SERIA 5
ROZWIĄZANIA

MECHANIKA KWANTOWA '26

Zadanie 1

Treść: Wykaż, że zachodzi związek

$$\left[\vec{n}\cdot\hat{\vec{L}},\hat{\vec{V}}\right] = i\hbar\hat{\vec{V}}\times\vec{n}, \tag{1}$$

gdzie $\hat{\vec{V}}$ jest wektorem trzech operatorów działających w tej samej przestrzeni, co $\hat{\vec{L}}$.

Rozwiązanie: Zapisujemy wyrażenie na j-tą składową operatora $\hat{V}$ i mamy

$$\left[\vec{n}\cdot\hat{\vec{L}},\hat{V}_j\right] = \sum_i n_i\left[\hat{L}_i,\hat{V}_j\right] = i\hbar\sum_{ik} n_i\epsilon_{ijk}V_k = i\hbar\left(\hat{\vec{V}}\times\vec{n}\right)_j, \tag{2}$$

gdzie skorzystaliśmy z faktu

$$\left[\hat{L}_i,\hat{V}_j\right] = i\hbar\sum_k \epsilon_{ijk}V_k, \tag{3}$$

który należy osobno wykazać / skomentować.

Zadanie 2

Treść: Stan pewnej cząstki opisywany jest funkcją falową

$$\psi(\vec{r}) = \mathcal{N}(x+y+z)e^{-\frac{r^2}{\alpha^2}}, \quad \alpha\in\mathbb{R}, \tag{4}$$

gdzie $\mathcal{N}$ jest stałą normalizacyjną. Jakie jest prawdopowobieństwo wyników $2\hbar^2$ i 0 przy pomiarze odpowiednio $\hat{L}^2$ oraz $\hat{L}_z$?

Rozwiązanie:
Zauważmy, że zachodzi

$$\psi(\vec{r}) = f(r)\times g(\theta,\phi), \tag{5}$$

gdzie we współrzędnych sferycznych

$$g(\theta,\phi) = \mathcal{N}\left(\sin\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi + \cos\theta\right). \tag{6}$$

Korzystając z

$$Y_{1,\pm1}(\theta,\phi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\phi}, \quad Y_{1,0}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta, \tag{7}$$

otzymujemy po unormowaniu

$$g(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{i-1}{\sqrt{2}}Y_{1,1}(\theta,\phi) + \frac{i+1}{\sqrt{2}}Y_{1,1}(\theta,\phi) + Y_{1,0}(\theta,\phi)\right), \tag{8}$$

stąd prawdopodobieństwo otrzymania wyniku $2\hbar^2$ obserwabli $\hat{L}^2$ wynosi 1, zaś wyniku 0 obserwabli $\hat{L}_z$ wynosi 1/3.

Zadanie 3

Treść: Cząstka o masie μ bytująca w potencjale $V(r)$ opisywana jest funkcją falową

$$\psi(\vec{r}) = (x+y+3z)f(r). \tag{9}$$

Odpowiedz na następujące pytania:

a) Czy $\psi(\vec{r})$ jest stanem własnym $\hat{L}^2$? Jeżeli tak, to jaka jest wartość l? Jeżeli nie, jakie są możliwe wyniki pomiaru obserwabli $\hat{L}^2$?

b) Jakie są prwadopodobieństwa pomiarów różnych warości m?

c) Załóżmy, że $\psi(\vec{r})$ jest stanem własnym Hamiltonianu. W jaki sposób można wyznaczyć potencjał $V(r)$?

Rozwiązanie:
Analogicznie do poprzedniego zadania, część radialna $rf(r)$ separuje się od kątowej $g(\theta, \phi)$, możemy zatem zapisać

$$g(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{11}} \left(\frac{i-1}{\sqrt{2}} Y_{1,1}(\theta, \phi) + \frac{i+1}{\sqrt{2}} Y_{1,1}(\theta, \phi) + 3Y_{1,0}(\theta, \phi) \right). \tag{10}$$

Zatem jest to stan własny $\hat{L}^2$ z wartością własną $l = 1$. Możeliwe wyniki pomiarów obserwabli $\hat{L}_z$ i ich prawdopodobieńśtwa to $m = \pm\hbar$: $p_{\pm 1} = 1/11$ oraz $m = 0\hbar$: $p_0 = 9/11$.
By odpowiedzieć na pytanie dotyczące potencjału $V(r)$, zapisujemy równanie Schrödingera w postaci

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu r^2} \partial_r^2 r^2 + \frac{\hat{L}^2}{2\mu r^2} + V(r) \right] f(r) g(\Omega) = E f(r) g(\Omega). \tag{11}$$

Ponieważ g jest stanem własnym $\hat{L}^2$, możemy nim zadziałać i odcałkować stronami f, co daje wyrażenie czysto radialne

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu r^2} \partial_r^2 r^2 + \frac{\hbar^2}{\mu r^2} + V(r) \right] f(r) = E f(r). \tag{12}$$

Stąd

$$V(r) = E + \frac{\hbar^2}{2\mu f(r) r^2} \partial_r^2 \left(r^2 f(r) \right) - \frac{\hbar^2}{\mu r^2} = E + \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{r f'' + 4f'}{rf}. \tag{13}$$

Zadanie 4

Treść: Wykaż że dla operatora momentu pędu zachodzą następujące związki

a) $\vec{r}\hat{\vec{L}}$ i $\hat{\vec{L}}\vec{r}$ oraz analogicznie $\vec{p}\hat{\vec{L}}$ i $\hat{\vec{L}}\vec{p}$ są operatorami zerowymi.

b) $\hat{L}^2 = -\vec{r} \left[\vec{p}(\vec{p} \cdot \vec{r}) - \vec{p}^2 \vec{r} \right]$

c) $\left[\vec{r}\vec{p}^2 \right] = 2i\hbar\vec{p}$, ewentualnie $[\vec{r}, \vec{p}] = 3i\hbar$

d) Bezpośrednim rachunkiem w zmiennych sferycznych wykaż $\vec{r}\vec{p} = -i\hbar r \partial_r$.

e) Korzysatając z wyniku b) wykaż $\hat{L}^2 = r^2 \vec{p}^2 + \hbar^2 \partial_r (r^2 \partial r)$.

Rozwiązanie:

a) Mamy, na przykład

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = \sum_i r_i L_i = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} r_i r_j p_k = (\vec{r} \times \vec{r}) \cdot \vec{p} = 0. \tag{14}$$

Analogicznie dla $\vec{L} \cdot \vec{r}$ i dla przypadków z $\vec{p}$.

b) Korzystając z $\vec{r}\vec{p} = -\vec{p}\vec{r}$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \hat{L}^2 = -(\vec{r}\vec{p})(\vec{p}\vec{r}) &= -\sum_{ijklm} \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} r_j p_k r_l p_m = -\sum_{ijklm} (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}) r_j p_k r_l p_m = \\ &= -(\vec{r} \cdot \vec{p})(\vec{p} \cdot \vec{r}) + \sum_j r_j \vec{p}^2 r_j = -\vec{r} \cdot (\vec{p}(\vec{p} \cdot \vec{r}) - \vec{p}^2 \vec{r}). \end{aligned} \tag{15}$$

c) Mamy

$$[r_j, \vec{p}^2] = \sum_i [r_j, p_i^2] = \sum_i (p_i[r_j, p_i] + [r_j, p_i])p_i = 2i\hbar p_j. \tag{16}$$

Analogicznie dla $[\vec{r}, \vec{p}] = 3i\hbar$.

d) Korzystając ze zmiennych sferycznych, otrzymujemy

$$\begin{aligned} x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z = r\sin\theta\cos\phi &\left[\sin\theta\cos\phi\partial_r + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi\partial_\theta - \frac{1}{r}\sin\phi/\sin\theta\partial_\phi\right] + \\ + r\sin\theta\sin\phi &\left[\sin\theta\sin\phi\partial_r + \frac{1}{r}\cos\theta\sin\phi\partial_\theta + \frac{1}{r}\cos\phi/\sin\theta\partial_\phi\right] + \\ + r\cos\theta &\left[\cos\theta\partial_r - \frac{1}{r}\sin\theta\partial_\theta\right] = r\partial_r \end{aligned} \tag{17}$$

e) Na koniec, korzystamy z

$$\hat{L}^2 = \vec{r}\cdot(\vec{p}(\vec{p}\cdot\vec{r}) - \vec{p}^2\vec{r}) = -\vec{r}\cdot\vec{p}(-\vec{r}\cdot\vec{p} - 3i\hbar) + \vec{r}\cdot(\vec{r}\vec{p}^2 - 2i\hbar\vec{p}) = r^2\vec{p}^2 + i\hbar\vec{r}\vec{p} - (\vec{r}\cdot\vec{p})^2. \tag{18}$$

Daje nam to, na mocy poprzednio wyliczonych związków

$$\hat{L}^2 = r^2\vec{p}^2 + \hbar^2 r\partial_r + \hbar^2(r\partial_r)^2 = r^2\vec{p}^2 + \hbar^2(2r\partial_r + r^2\partial_r^2) = r^2\vec{p}^2 + \hbar^2\partial_r r^2\partial_r. \tag{19}$$

Zadanie 5

Treść: Przyjmijmy, że cząstka jest w stanie własnym operatorów $\hat{L}^2$ oraz $\hat{L}_z$ (wartości własne odpowiednio $\hbar^2 l(l+1)$ oraz $\hbar m$. Wykaż, że w tym stanie $\langle\hat{L}_x\rangle = \langle\hat{L}_y\rangle = 0$ oraz że $\langle\hat{L}_x^2\rangle = \langle\hat{L}_y^2\rangle = \frac{\hbar^2}{2}\left[l(l+1) - m^2\right]$.

Rozwiązanie: Zauważmy, że operatory $\hat{L}_x$ oraz $\hat{L}_y$ można zapisać jako

$$\hat{L}_x = \frac{1}{2}\left(\hat{L}_+ + \hat{L}_y\right) \tag{20a}$$

$$\hat{L}_y = \frac{1}{2i}\left(\hat{L}_+ - \hat{L}_y\right). \tag{20b}$$

Stąd ich wartości średnie na stanie własnym $\hat{L}_z$ są zero. Zaś podniesienie do kwadratu daje nieznikający wkład od

$$\begin{aligned} \langle lm|\hat{L}_x^2|lm\rangle = \langle lm|\hat{L}_y^2|lm\rangle &= \frac{1}{4}\left\langle\hat{L}_+\hat{L}_- + \hat{L}_-\hat{L}_+\right\rangle_{lm} \\ &= \frac{1}{2}\left\langle\hat{L}_+\hat{L}_-\right\rangle_{lm} = \frac{1}{2}\hbar^2(l-m)(l+m+1) = \frac{\hbar^2}{2}\left(l(l+1) - m^2\right), \end{aligned} \tag{21}$$

gdzie skorzystaliśmy z tego, jak działa na stan $|lm\rangle$ operator obniżający rzut momentu pędu.