elektrycznego,

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}, \quad \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 + \hat{V} = -qEx. \tag{1}$$

a) Zakładając, że pole elektryczne jest słabe i pozwala na stosowanie rachunku zaburzeń (jaki to nakłada warunek na E?), wyznacz poprawki pierwszego i drugiego rzędu do stanu własnego ϵ_n Hamiltonianu $\hat{H}_0$.

b) Rozwiąż to zagadnienie ściśle i porównaj z rozwiązaniem przybliżonym

Zadanie 2

Zakładając, że elektron w atomie wodoru (bez spinu) poddany jest zaburzeniu pochodzącemu od jednorodnego stałego pola eketrycznego skierowanego wzdłuż osi z, wyznacz w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń poprawkę do stanu podstawowego i pierwszego wzbudzonego i odpowiadające im energie.

Zadanie 3

Pewien stan opisywany jest trzema ortonormalnymi stanami $|\psi_i\rangle$, $i \in \{1,2,3\}$ i w tej bazie Hamiltonian niezaburzony ma postać

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_2 > \epsilon_1. \tag{2}$$

Zaburzeńe $\hat{V}$ w tej bazie ma postać

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a^* & b^* & 0 \end{pmatrix}, \quad |a| \simeq |b| \ll \epsilon_2 - \epsilon_1. \tag{3}$$

Wyznacz analitycznie (bez przybliżeń) energie $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$. Następnie wyznacz je w rachunku zaburzeń do drugiego rzędu i porównaj wyniki z dokładnymi.

Zadanie 4

Rozważ cząstkę o masie m i ładunku q w potencjale anizotropowego trójwymiarowego oscylatora harmonicznego $\omega_x \neq \omega_y = \omega_z \equiv \omega$. Cząstka potraktowana jest zewnętrznym jednorodnym polem magnetycznym $\vec{B} = B\hat{e}_x$.

a) Zapisz Hamiltonian $\hat{H}$ układu.

b) Zakładając, że B jest małe zaś anizotropia słaba ($|\omega_x - \omega| \ll \omega$) rozdziel $\hat{H}$ na część zerową i zaburzającą.

c) Zakładając, że rozszczepienie w wyniku działania pola B jest porównywalne z rozszczepieniem powodowanym przez anizotropię, ale małe w porównaniu z $\hbar\omega$, wyznacz w pierwszym rzędzie poprawki do pierwszego stanu wzbudzonego. Czy zaburzenie w pełni znosi degenerację?

d) Zakładając, że potencjał oscylatora jest izotropowy, zaś człon kwadratowy w B jest mały, zdiagonalizuj otrzymany Hamiltonian.

Zadanie 5

Rozważ elektron o masie m i ładunku $-e$ w atomie wieloelektronowym, przymując, że potencjał, którego doświadcza jest efektywnie ekranowany i ma postać

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r} e^{-r/R}. \tag{4}$$

Używając ansatzu

$$\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}, \tag{5}$$

gdzie a jest parametrem, wyznacz metodą wariacyjną energię stanu podstawowego tego elektronu. Wyznacz najmniejsze R, dla którego rozwiązanie istnieje.

Zadanie 6

Wyznacz metodą wariacyjną energię stanu podstawowego używając następujących $\psi_i(r) = u_i(r,\beta)/r$ i dwu funkcji próbnych

$$u_1(x,\beta) = \frac{x}{x^2+\beta^2}, \quad u_2(x,\beta) = x^2 e^{-\beta x}, \tag{6}$$

gdzie $x = r/a_0$, zaś a_0 jest promieniem Bohra a β jest parametrem wariacyjnym. Która z tych funkcji próbnych daje lepsze oszacowanie? Policz także przekrycie otrzymanych funkcji wariacyjnych z rozwiązaniem dokładnym $|\psi_0\rangle$, czyli

$$\delta_i = 1 - |\langle\psi_0|\psi_i\rangle|^2. \tag{7}$$