SERIA 2
ROZWIĄZANIA

MECHANIKA KWANTOWA '26

Niech zbiór $\{|\psi_i\rangle\}$, gdzie $i \in \{1\dots n\}$, stanowni bazę ortonormalną pewnej n-wymiarowej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_n$.

Zadanie 1

Treść: Korzystając z notacji Diraca, zapisz warunek, że rzeczywiście spełniony jest ten warunek (tworzenia bazy ortonormalnej) Następnie, w tej bazie:

a) zapisz dowolny stan $|\phi\rangle$ jako superpozycję ze współczynnikami c_i;

b) wyznacz jego normę i podaj postać stanu po unormowaniu;

c) mając dwa stany $|\phi_1\rangle$ oraz $|\phi_2\rangle$, wyznacz ich iloczyn skalarny;

d) znajdź iloczyn skalarny wektorów

$$|\phi_1\rangle = \sqrt{2}|\psi_1\rangle + i|\psi_2\rangle \ , \quad |\phi_2\rangle = 3i|\psi_1\rangle + (2+i)|\psi_2\rangle \ ;$$

e) unormuj każdy z tych wektorów.

Rozwiązanie: Wektory $|\psi_i\rangle$ są ortogonormalne, jeżeli spełniają warunek

$$\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \delta_{ij}. \tag{1}$$

Tworzą bazę ortonormalną, jeżeli ponadto rozpinają całą przestrzeń $\mathcal{H}_n$, czyli jeżeli

$$\sum_{i=1}^{n} |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = \hat{\mathbb{1}}_n. \tag{2}$$

a) Dowolny stan $|\phi\rangle$ można zapisać jako superpozycję stanów bazowych w postaci

$$|\phi\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i|\psi_i\rangle, \quad c_i \in \mathbb{C}. \tag{3}$$

b) Kwadrat normy tego stanu wynosi

$$\langle\phi|\phi\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} c_j^* c_i \langle\psi_j|\psi_j\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} c_j^* c_i \delta_{ij} = \sum_{i}^{n} |c_i|^2. \tag{4}$$

Zatem stan po unormowaniu ma postać

$$|\tilde{\phi}\rangle = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i|\psi_i\rangle}{\sum_{i}^{n} |c_i|^2}. \tag{5}$$

c) Niech dwa stany mają postać

$$|\phi_1\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i|\psi_i\rangle, \quad |\phi_2\rangle = \sum_{i=1}^{n} d_i|\psi_i\rangle. \tag{6}$$

Ich iloczyn skalarny wynosi

$$\langle\phi_1|\phi_2\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} c_i^* d_j \langle\psi_i|\psi_j\rangle = \sum_{i}^{n} c_i^* d_i. \tag{7}$$

d) Iloczyn skalarny podanych wektorów wynosi

$$\langle\phi_1|\phi_2\rangle = (\sqrt{2}\langle\psi_1| - i\langle\psi_2|)\,(3i|\psi_1\rangle + (2+i)|\psi_2\rangle) = 3\sqrt{2}i - i(2+i) = 1 + i(3\sqrt{2}-2). \tag{8}$$

e) Kwadrat normy każdego z nich wynosi

$$\langle\phi_1|\phi_1\rangle = (\sqrt{2}\langle\psi_1| - i\langle\psi_2|)\,(2|\psi_1\rangle + i|\psi_2\rangle) = 5 \tag{9a}$$
$$\langle\phi_2|\phi_2\rangle = (-3i\langle\psi_1| + (2-i)\langle\psi_2|)\,(3i|\psi_1\rangle + (2+i)|\psi_2\rangle) = 14 \tag{9b}$$

zatem unormowane wektory otrzymujemy dzieląc je przez pierwiastki z odpowiednich wielkosci.

Zadanie 2

Treść: Rozważ zbiór n operatorów postaci $\hat{\Pi}_i = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$. Wyznacz $\hat{\Pi}_i^2$, $\hat{\Pi}_i^k$ $(k \in \mathbb{N})$, $\hat{\Pi}_i\hat{\Pi}_j$. Czym jest operator

$$\hat{A} = \sum_{i=1}^{n} \hat{\Pi}_i \quad ?$$

Czy operator $\hat{\Pi}_\phi = |\phi\rangle\langle\phi|$, gdzie

$$|\phi\rangle = |\psi_1\rangle + i|\psi_2\rangle$$

jest operatorem rzutowym na stan $|\phi\rangle$? Jeżeli nie, zmodyfikuj $|\phi\rangle$ do $|\tilde{\phi}\rangle$, tak by operator $\hat{\Pi}_{\tilde{\phi}}$ był operatorem rzutowym.

Rozwiązanie: Na mocy równania (2) rozpoznajemy, że operator $\hat{A}$ jest jedynką w $\mathcal{H}_n$. Operatory $\hat{\Pi}_i$ spełniają

$$\hat{\Pi}_i\hat{\Pi}_j = \delta_{ij}\hat{\Pi}_i \tag{10}$$

(na mocy ortonormalności bazy), zatem dowolne momenty $\hat{\Pi}_i$ wynoszą $\hat{\Pi}_i$. Następnie liczmy:

$$\hat{\Pi}_\phi^2 = |\phi\rangle\langle\phi|\phi\rangle\langle\phi|. \tag{11}$$

By był to operater rzutowy musi zachodzić $\langle\phi|\phi\rangle = 1$, tymczasem

$$\langle\phi|\phi\rangle = (\langle\psi_1| - i\langle\psi_2|)(|\psi_1\rangle + i|\psi_2\rangle) = 2. \tag{12}$$

Zatem operator $\hat{\Pi}_{\tilde{\phi}}$ jest rzutowy, gdy unormujemy stan, dostając

$$|\tilde{\phi}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1\rangle + i|\psi_2\rangle). \tag{13}$$

Zadanie 3

Treść: W tym zadaniu rozważamy $\mathcal{H}_n$ z poprzedniego zadania z $n = 2$. Korzystając z utorzsamienia

$$|\psi_1\rangle \;\leftrightarrow\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\psi_2\rangle \;\leftrightarrow\; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

oraz z wyrażenia na wektory

$$|\phi_1\rangle = |\psi_1\rangle + 2i|\psi_2\rangle, \quad |\phi_2\rangle = -|\psi_1\rangle + (1+i)|\psi_2\rangle.$$

wyznacz w postaci macierzowej wielkości

$$\hat{A}_{ij} = |\phi_i\rangle\langle\phi_j|,\; \hat{B}_+ = \hat{A}_{12} + \hat{A}_{21},\; \hat{B}_- = \hat{A}_{12} - \hat{A}_{21},\; \hat{\tilde{B}}_- = \hat{A}_{12} - i\hat{A}_{21} \qquad (i,j = 1,2).$$

Które spośród tych operatorów są hermitowskie?

Rozwiązanie: Dla przykładu wyznaczymy postać jednego z operatorów, reszta do samodzielnej pracy.

$$\begin{aligned}\hat{A}_{12} &= |\phi_1\rangle\langle\phi_2| = (|\psi_1\rangle + 2i|\psi_2\rangle)(-\langle\psi_1| + (1-i)\langle\psi_2|) = \\ &= -|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + (1-i)|\psi_1\rangle\langle\psi_2| - 2i|\psi_2\rangle\langle\psi_1| + 2(1+i)|\psi_2\rangle\langle\psi_2| = \begin{pmatrix} -1 & 1-i \\ -2i & 2(1+i) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Zadanie 4

Treść: Pozostajemy w $\mathcal{H}_2$. Przedstaw w postaci macierzowej następujące operaotry

$$\hat{\sigma}_1 = |\psi_1\rangle\langle\psi_2| + |\psi_2\rangle\langle\psi_1|, \quad \hat{\sigma}_2 = i(|\psi_2\rangle\langle\psi_1| - |\psi_1\rangle\langle\psi_2|), \quad \hat{\sigma}_3 = |\psi_1\rangle\langle\psi_1| - |\psi_2\rangle\langle\psi_2|.$$

Które z nich są hermitowskie? Korzystając z notacji Diraca (i ewentualnie macierzowej), wyznacz komutatory

$$\hat{C}_{ij} = [\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j], \quad (i,j = 1,2).$$

O jaki operator należy uzupełnić powyższy zbiór, by móc za jego pomocą przedstawić dowolną hermitowską macierz odwzorowania liniowego $\mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$?

Rozwiązanie: Widać, że wszystkie te operatory są hermitowskie. Wyznaczmy jeden z komutatorów. Na przykład

$$\begin{aligned}\hat{C}_{12} &= [\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2] = && (14)\\ &= i(|\psi_1\rangle\langle\psi_2| + |\psi_2\rangle\langle\psi_1|)(-|\psi_1\rangle\langle\psi_2| + |\psi_2\rangle\langle\psi_1|) - i(-|\psi_1\rangle\langle\psi_2| + |\psi_2\rangle\langle\psi_1|)(|\psi_1\rangle\langle\psi_2| + |\psi_2\rangle\langle\psi_1|) = \\ &= 2i(|\psi_1\rangle\langle\psi_1| - |\psi_2\rangle\langle\psi_2|) = 2i\hat{\sigma}_3. && (15)\end{aligned}$$

W ogólności zachodzi

$$\hat{C}_{ij} = 2i\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\hat{\sigma}_k. \tag{16}$$

Dowolny hermotowski operator liniowy możemy zapisać w reprezentacji macierzowej jako

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} x+y & a+ib \\ a-ib & x-y \end{pmatrix}, \quad x,y,a,b \in \mathbb{R}. \tag{17}$$

Korzystając z reprezentacji macierzowej operatorów $\hat{\sigma}$ dostajemy

$$\hat{A} = x\hat{\mathbb{1}} + y\hat{\sigma}_3 + a\hat{\sigma}_2 + b\hat{\sigma}_3, \tag{18}$$

widać więc, że to kompletu brakowało nam operatora jedynostkowego.

Zadanie 5

Treść: Niech, w wyjściowej przestrzeni $\mathcal{H}_n$, wielkość $\hat{A}$ będzie obserwablą, której pomiar daje n wyników $a_i \in \mathbb{R}$ i odpowiadających im stanów $|\phi_i\rangle$. Przy pomocy tych wielkości, zapisz jaką postać ma $\hat{A}$. Niech stan układu przed pomiarem ma postać

$$|\psi\rangle = c_1|\phi_1\rangle + c_2|\phi_2\rangle.$$

Unormuj ten stan, podaj jakie są możliwe wyniki pomiarów i jakie są ich prawdpodobieństwa. Jak wygląda stan, gdy po pomiarze $\hat{A}$ dostajemy wynik a_2? W następstwie tego pomiaru, jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania wyniku a_1?

Rozwiązanie: Obserwablę, z definicji, otrzymujemy poprzez rozkład spektralny, czyli

$$\hat{A} = \sum_{i=1}^{n} a_i|\phi_i\rangle\langle\phi_i|. \tag{19}$$

Stan po unormowaniu ma postać

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{|c_1|^2 + |c_2|^2}} \left(c_1|\phi_1\rangle + c_2|\phi_2\rangle\right).$$

Możliwe wyniki pomiarów to a_1 i a_2 z prawdopodobieństwami $p_i = |c_i|^2$. Stan po otzymaniu wyniki a_2 otzymujemy poprzez rzutowanie na $|\phi_2\rangle$ i unormowanie, wynosi więc on po prostu $|\phi_2\rangle$. Prawdopodobieństwo otrzymania a_1 wynosi w nim 0.

Zadanie 6

Treść: Niech w $\hat{H}_n$ dany będzie operator

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|,$$

gdzie $|\phi_i\rangle$ tworzą jakąś bazę ortonormalną. Jaki warunek muszą spełniać x_i, by $\hat{x}$ był obserwablą? Wyznacz następujące wielkości

$$\langle\hat{x}\rangle\,,\ \left\langle\hat{x}^2\right\rangle,\ \left\langle\hat{x}^2\right\rangle - \langle\hat{x}\rangle^2$$

na jakimś stanie

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i|\phi_i\rangle.$$

Podaj przykład c_i takich, by $\langle\hat{x}\rangle^2 = \left\langle\hat{x}^2\right\rangle$.

Rozwiązanie: Oczwyiście, musi zachodzić $x_i \in \mathbb{R}$. Na tym stanie mamy

$$\langle\hat{x}\rangle = \langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i|c_i|^2, \quad \left\langle\hat{x}^2\right\rangle = \langle\psi|\hat{x}^2|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2|c_i|^2 \tag{20}$$

i analogicznie dla wariancji. Jeżeli $c_i = \delta_{ij}$ wtedy mamy

$$|\psi\rangle = |\phi_j\rangle, \quad \langle\hat{x}\rangle^2 = x_j^2 = \left\langle\hat{x}^2\right\rangle.$$