SERIA 1
ROZWIĄZANIA

MECHANIKA KWANTOWA ‘26

Zadanie 1

Treść: Doświadczenie Rutherforda wykazało, że cząstki α zdzerzające się ze złotą folią rozpraszają się głównie do tyłu, co sugeruje oddziaływanie z bardzo silnie rozpraszającym centrum o dodatnim ładunku. Zakładając, że proces zderzenia zachodzi wzdłuż prostej, wykaż że zasady zachowania pędu i energii dopuszczają rozpraszanie do tyłu. Przyjmij, że cząstki α mają masę m i prędkość początkową v i końcową v', zaś atomy złota mają masę $M \gg m$.

Rozwiązanie: Zasady zachowania energii i pędu dają

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{m(v')^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} \tag{1a}$$

$$mv = mv' + mu, \tag{1b}$$

gdzie u jest prędkością atomu złota po zderzeniu. Wyliczamy u z dolnego równania i dostajemy równanie kwadratowe na v' z dwoma rozwiązaniami

$$v_1' = 0, \quad v_2' = \frac{m-M}{m+M}v. \tag{2}$$

Pierwsze odrzucamy, gdyż opisuje ono przypadek braku oddziaływania. Drugie daje prędkość cząstki α po rozproszeniu, która ma przeciwny zwrot to v o ile $M > m$ (co jest spełnione).

Możemy również wyznaczyć minimalną odległość, na jaką zbliżyła się cząstka α do centrum rozpraszania. Zasada zachowania energii daje nam

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{\kappa(Ze)2e}{r_{min}}, \quad \kappa = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}. \tag{3}$$

Stąd

$$r_{min} = \frac{4Z\kappa e^2}{mv^2}. \tag{4}$$

Biorąc z danych doświadczalnych $v \simeq 2\times10^7$m/s otrzymujemy $r_{min} \simeq 3Z\times10{-}16$m, co jest znacznie mniejsze od rozmiarów atomu. Widać zatem, że rozpraszanie zachodzi “gdzieś w środku”.

Zadanie 2

Treść: Klasyczna elektrodynamika uczy, że elektron poruszający się z przyspieszeniem $\vec{a}$ wytraca energię w tempie

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2}{3}\frac{\kappa e^2}{c^3}|\vec{a}|^2. \tag{5}$$

Zakładając, że okres obrotu w ruchu orbitalnym elektronu w atomie wodoru jest znacznie krótszy od czasu τ, po jakim elektron, zaczynający swój ruch w odległości a_0 od środka, spadnie na centrum, wyznacz τ.

Rozwiązanie:

Zaczynamy od zapisania wyrażenia na energię elektronu, czyli

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{\kappa e^2}{r}. \tag{6}$$

Zakładając, że elektron porusza się po okręgu (o wolno zmiennym promieniu r), przyspieszenie radialne a, związane z prędkością liniową (co do wartości) poprzez: $a = v^2/r$ wynosi

$$ma = \frac{\kappa e^2}{r^2} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{\kappa e^2}{mr}. \tag{7}$$

Podstawiamy to wyrażenie do równania (6) i otrzymujemy

$$E = -\frac{\kappa e^2}{2r}. \tag{8}$$

Następnie wyznaczamy pochodną tego wyrażenia po czasie, by móc skorzystać ze związku (5)

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\kappa e^2}{2r^2}\frac{dr}{dt} = -\frac{2}{3}\frac{\kappa e^2}{c^3}a^2 = -\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^2}\left(\frac{\kappa e^2}{mr^2}\right)^2. \tag{9}$$

Otrzymujemy zatem równanie różniczkowe

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{4}{3}\frac{\kappa^2 e^4}{m^2 r^2 c^3}, \tag{10}$$

które całkujemy poprzez rozdzielenie zmiennych z warunkiem początkowym $r(0) = a_0$ i końcowym $r(\tau) = 0$, co daje

$$\tau = \frac{m^2 c^3}{4\kappa^2 e^4} a_0^3. \tag{11}$$

Podstawiamy wartości dla elektronu i otrzymujemy $\tau \simeq 10^{-10}$s. Z kolei przybliżony okres obrotu (na początku) wynosi

$$T = 2\pi \frac{a_0}{v} = 2\pi a_0 \sqrt{\frac{m a_0}{\kappa e^2}} \simeq 4 \times 10^{-4} s. \tag{12}$$

Widać zatem, że w każdym razie początkowo przybliżenie $\tau \gg T$ jest spełnione.

Zadanie 3

Treść: Znajdź energie atomu wodoru w modelu Bohra (czyli przy założeniu, że moment pędu jest skwantowany).

Rozwiązanie: Bohr założył, że elektron porusza się po orbitach kołowych dla których spełniony jest warunek kwantyzacji momentu pędu

$$L = mvr = n\hbar, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \tag{13}$$

Znów korzystamy z wyrażenia na energię elektronu w polu coulombowskim

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{\kappa e^2}{r} \tag{14}$$

oraz na równowagę siły odśrodkowej i coulombowskiej

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{\kappa e^2}{r^2}. \tag{15}$$

Stąd otrzymujemy wyrażenie na energię

$$E_n = -\frac{\kappa^2 e^4 m}{2n^2 \hbar^2} = -\frac{1}{2}\alpha^2 mc^2 \frac{1}{n^2}. \tag{16}$$

Zadanie 4

Treść: Wykorzystując warunek kwantyzacji Bohra-Sommerfelda znajdź energie własne jednowymiarowego oscylatora harmonicznego.

Rozwiązanie: Warunek kwantyzacyji zaproponowany przez Bohra, został potem uogólniony do postaci

$$\oint_E dq\, p(q) = nh, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \tag{17}$$

zachodzący dla ruchu okresowego, gdzie symbol z kółkiem oznacza całkowanie po położeniach zmieniających się w ramach całego jednego okresu oscylacji przy ustalonej energii E. Dla jednowymiarowego potencjału harmonicznego

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2. \tag{18}$$

Stąd otrzymujemy

$$p = \sqrt{2mE\left(1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2E}\right)}. \tag{19}$$

Ruch odbywa się miedzy $-q_0$ a q_0, gdzie

$$q_0 = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}. \tag{20}$$

Zatem warunek (17) daje nam

$$2\int_{-q_0}^{q_0} dq\, \sqrt{2mE\left(1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2E}\right)} = nh. \tag{21}$$

Proste podstawienie trygonometryczne prowadzi do

$$\frac{2\pi E}{\omega} = nh \tag{22}$$

zatem

$$E_n = n\hbar. \tag{23}$$

Zauważamy złowieszczy brak 1/2.

Zadanie 5

Treść: Wykorzystując ten sam warunek (czyli kwantyzacji Bohra-Sommerfelda) znajdź energie własne atomu wodoru. Wynik porównaj z przewidywaniami modelu Bohra.

Rozwiązanie: Dla cząstki poruszającej się z prędkością v po okręgu o promieniu r wyrażenia na energię (6) i równowagę sił (15) dają

$$p = \sqrt{2m|E|}. \tag{24}$$

Stąd całkowanie po zamkniętej trajektorii, czyli po okręgu o długości $2\pi r$ daje

$$2\pi r\sqrt{2m|E|} = nh. \tag{25}$$

Korzystając z wyrażenia na r

$$r = \frac{\kappa e^2}{2|E|} \tag{26}$$

otrzymujemy, tak jak poprzednio, czyli w przypadku modelu Bohra

$$E_n = -\frac{1}{2}\alpha^2 mc^2 \frac{1}{n^2}. \tag{27}$$

Stąd promień n-tej orbity wynosi

$$r = a_0 n^2, \tag{28}$$

gdzie

$$a_0 = \frac{\hbar}{\alpha m c} \simeq 0.5 \times 10^{-10} m. \tag{29}$$

Okres obrotu wynosi

$$T_n = 2\pi \frac{r_n}{p_n/m} = 2\pi \frac{n^3}{\alpha} \frac{a_0}{c}. \tag{30}$$

Dla $n = 1$ dostajemy, tak jak poprzednio $T_1 \simeq 1.5 \times 10^{-16}$s.