SERIA 3
ROZWIĄZANIA

MECHANIKA KWANTOWA '26

Zadanie 1

Treść: Najprostszym układem kwantowym jest taki, który składa się tylko z dwu poziomów energetycznych. Zaproponuj ogólną postać Hamiltonianu dla takiego układu, znajdź energie i stany własne. Jak ewoluuje w czasie każdy ze stanów? Jak ewoluuje ogólna superpozycja?

Rozwiązanie: W dowolnej bazie stanów ortonormalnych $|\psi_1\rangle$ i $|\psi_2\rangle$, Hamiltonian ma postać

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} a & b+ic \\ b-ic & d \end{pmatrix}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Równanie "wiekowe" ma postać

$$(a-\lambda)(d-\lambda) - b^2 - c^2 = 0. \tag{2}$$

Stąd wartości oraz stany własne mają postać

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2}\left(a + d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4(b^2+c^2)}\right) \tag{3}$$

$$|\psi_\pm\rangle = \mathcal{N}_\pm \left(a_\pm|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle\right), \quad a_\pm = \frac{a - d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4(b^2+c^2)}}{2(b-ic)}, \quad \mathcal{N}_\pm = (a_\pm + 1)^{-1/2}. \tag{4}$$

Każdy ze stanów ewoluuje zgodnie z równaniem Schrödingera , czyli

$$|\psi_\pm(t)\rangle = e^{-i\frac{t}{\hbar}\lambda_\pm}|\psi_\pm\rangle \tag{5}$$

zatem ogólna superpozycja zmienia się w sposób następujący

$$|\psi(t)\rangle = c_+ e^{-i\frac{t}{\hbar}\lambda_+}|\psi_+\rangle + c_- e^{-i\frac{t}{\hbar}\lambda_-}|\psi_-\rangle. \tag{6}$$

Zadanie 2

Treść: Nieco bardziej złożony jest układ który ma dwa stopnie swobody i na każdy z nich przypadają dwie możliwe wartości. Przykładem takiego układu jest pojedynczy foton, który może być emitowany w lewo lub prawo (wektor falowy $\pm k$) i w stanie o polaryzacji pionowej lub poziomej (oznaczanej przez V i H). Zaproponuj bazę opisującą taki układ. Zakładając, że dynamika fotonu dopuszcza zmianę polaryzacji, ale nie wektora falowego, jaką postać będzie miał ogólny Hamiltonian w takim przypadku?

Rozwiązanie: Narzucającą się bazą jest zbiór wektorów, które opisują oba stopnie swobody, czyli na przykład

$$|\psi_1\rangle = |-k, V\rangle, \quad |\psi_2\rangle = |-k, H\rangle, \quad |\psi_3\rangle = |k, V\rangle, \quad |\psi_4\rangle = |k, H\rangle. \tag{7}$$

Dobór takiej bazy jest o tyle wygodny, że dynamika opisana w treści zadania sprzęga ze sobą stany $|\psi_1\rangle$ i $|\psi_2\rangle$ oraz niezależnie $|\psi_3\rangle$ i $|\psi_4\rangle$. Zatem Hamiltonian będzie miał postać blokową, bardzo wygodną do dalszych badań

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} a & b+ic & 0 & 0 \\ b-ic & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f+ig \\ 0 & 0 & f-ig & h \end{pmatrix}, \quad a,b,c,d,e,f,g,h \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Zadanie 3

Treść: Rozwiąż stacjonarne równanie Schrödingera dla cząstki o masie m znajdującej się w jednowymiarowej nieskończonej studni potencjału o szerokości $2a$. W stanie podstawowym i pierwszym wzbudzonym znajdź $\langle\hat{x}\rangle$ i $\langle\hat{x}^2\rangle$ oraz $\langle\hat{p}\rangle$ i $\langle\hat{p}^2\rangle$ i wyznacz $\Delta\hat{x}\Delta\hat{p}$. Znajdź dynamikę dowolnego stanu w tym układzie.

Rozwiązanie: Stacjonarne równanie Schrödingera we wnęce ma postać

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = E\psi(x). \tag{9}$$

Widać, że rozwiązania można konstruować przy pomocy funkcji trygonomertycznych, na przykład

$$\psi(x) \propto \sin(\kappa x), \quad \kappa = \sqrt{2mE/\hbar^2}. \tag{10}$$

Ponieważ funkcja falowa musi znikać na brzegach, zatem

$$\psi(\pm a) \propto \sin(\pm\kappa a) = 0, \Rightarrow \kappa_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}. \tag{11}$$

Energie własne to zatem:

$$E_n = \frac{\hbar^2\kappa_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2 n^2\pi^2}{2ma^2}. \tag{12}$$

Normalizacja funkcji falowej wynika z warunku

$$\int_{-a}^{a}\psi_n^2(x) = 1 \ \Rightarrow\ \psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\sin(\kappa_n x). \tag{13}$$

Z symetrii wynika, że zawsze $\langle x\rangle = 0 = \langle p\rangle$, zaś w ogólności zachodzi

$$\langle\hat{x}^2\rangle_n = \frac{1}{2}a^2\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{n^2\pi^2}\right) \tag{14}$$

$$\langle\hat{p}^2\rangle_n = \frac{\hbar^2 n^2\pi^2}{a^2}. \tag{15}$$

Zatem zachodzi

$$\Delta\hat{x}_n\Delta\hat{p}_n = \hbar n\pi\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{2n^2\pi^2}}. \tag{16}$$

Zadanie 4

Treść: Znajdź rozwiązanie stacjonarnego równania Schrödingera dla cząstki o masie m poruszającej się w potencjale

$$V(x) = -v_0\delta(x), \quad v_o > 0.$$

Rozwiązanie: Zapiszmy równanie Schrödingera w zmiennych bezwymiarowych, dzieląc stronami przez $\hbar^2/(2m)$ oraz redefiniując v_0 i energię. Mamy

$$\psi''(x) = -(v_0\delta(x) + \epsilon)\psi(x). \tag{17}$$

Funkcja musi być ciągła w zerze, zaś pierwsza pochodna musi mieć skok. Jego rozmiar wyliczamy przez całkowanie powyższego równania po małym obszarze od $-\eta$ do η. Otrzymujemy

$$\int_{-\eta}^{\eta}dx\psi''(x) = \psi'(\eta) - \psi'(-\eta) = -\int_{-\eta}^{\eta}dx(v_0\delta(x) + \epsilon)\psi(x) = -v_0\psi(0) + \eta\psi(0). \tag{18}$$

W granicy $\eta \to 0$ otrzymujemy

$$\psi'(0_+) - \psi'(0_-) = -v_0\psi(0). \tag{19}$$

Równanie w każdej z półprzestrzeni ma postać

$$\psi''_\pm(x) = |\epsilon|\psi_\pm(x). \tag{20}$$

Stąd fizyczne rozwiązania, czyli takie, które zanikają w nieskończoności, wynoszą

$$\psi_\pm(x) = \alpha_\pm e^{\mp\sqrt{|\epsilon|}x}. \tag{21}$$

By wyznaczyć dozwolone energie, zauważamy, że warunki ciągłości funckji i skoku pochodnej dają

$$\alpha_- = \alpha_+, \quad \alpha_-\sqrt{|\epsilon|} + \alpha_+\sqrt{|\epsilon|} = v_0\alpha_-. \tag{22}$$

Stąd, korzystając z warunku na zerowanie się wyznacznika tego liniowego jednorodnego równania, otrzymujemy

$$\epsilon = -\frac{v_0^2}{4}, \tag{23}$$

zaś stan własny, po unormowaniu, jest postaci

$$\psi_\pm(x) = \sqrt{\frac{v_0}{2}}e^{\mp\frac{v_0}{2}x}. \tag{24}$$

Zadanie 5

Treść: Powtórz całe rozwiązanie zagadnienia jednowymiarowego oscylatora hamrmonicznego o częstości ω dla cząstki o masie m metodą algebraiczną (było/będzie na wykładzie). Wyznacz $\Delta\hat{x}\Delta\hat{p}$.

Rozwiązanie: Zauważamy, że operatory położenia i pędu, wyrażone przez operatory kreacji i anihilacji, mają postać

$$\hat{x} = a_{ho}\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}+\hat{a}^\dagger), \quad \hat{p} = \frac{\hbar}{a_{ho}}\frac{1}{i\sqrt{2}}(\hat{a}-\hat{a}^\dagger). \tag{25}$$

Stąd na stanie $|n\rangle$ średnie $\langle\hat{x}\rangle = \langle\hat{p}\rangle = 0$. Zaś kwadraty dają wkłady tylko dla iloczynów $\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} = 2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1$, zatem

$$\Delta x\Delta p = \frac{\hbar}{2}(2n+1). \tag{26}$$

Zadanie 6

Treść: Przyjmijmy, że maszyna dokonuje pomiaru obserwabli

$$\hat{\mathcal{A}} = a_1\hat{\Pi}_1 + a_2\hat{\Pi}_2, \quad \hat{\Pi}_i = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \quad |\psi_{1/2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle)$$

w układzie z poprzedniego zadania. Zakładając, że stan początkowy jest dowolną superpozycją stanów własnych, znajdź prawdopodobieństwo otrzymania wyników a_1 i a_2 w chwili czasu t.

Rozwiązanie: Stan początkowy jest dowolną superpozycją, ma zatem postać

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n|n\rangle, \quad \sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2 = 1. \tag{27}$$

Jego ewolucja czasowa polega na zastąpieniu c_n przez $c_n(t)$, gdzie każdy współczynnik zależy od czasu poprzez funkcję wykładniczą $e^{-i\omega tn}$ (skądinąd, czemu nie potrzebujemy $1/2$ w wykładniku?). Teraz, by poznać prawdopodonieństwo znalezienia układu w którymś ze stanów $|\psi_{1/2}\rangle$, nalezy zrzutować układ na ten stan i policzyć $|\cdot|^2$ wyniku. Otrzymujemy dla stanu $|\psi_1\rangle$:

$$p_1(t) = |\langle\psi_1||\psi\rangle|^2 = \frac{1}{2}|c_0(t)+c_1(t)|^2 = \frac{1}{2}|c_0 + c_1e^{-i\omega t}|^2. \tag{28}$$

Dla stanu $|\psi_2\rangle$ wynik będzie analogiczny, tylko ze znakiem "-". Dla ilustracji można na przykład wziąć przypadek, gdy $c_0 = c_1 = 1/\sqrt{2}$.

Zadanie 7

Treść: Znajdź wszystkie stany własne operatora anihilacji. Wyznacz normalizację, znajdź iloczyn skalarny między nimi. Wykaż, że operatory te tworzą bazę nadzupełną.

Rozwiązanie: Stanów własnych operatora anihilacji poszukujemy zapisując warunek

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad \alpha \in \mathbb{C}. \tag{29}$$

Jako że stany Focka tworzą bazę ortonormalną, poszukujemy tego stanu w postaci

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle. \tag{30}$$

Warunek z równania (??) daje nam

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sqrt{n} |n-1\rangle = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle. \tag{31}$$

Rzutując stronami na stan o ustalonym n otrzymujemy związek rekurencyjny

$$c_n \sqrt{n} = \alpha c_{n-1}. \tag{32}$$

Oznacza to, że iterowanie powyższej rekurencji daj

$$c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0. \tag{33}$$

Zatem stan własny ma postać

$$|\alpha\rangle = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \tag{34}$$

Stałą c_0 wyznaczamy z normalizacji

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = 1 = |c_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = |c_0|^2 e^{|\alpha|^2}. \tag{35}$$

Zatem stan, który od tej pory nazywać będziemy koherentnym, ma postać (z dokładnością do nieistotnego czynnika fazowego)

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \tag{36}$$

Iloczyn skalarny dwu stanów koherentnych wynosi

$$\langle\alpha|\beta\rangle = e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\beta|^2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{*n}\beta^n}{n!} = e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\beta|^2)} e^{\alpha^*\beta}, \tag{37}$$

są one zatem nieortogonalne. Niemniej tworzą one bazę, gdyż

$$\frac{1}{2\pi}\int d^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{|n\rangle\langle m|}{\sqrt{n!m!}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-r^2} r^{n+m} e^{i\varphi(n-m)}. \tag{38}$$

Całka po kącie daje 0, poza przypadkiem, gdy $n = m$, zatem działa jak $2\pi\delta_{nm}$, co daje

$$\frac{1}{2\pi}\int d^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|n\rangle\langle n|}{n!} \int_0^{\infty} r dr e^{-r^2} r^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|n\rangle\langle n|}{n!} = \hat{\mathbb{1}}. \tag{39}$$

Zatem, choć nie są ortogonalne, stany koherentne rozpinają przestrzeń Focka. Mówimy, że tworzą bazę "nadzupełną".